КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

КИРЧЕЙ Иван Игоревич

УДК 512.643.2

ТЕОРИЯ СТОЛБЦОВЫХ И СТРОЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ОБРАТНАЯ МАТРИЦА НАД ТЕЛОМ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Специальность 01.01.06 – алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на получение научной степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 2008

Диссертацией есть рукопись.

Робота выполнена в отделе дифференциальных уравнений Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор,
Сявавко Марьян Степанович,
Львовский государственный институт новейших технологий им. В.Черновола, заведующий кафедры вычислительной математики и моделирования.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор,
Зайцев Михаил Владимирович,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, профессор кафедры высшей алгебры;

кандидат физико-математических наук, доцент,
Безущак Оксана Емельяновна,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, доцент кафедры алгебры и математической логики.

Защита состоится “17“ ноября 2008 г. на заседании специализированного ученого совета Д.26.001.18 при Киевском национальном университете имени Тараса Шевченко по адресу: 03022, г. Киев – 22, проспект Академика Глушкова, 6, корпус 7, механико-математический факультет.

Из диссертацией можно ознакомится в библиотеке Киевского национального университету имени Тараса Шевченко по адресу: м. Киев, ул. Владимирская, 58.

Автореферат разослан “ 13 “ октября 2008 р.

Учений секретарь
специализированного ученого совета Плахотник В. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория определителей матриц с некоммутирующими элементами, их еще называют некоммутативными определителями, уже на протяжении нескольких столетий приковывает к себе внимание математиков. Хронология работ, в которых вводится новое понятие некоммутативного определителя, начинается еще от работы А. Кели 1845 года, но продолжается и до сих пор. Наиболее известное определение некоммутативного определителя, а именно определителя квадратной матрицы над телом, принадлежит Ж. Дьёдонне, который его значение предложил рассматривать не в самом теле, а в присоединенном к нему объекте – факторе по коммутанту. Такого же рода определения было введено Э. Стаде для квадратных матриц над телом кватернионов, а также обобщалось Й. С. Понизовским, который рассматривал определитель квадратной матрицы над произвольным кольцом, а в качестве присоединенного объекта - произвольную коммутативную полугруппу.

Кардинально другое определение некоммутативного определителя недавно было предложено И. М. Гельфандом и В. С. Ретахом, которые квадратной матрице n-го порядка над телом сопоставляют матрицу ее квазидетерминантов того же порядка. Таким образом, вместо одного определителя они вводят n^2 квазидетерминантов, перенося из коммутативного случая не само понятия определителя, а его отношение к минорам порядка $n-1$.

Третий способ определения некоммутативного определителя – рассматривать его подобно коммутативному случаю, как альтернированную сумму мономов от элементов матрицы, фиксируя дополнительно порядок элементов в этих мономах. Наиболее основательно и успешно этот способ был разработан в роботах Э. Г. Мура и Ф. Д. Дайсона, но только для определенного класса матриц, а именно эрмитовых матриц над телом. Определенное обобщение такого определителя для произвольных квадратных матриц над телом кватернионов осуществил Л. Чен.

В то же время ни один из до сих пор введенных некоммутативных определителей не обобщает в полном объеме, в смысле сохранения всех свойств и применений, определитель комплексной матрицы. Более того, некоторые вопросы из теории матриц над некоммутативным кольцом до сих пор остаются открытыми, хотя аналогичные задачи находят своё решение посредством определителя в коммутативном случае. Так до сих пор нерешенными оставались такие актуальные проблемы линейной алгебры над телом, как аналитическое представление классической присоединенной матрицы и, как следствие, обобщение правила Крамера для систем линейных уравнений над телом. Разработке этих вопросов посвящена данная диссертационная работа.

Актуальность исследований, которые проводятся в линейной алгебре над телом (в частности, телом кватернионов), возрастает еще и вследствие потребностей теоретической физики, в особенности в контексте квантовой механики и теории поля. С появлением суперсимметричных теорий и квантовых групп возникла насущная необходимость рассматривать матрицы, которые содержат антикоммутирующие или вообще некоммутативные элементы. Поэтому рассмотрение определителей таких матриц является важным обобщением понятия определителя. Все это и обуславливает актуальность и выбор темы диссертационного исследования.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Результаты диссертации получены в рамках выполнения госбюджетной темы Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины: "Развитие диференциально-геометрических и аналитических методов исследования инвариантных уравнений математической и теоретической физики" (номер госрегистрации 0101U000451).

Цель и задачи исследования. *Целью* диссертации являются определение и исследование свойств столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом с инволюцией, которые бы обобщали определитель Э. Г. Мура, введенный для эрмитовых матриц; установление критерия обратимости квадратных матриц над телом в рамках построенной теории определителей и детерминантное представление обратной матрицы над телом через аналог классической присоединенной матрицы; обобщение правила Крамера для левых и правых систем линейных уравнений над телом с инволюцией, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над своим центром - полем нулевой характеристики.

Для достижения этой цели осуществляется постановка и решения следующих задач:

- дать определения и исследовать свойства строчных и столбцовых определителей квадратных матриц над телом с инволюцией, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над полем нулевой характеристики;
- в рамках теории столбцовых и строчных определителей дать определение определителя эрмитовой матрицы, который совпадает с определителем Мура, и исследовать его свойства выраженные через столбцовые и строчные определители;
- аналитически представить обратную к эрмитовой матрице над телом с инволюцией через классическую присоединенную;
- получить определение в рамках теории столбцовых и строчных определителей, и исследовать свойства двойного определителя квадратной матрицы над телом с инволюцией;
- получить детерминантное представление обратной матрицы через аналог классической присоединенной для произвольной обратимой квадратной матрицы над телом с инволюцией;
- аналитически представить решения правой и левой систем линейных уравнений над телом, как обобщения правила Крамера.

Объектом исследования являются матрицы над телом, которое является ассоциативной композиционной алгеброй с делением над своим центром – полем нулевой характеристики.

Предметом исследования являются некоммутативные определители квадратных матриц над телом с инволюцией.

Методы исследования: методы теории некоммутативных колец и алгебр, теории матриц над телом.

Научная новизна полученных результатов. Научная новизна работы заключается в таких основных положениях:

1. Введены понятия и разработана теория новых матричных функционалов, - столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над своим центром - полем нулевой характеристики.
2. В рамках теории столбцовых и строчных определителей введено понятие определителя эрмитовой матрицы, который совпадает с определителем Мура, а также двойного определителя квадратной матрицы над телом с инволюцией. Показано, что множество всех столбцовых и строчных определителей является полным и естественным обобщением определителя Мура для произвольной квадратной матрицы над телом. Двойной определитель представлен как определитель, который удовлетворяет как аксиомы некоммутативного определителя, так и свойство разложения Лапласа по элементах любого столбца или строки матрицы.
3. Получено детерминантное представление обратной матрицы через классическую присоединенную для обратимой эрмитовой матрицы над телом с инволюцией.
4. Получено детерминантное представление обратной матрицы для произвольной обратимой квадратной матрицы над телом с инволюцией через аналог классической присоединенной.
5. Решения правых и левых систем линейных уравнений над телом изображены как обобщение правила Крамера.

Личный взнос соискателя. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Практическое значение полученных результатов. Результаты диссертации имеют теоретический характер. Их можно использовать в дальнейших научных исследованиях алгебры матриц с некоммутирующими элементами, а также в исследованиях, в которых применяются некоммутативные определители, в частности, в областях теоретической физики и квантовой механики.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на: Международной конференции из алгебры в Украине (Львов, 2003; Одесса, 2005; Каменец-Подольский, 2007), Международной научной конференции им. академика М. Кравчука (Киев, 1995, 2002, 2004, 2006), Международной математической конференции им. В. Я. Скоробагатька (Дрогобыч, 2004, 2007), International Conference on Matrix Analysis and Applications (Dec. 14-16, 2003, Nova Southeastern University, Fort Lauderdale, Florida, USA), Международной алгебраической конференции посвященной 250-летию Московского государственного университета (Москва, Россия, 2004), Международной алгебраической конференции посвященной 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина (Екатеринбург, Россия, 2005), III Всеукраинской научной конференции “Нелинейные проблемы анализа” (Ивано-Франковск, 2003), Международной школе-семинаре “Цепные дроби, их обобщение и применение” (п.г.т. Верхнее Синевидное Львовской обл., 1994; Ужгород, 2002), заседаниях семинара им. В. Я. Скоробагатька Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины (Львов, 2001-2008), заседаниях общеинститутского математического семинара Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины (Львов, 2005, 2008), заседаниях Львовского городского научного семинара из алгебры (Львов, 2001, 2004), заседании семинара из алгебры Киевского национального университета им. Т.Г.Шевченко (Киев, 2004).

Публикации. Результаты, которые включены в диссертацию, достаточно полно изложены в 17 публикациях, в том числе в шести статьях в профессиональных научных изданиях из перечня, утвержденного ВАК Украины и одиннадцати тезисах международных и всеукраинских конференций.

Структура и объем работы. Диссертация складывается из вступления, трех разделов, выводов, списка использованных источников и имеет объем 148 страниц. Список использованных источников содержит 95 наименований и занимает 8 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во вступлении обоснована актуальность темы, показана связь работы с научными темами, сформулирована цель и задачи исследования, указана научная новизна, практическое значение, апробация полученных результатов и количество публикаций.

В первом разделе рассматриваются основные материалы из теории некоммутативных определителей, подаются также формулы для аналитического представления обратной матрицы с некоммутирующими элементами в рамках теории любого из представленных определителей и формулы, которые обобщают правило Крамера для левых и правых систем линейных уравнений. В первом пункте первого подраздела вводится аксиоматическое определение определителя квадратной матрицы с некоммутирующими элементами.

Определение 1.1.1. Пусть $\boldsymbol{M(n,K)}$, - кольцо квадратных матриц n-го порядка над кольцом $\boldsymbol{K}$, и функционал $\boldsymbol{d : M}(n,\boldsymbol{K}) \to \boldsymbol{K}$ удовлетворяет следующие аксиомы.

Аксиома 1. (Вырожденность.) $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}) = 0$ *тогда и только тогда, если* $\mathbf{A}$ *вырожденная (необратимая) матрица.*

Аксиома 2. (Мультипликативность.) $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\boldsymbol{d}(\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{d}(\mathbf{B})$.

Аксиома 3. (Инвариантность.) *Если матрица* $\tilde{\mathbf{A}}$ *получается из квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *через добавление к ее произвольной строке умноженной слева на элемент кольца её другой строки, или через добавление к ее произвольному столбцу умноженного справа на элемент кольца его другой столбец, тогда* $\boldsymbol{det}\,\tilde{\mathbf{A}}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$.

Тогда значение функционала $\boldsymbol{d}(\mathbf{A})\in\boldsymbol{K}$ называют *определителем квадратной матрицы* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{K})$.

Имеет место теорема о том, что образ детерминантного отображения для матриц над некоммутативным кольцом $\boldsymbol{K}$, которое удовлетворяет эту группу аксиом, является коммутативным подмножеством кольца. В других подпунктах этого подраздела рассматриваются определители, которые удовлетворяют аксиомы 1, 2, 3 некоммутативного определителя, а именно, определитель Э. Стаде для матриц над телом кватернионов и определитель Ж. Дьёдонне для матриц над произвольным телом, а также обобщение последнего для квадратных матриц над кольцом, осуществленное Й. С. Понизовским. В рамках этой теории некоммутативных определителей приведено аналитическое представление обратной матрицы полученное Й.С. Понизовским.

Во втором подразделе этого раздела рассматриваются элементы теории квазидетерминантов, разработанной И. М. Гельфандом и В. С. Ретахом, которые индукцией по n квадратной матрице $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ над телом $\boldsymbol{S}$ ставят в соответствие n^2 построенных ими квазидетерминантов. Приведены аналитические представления обратной матрицы, а также решений систем линейных уравнений.

В третьем подразделе рассматриваются определители, определённые подобно коммутативному случаю, как альтернированная сумма мономов от элементов матрицы, но фиксируя предварительно порядок элементов в любом из этих мономов. Наиболее удачного построения определителя по этому принципу достиг Э. Г. Мур. Он заметил, что можно достичь успеха, если в любом из мономов элементы матрицы размещать так, чтобы подстановки их индексов образовывали произведения независимых циклов, кроме того, применить такое определение определителя только для определенного класса матриц, а именно - для эрмитовых. Ф. Дайсон доказывает выполнение аксиом 1 и 3 для определителя Мура. В своей работе он также ставит нерешенный проблемный вопрос, связанный с определителем Мура: Каким наиболее естественным путем можно обобщить определение определителя Мура для матриц, которые не являются эрмитовыми?

В третьем подпункте этого подраздела приводится определенный вариант удовлетворительного ответа на этот вопрос, разработанный Лонгхуан Ченом, – введенный им определитель квадратной матрицы над телом кватернионов**.** Приведены детерминантные представления обратной матрицы и правило Крамера для систем линейных уравнений над телом кватернионов, полученные Л. Ченом.

Первый раздел подытоживается следующими выводами. Поскольку, ни один из прежде введенных определителей не удовлетворяет свойство разложения Лапласа по любой строке или столбцу матрицы, то и определить алгебраическое дополнение элемента матрицы, а отсюда и получить детерминантное представление обратной матрицы через аналог классической присоединенной матрицы над телом в рамках теории любого из определённых выше некоммутативных определителей невозможно. Чтобы достичь поставленной цели необходимо построить такой некоммутативный определитель, который с одной стороны удовлетворял бы свойство разложения по любой строке или столбцу матрицы и в то же время удовлетворял бы аксиомы некоммутативного определителя из определения 1.1.1.

Во втором разделе рассматривается теория столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом с инволюцией.

В первом подразделе этого раздела основное тело $\boldsymbol{S}$ с инволюцией определяется как ассоциативная композиционная нерасщепляемая алгебра над своим центром – полем $\boldsymbol{F}$ нулевой характеристики. Для описания всех ассоциативных композиционных нерасщепляемых алгебр над своим центром – полем $\boldsymbol{F}$ нулевой характеристики воспользуемся процессом Кели-Диксона, тогда $\boldsymbol{S}$ изоморфна одной из следующих алгебр размерностей $\boldsymbol{dim_F S} = 1, 2$ или 4. 1) Полю $\boldsymbol{F}$. 2) $\boldsymbol{C}(\alpha) = (\boldsymbol{F}, \alpha)$ **-** алгебре, которая получается из алгебры $\boldsymbol{F}$ с помощью процесса Кели–Диксона, при условии, что $\alpha \neq 0$ и многочлен $x^2 - \alpha$ неприводимый над $\boldsymbol{F}$. Тогда $\boldsymbol{C}(\alpha)$ - поле. 3) $\boldsymbol{H}(\alpha, \beta) = (\boldsymbol{C}(\alpha), \beta)$, - кватернионовой алгебре $\left(\frac{\alpha, \beta}{\boldsymbol{F}}\right)$, при условии, что $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ берутся такими, чтобы выполнялось условие её нерасщепляемости. Эта алгебра ассоциативная, но некоммутативная.

Рассматриваемую $\boldsymbol{F}$-алгебру $\boldsymbol{S}$ можно определить как алгебру порожденную генераторами i и j, которые связаны соотношениями: $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, $ij = k = -\alpha\beta$. И эта алгебра является множеством всех возможных выражений вида $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, где $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} \subset \boldsymbol{F}$. Если $\alpha = \beta = 0$, тогда $\boldsymbol{dim_F S} = 1$ и в каноническом базисе пространства $\boldsymbol{S}$, которое в этом случае совпадает с полем $\boldsymbol{F}$, форма $\boldsymbol{n}(x) = x_0^2$. Если $\alpha \neq 0$ и $\beta = 0$, тогда $\boldsymbol{dim_F S} = 2$ и норма $\boldsymbol{n}(x)$ в пространстве $\boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{C}(\alpha)$ принимает вид $\boldsymbol{n}(x) = x_0^2 - \alpha x_1^2$. Если $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, тогда $\boldsymbol{dim_F S} = 4$ и норма $\boldsymbol{n}(x)$ в пространстве $\boldsymbol{S} \cong \left(\frac{\alpha, \beta}{\boldsymbol{F}}\right)$, которое в этом случае является кватернионовой алгеброй, принимает вид $\boldsymbol{n}(x) = \left(x_0^2 - \alpha x_1^2\right) - \beta\left(x_2^2 - \alpha x_3^2\right) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2$.

Таким образом, единственным примером некоммутативной ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгебры, которая рассматривается в работе, есть кватернионовая алгебра с делением. Примером кватернионовой алгебры с делением в зависимости от выбора поля $\boldsymbol{F}$, в частности, есть тело кватернионов $\boldsymbol{H}$ над полем действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Если $\boldsymbol{Q}_p$ - поле p-адических чисел, то $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}_p}\right)$ является кватернионовой алгеброй с делением в случае, когда $p=2$. Если $\boldsymbol{Q}$ - поле рациональных чисел, то существует бесконечно много неизоморфных кватернионовых алгебр $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}}\right)$. Среди них есть как расщепляемые алгебры, так и алгебры с делением.

Во втором подразделе вводятся понятия столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом. Показано, что каждый из них удовлетворяет свойство разложения Лапласа по соответствующей строке или столбцу. А в целом множество всех строчных и столбцовых определителей разрешает провести разложение по любой строке или столбцу. Доказаны леммы, которые раскрывают левые и правые алгебраические дополнения.

Определение 2.2.4. *Строчным определителем по* i*-й строке* квадратной матрицы $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ над телом $\boldsymbol{S}$, (будем обозначать его $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для произвольного $i=\overline{1,n}$), будем называть альтернированную сумма $n!$ мономов, - всех возможных произведений элементов матрицы $\mathbf{A}$ взятых по одному из каждой строки и столбца, и упорядоченных таким образом, что подстановка σ индексов элементов любого монома в обычной форме записана прямым произведением независимых циклов. Таким образом,

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{n-r}a_{i i_{k_1}}a_{i_{k_1}i_{k_1+1}}\ldots a_{i_{k_1+l_1}i}\ldots a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}\;.$$

Здесь S_n - симметричная группа на множестве $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$ и упорядоченная слева нормальная форма подстановки σ имеет вид $\sigma=\left(i\,i_{k_1}i_{k_1+1}\ldots i_{k_1+l_1}\right)\left(i_{k_2}i_{k_2+1}\ldots i_{k_2+l_2}\right)\ldots\left(i_{k_r}i_{k_r+1}\ldots i_{k_r+l_r}\right)$. При этом первый слева цикл начинается слева индексом i, а все следующие независимые циклы удовлетворяют условия: $i_{k_2}<i_{k_3}<\ldots<i_{k_r}$, $i_{k_t}<i_{k_t+s}$ для всех $t=\overline{2,r}$ и $s=\overline{1,l_t}$.

Пусть $\mathbf{A}^{ij}$ – подматрица матрицы $\mathbf{A}$, которую получим, вычеркнув i-ю строку и j-й столбец. Через $\mathbf{a}_{.j}$ обозначим j-й столбец, а через $\mathbf{a}_{i.}$ – i-ю строку матрицы $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b})$ – матрица, которую получим из $\mathbf{A}$ заменой ее j-го столбца столбцом $\mathbf{b}$, а матрица $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ получается из $\mathbf{A}$ заменой ее i-й строки строкой $\mathbf{b}$.

Лемма 2.2.1. *Пусть* R_{ij} *– правое алгебраическое дополнение элемента* a_{ij} *матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *то есть,* $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot R_{ij}$ *для всех* $i = \overline{1,n}$. *Тогда*

$$R_{ij} = \begin{cases} -\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}), & \text{если } i \neq j, \\ \boldsymbol{rdet}_k\, \mathbf{A}, \text{ если } i = j, & k = \boldsymbol{min}\{I_n / \{i\}\}. \end{cases}$$

Определение 2.2.6. *Столбцовым определителем по* j*-у столбцу* квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ над телом $\boldsymbol{S}$, (будем обозначать его $\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}$ для произвольного $j = \overline{1,n}$), будем называть альтернированную сумму мономов, - всех возможных произведений элементов матрицы $\mathbf{A}$ взятых по одному с каждой строки и столбца и упорядоченных таким образом, что подстановка τ индексов элементов любого монома в обычной форме записана прямым произведением независимых циклов. Таким образом,

$$\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A} = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{n-r} a_{j_{k_r}\, j_{k_r + l_r}} \ldots a_{j_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots a_{j\, j_{k_1+l_1}} \ldots a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} a_{j_{k_1}\, j}$$

Здесь S_n - симметричная группа на множестве $J_n = \{1,2,\ldots,n\}$ и упорядоченная справа нормальная форма подстановки τ имеет вид $\tau = (j_{k_r+l_r} \ldots j_{k_r+1} j_{k_r}) \ldots (j_{k_2+l_2} \ldots j_{k_2+1} j_{k_2})(j_{k_1+l_1} \ldots j_{k_1+1} j_{k_1} j)$. При этом первый справа цикл начинается справа индексом j, а все следующие независимые циклы удовлетворяют условия: $j_{k_2} < j_{k_3} < \ldots < j_{k_r}$ и $j_{k_t} < j_{k_t+s}$ для всех $t = \overline{2,r}$ и $s = \overline{1,l_t}$.

Лемма 2.2.2. *Пусть* L_{ij} *– левое алгебраическое дополнение элемента* a_{ij} *матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *то есть,* $\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij}$ *для всех* $j = \overline{1,n}$. *Тогда*

$$L_{ij} = \begin{cases} -\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}^{jj}_{i.}(\mathbf{a}_{j.}), & \text{если } i \neq j, \\ \boldsymbol{cdet}_k\, \mathbf{A}^{ii}, \text{ если } i = j, & k = \boldsymbol{min}\{J_n / \{j\}\}. \end{cases}$$

Если элементы матрицы коммутируют, то очевидно, что

$$\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{rdet}_n\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1\, \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{cdet}_n\, \mathbf{A}\ .$$

В третьем подразделе вводятся основные понятия алгебры матриц над данным телом. Рассматриваются свойства сопряжённой и транспонированной матриц.

В четвертом подразделе исследуются свойства строчных и столбцовых определителей произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией, в частности следующие.

Теорема 2.4.1. *Если одна из строк (столбцов) матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *складывается нулей, то для всех* $i = \overline{1,n}$ $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = 0$ *и* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = 0$.

Теорема 2.4.3. *Если i-ю строку матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ умножить слева на произвольный элемент $b \in \boldsymbol{S}$, тогда* $\boldsymbol{rdet}_{\boldsymbol{i}}\, \mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.}) = b \cdot \boldsymbol{rdet}_{\boldsymbol{i}}\, \mathbf{A}$ *для всех* $i = \overline{1, n}$.

Теорема 2.4.4. *Если j-й столбец матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ умножить справа на произвольный элемент $b \in \boldsymbol{S}$, тогда* $\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j} \cdot b) = \boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A} \cdot b$ *для всех* $j = \overline{1, n}$.

Теорема 2.4.5. *Если $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ и существует такая l-я строка для некоторого $l \in I_n$, что для всех $j = \overline{1, n}$ выполняется условие $a_{lj} = b_j + c_j$, тогда для всех $i = \overline{1, n}$ имеем* $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{l.}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{l.}(\mathbf{c})$ *и* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{l.}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{l.}(\mathbf{c})$, *где* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Теорема 2.4.6. *Если $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ и существует такой l-й столбец для некоторого $l \in J_n$, что для всех $i = \overline{1, n}$ выполняется условие $a_{il} = b_i + c_i$, тогда для всех $j = \overline{1, n}$ имеем* $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.l}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.l}(\mathbf{c})$ *и* $\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.l}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.l}(\mathbf{c})$, *где* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$.

Теорема 2.4.10. *Если $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ и $\mathbf{A}^*$ - матрица сопряженная к матрице $\mathbf{A}$, тогда* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}^* = \overline{\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}}$ *для всех* $i = \overline{1, n}$.

В силу невыполнения для столбцовых и строчных определителей произвольной квадратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$ аксиомы 1, необходимой для корректного определения некоммутативного определителя, будем считать эти матричные функционалы - пред-определителями.

В пятом подразделе доказано равенство между собою всех столбцовых и строчных определителей эрмитовой матрицы над телом.

Теорема 2.5.1. *Пусть $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ – эрмитовая матрица над телом $\boldsymbol{S}$, тогда*

$$\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{rdet}_n\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1\, \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{cdet}_n\, \mathbf{A} \in \boldsymbol{F}.$$

Поскольку все столбцовые и строчные определители эрмитовой матрицы равны между собою, то для нее можем ввести понятие определителя матрицы, который будем раскрывать как строчный по любой строке или как столбцовый по любому столбцу матрицы, $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} := \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Показано, что определитель эрмитовой матрицы совпадает с определителем Мура, а множество всех строчных и столбцовых определителей является его полным и естественным обобщением на множестве произвольных квадратных матриц.

В шестом подразделе исследуются свойства определителя эрмитовой матрицы через столбцовые и строчные определители. Результат этих исследований обобщают следующие теоремы.

Теорема 2.6.9. *Пусть* $\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right)$ *- матрица, которую получим из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, заменой ее* i*-й строки левой линейной комбинацией ее других строк, где* $c_t \in \boldsymbol{S}$ *для всех* $t = \overline{1, k}$*. Тогда* $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$ *и* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$ *для всех* $i = \overline{1, n}$*.*

Теорема 2.6.10. *Пусть* $\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} \cdot c_k\right)$ *- матрица, которую получим из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, заменой ее* j*-го столбца правой линейной комбинацией ее других столбцов, где* $c_t \in \boldsymbol{S}$ *для всех* $t = \overline{1, k}$*. Тогда* $\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} \cdot c_k\right) = 0$ и $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} \cdot c_k\right) = 0$ *для всех* $j = \overline{1, n}$*.*

В седьмом подразделе вводится понятие унимодулярного подобия эрмитовых матриц над телом. И доказана теорема об унимодулярном подобии эрмитовой матрицы диагональной.

Теорема 2.7.4. *Если* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*- эрмитовая, тогда* $\mathbf{A}$ *унимодулярно подобна некоторой диагональной матрице, то есть,* $\exists \mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$*, что* $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^* = \boldsymbol{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$*, где* $\boldsymbol{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *- диагональная матрица с элементами* $\mu_i \in \boldsymbol{F}$ *для всех* $i = \overline{1, n}$ *на главной диагонали. При этом* $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n$*.*

В третьем разделе получено детерминантное представление обратной матрицы над телом с инволюцией через аналог классической присоединенной матрицы и, как следствие, решения правой и левой систем линейных уравнений над телом аналитически представлены формулами, которые обобщают правило Крамера.

В первом подразделе обратная для эрмитовой матрицы над данным телом аналитически представляется через классическую присоединенную.

Теорема 3.1.1. *Для эрмитовой невырожденной матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, (*$\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} \neq 0$*), существует единая правая обратная матрица* $(R\mathbf{A})^{-1} = \left(\dfrac{R_{ji}}{\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}}\right)_{n \times n}$ *и единая левая обратная матрица* $(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\dfrac{L_{ji}}{\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}}\right)_{n \times n}$*, равные между собою,* $(R\mathbf{A})^{-1} = (L\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$*, и где* R_{ij} *и* L_{ij} *- правое и левое алгебраические дополнения элемента* a_{ij} *матрицы* $\mathbf{A}$*, соответственно.*

Теорема 3.1.3. *Если* $\mathbf{A}$ *- невироджденная эрмитовая матрица над телом* $\boldsymbol{S}$*, тогда* $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}^{-1} = (\boldsymbol{det}\, \mathbf{A})^{-1}$.

Из теоремы 3.1.3 вытекает выполнение определителем эрмитовой матрицы аксиомы 1 определения 1.1.1, то есть, корректность его определения.

Во втором подразделе этого раздела предлагается для произвольной $m \times n$-матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ над телом $\boldsymbol{S}$ рассматривать ее правую $\mathbf{AA}^*$ и левую $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ соответствующие эрмитовые матрицы. Установлены свойства этих матриц в зависимости от матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема 3.2.7. *Если произвольный столбец матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *является правой линейной комбинацией ее других столбцов, тогда определитель ее левой соответствующей эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *равняется нулю.*

Теорема 3.2.8. *Если произвольная строка матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *является левой линейной комбинацией ее других строк, тогда определитель ее соответствующей правой эрмитовой матрицы* $\mathbf{AA}^*$ *равняется нулю.*

В третьем подразделе устанавливаются критерии вырожденности соответствующих эрмитовых матриц.

Теорема 3.3.6. *Для того, чтобы определитель эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *были линейно зависимыми справа.*

Теорема 3.3.7. *Для того, чтобы определитель эрмитовой матрицы* $\mathbf{AA}^*$ *равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы строки матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *были линейно зависимыми слева.*

В четвертом подразделе введен ранг по главным минорам соответствующей эрмитовой матрицы и доказано, что он равняется рангу, (столбцовому или строчному), изначальной матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$.

В пятом подразделе доказана теорема о равенстве определителей левой и правой соответствующих эрмитовых матриц для произвольной квадратной матрицы над телом, на основе которого вводится понятие двойного определителя квадратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$ в рамках теории столбцовых и строчных определителей.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, *тогда* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{AA}^* = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Определение 3.5.1. Для квадратной матрицы $\mathbf{A}$ над телом $\boldsymbol{S}$ определитель ее соответствующей эрмитовой матрицы будем называть ее *двойным (double) определителем*: $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} := \boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{det}\left(\mathbf{AA}^*\right)$.

Если тело $\boldsymbol{S}$ является композиционной ассоциативной алгеброй с делением над максимальным упорядоченным полем $\boldsymbol{F}$, тогда для произвольного элемента $a \in \boldsymbol{S}$ его норма - неотрицательная, $\boldsymbol{n}(a) \in \boldsymbol{F}_+$, где $\boldsymbol{F}_+$ - множество неотрицательных элементов поля. И справедливой является теорема, которое показывает, что в этом случае двойной определитель удовлетворяет аксиому 2 определения 1.1.1.

В шестом подразделе установлен критерий обратимости произвольной квадратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$, а её обратная представлена матрицей, которая является аналогом классической присоединённой.

Определение 3.6.1. Пусть $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Для всех $j = \overline{1, n}$ ее двойной определитель можно разложить по j-му столбцу следующим образом, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{L}_{ij} a_{ij}$, тогда $\mathbb{L}_{ij}$ будем называть *левым двойным алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$.

Определение 3.6.2. Пусть $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Для всех $i = \overline{1, n}$ ее двойной определитель можно разложить по i-й строке следующим образом, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right) = \sum\limits_{j} a_{ij} \mathbb{R}_{ij}$, тогда $\mathbb{R}_{ij}$ будем называть *правым двойным алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, двойной определитель произвольной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$, которое является композиционной ассоциативной алгеброй с делением над полем нулевой характеристики $\boldsymbol{F}$, удовлетворяет аксиомы 1 и 3, а также свойство разложения его по любой строке или столбцу. А если $\boldsymbol{F}$ есть максимальное упорядоченное поле, тогда двойной определитель также удовлетворяет еще и аксиому 2 определения некоммутативного определителя 1.1.1.

Теорема 3.6.1. *Для того, чтобы произвольная матрица* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *была обратимой необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, *тогда существуют единственные ее левая обратная матрица* $(L\mathbf{A})^{-1}$ *и правая обратная* $(R\mathbf{A})^{-1}$ *такие, что* $(L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$ *и*

$$(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^* = \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{11} & \mathbb{L}_{21} & \dots & \mathbb{L}_{n1} \\ \mathbb{L}_{12} & \mathbb{L}_{22} & \dots & \mathbb{L}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{L}_{1n} & \mathbb{L}_{2n} & \dots & \mathbb{L}_{nn} \end{pmatrix}, (R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{21} & \dots & \mathbb{R}_{n1} \\ \mathbb{R}_{12} & \mathbb{R}_{22} & \dots & \mathbb{R}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{R}_{1n} & \mathbb{R}_{2n} & \dots & \mathbb{R}_{nn} \end{pmatrix}$$

при этом $\mathbb{L}_{ij} = \boldsymbol{cdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)$ *и* $\mathbb{R}_{ij} = \boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{i.}\left(\mathbf{a}^*_{j.}\right)$ *для всех* $i, j = \overline{1, n}$.

В теореме 3.6.1 предлагается классический метод детерминантного представления обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ для произвольной $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, двойной определитель которой $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, через матрицу, которая является аналогом классической присоединённой. То есть, ее классическую присоединённую можно представить, как матрицу, элементы которой являются левыми двойными алгебраическими дополнениями $\left(\mathbb{L}_{ij}\right)_{n \times n}$, или правыми двойными алгебраическими дополнениями

$\left(\mathbb{R}_{ij}\right)_{n\times n}$ матрицы $\mathbf{A}$. Обозначим ее $\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]$, тогда в теле $\boldsymbol{S}$ выполняется формула: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}$.

Теорема 3.6.2. *Пусть* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n,S)}$ *и тело* $\boldsymbol{S}$ *есть композиционной ассоциативной нерасщепляемой алгеброй над максимальным упорядоченным полем* $\boldsymbol{F}$ *, тогда выполняются равенства:*

i) $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^{-1} = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{-1}$*; ii)* $\boldsymbol{ddet}\left(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]\right) = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{n-1}$.

В седьмом подразделе решения правой и левой систем линейных уравнений над телом находятся за формулами, которые обобщают правило Крамера.

В первом пункте этого подраздела рассматривается правая система линейных уравнений $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}$ над телом $\boldsymbol{S}$ с матрицей коэффициентов $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n,S)}$, столбцом свободных элементов $\mathbf{y} = \left(y_1,\ldots,y_n\right)^T$ и столбцом неизвестных $\mathbf{x} = \left(x_1,\ldots,x_n\right)^T$.

Теорема 3.7.2. *Если двойной определитель основной матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n,S)}$ *правой системы линейных уравнений над телом* $\boldsymbol{S}$ *не равняется нулю,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*, тогда система имеет и при этом единственное решение, которое задается формулой для всех* $j = \overline{1,n}$*:*

$$x_j = \frac{\boldsymbol{cdet}_j\,(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{f}\right)}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}},$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$ *- вектор-столбец.*

Во втором пункте этого подраздела рассматривается левая система линейных уравнений $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{y}$ над телом $\boldsymbol{S}$ с матрицей коэффициентов $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n,S)}$, строкой свободных элементов $\mathbf{y} = \left(y_1,\ldots,y_n\right)$ и строкой неизвестных $\mathbf{x} = \left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

Теорема **3.7.4**. *Если двойной определитель основной матрицы* $\mathbf{A}$ *левой системы линейных уравнений над телом* $\boldsymbol{S}$ *не равняется нулю,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*, тогда система имеет и при этом единственное решение, которое задается формулой для всех* $i = \overline{1,n}$*:*

$$x_i = \frac{\boldsymbol{rdet}_i\,(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.}\left(\mathbf{z}\right)}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}},$$

где $\mathbf{z} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{A}^*$ *- вектор-строка.*

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена введению и разработке теории новых матричных функционалов, - столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом с инволюцией, с целью получение детерминантного представления обратной матрицы через аналог классической присоединенной, и, как следствие, обобщение правила Крамера для правых и левых систем линейных уравнений над телом с инволюцией. В диссертационной работе получены следующие новые результаты.

1) Введены новые понятия столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом с инволюцией, которое есть ассоциативной композиционной алгеброй с делением над своим центром – полем нулевой характеристики. На основе исследованных свойств этих определителей показано, что для произвольных квадратных матриц над телом с инволюцией они являются полным и естественным обобщением определителя Мура, который рассматривался только в классе эрмитовых матриц.

2) В рамках теории столбцовых и строчных определителей введены определитель эрмитовой матрицы и двойной определитель произвольной квадратной матрицы над данным телом. Двойной определитель представлен как определитель, который удовлетворяет как аксиомы некоммутативного определителя, так и, посредством столбцовых и строчных определителей, свойство разложения Лапласа по любому столбцу или строке матрицы над телом, которое есть кватернионовой алгеброй с делением над своим центром – полем нулевой характеристики.

3) Установлен критерий обратимости произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией в терминах теории столбцовых и строчных определителей. Получено детерминантное представление обратной матрицы над телом с инволюцией через аналог классической присоединенной.

4) Получены обобщения правила Крамера для правых и левых систем линейных уравнений над телом с инволюцией.

Работа имеет теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях в теории матриц с некоммутирующими элементами.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ЗА ТЕМОЙ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кирчей И. И. Дробово-рациональная регуляризация системы линейных уравнений над телом кватернионов // Мат. методы и физико-механические поля. – 1996 - **39**, -№ 2. - С. 89-95.
2. Кирчей И. И. Классическая присоединенная матрица для эрмитовой над телом // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2001. – **44**, №3. – С. 33-48.
3. Кирчей И. И. Матрица, обратная к эрмитовой над телом // Вестник Львов. ун-та. Серия прикл. математика и информатика. – 2002. – Вип. 4. - С. 120-125.
4. Кирчей И. И. Аналог классической присоединенной матрицы над телом с инволюцией // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2003. – **46**, №4. – С.81-91.
5. Кирчей И.И. Правило Крамера над кватернионовой алгеброй с делением // Вестник Киевского университета. Серия физико-математические науки. - 2006. - №1. - С.28-34.

6. Кирчей И. И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // Фундамент. и прикл. математика – 2007. - **13:4**. – С. 67-94.

7. Кирчей И. И. О системах линейных уравнений в алгебре кватернионов // Тезиса докладов Межд. школе-семинару “Цепные дроби, их обобщение и применение”. – Львов, 18-25 сентября 1994. - С. 4.

8. Кирчей И. И. Обратная матрица над телом // Девятая межд. научная конференция им. ак. М.Кравчука. Материалы конференции. – Киев, 16-19 мая 2002. - С. 297.

9. Кирчей И. И. Аналог классической присоединенной матрицы над телом // Тезиса докладов Межд. школы-семинара “Цепные дроби, их обобщение и применение”. – Ужгород, 19-24 августа 2002. - С. 36.

10. Кирчей И. И. Нормальное решение систем линейных уравнений над телом // Тезисы докладов третьей всеукраинской научной конференции “Нелинейные проблемы анализа”. - Ивано-Франковск, 9-12 сентября 2003. - С. 46.

11. Кирчей И. И. Правило Крамера над телом кватернионов // Десятая межд. научная конференция им. ак. М. Кравчука. Материалы конференции. – Киев, 13-16 мая 2004. - С. 302.

12. Кирчей И. И. Обобщенная обратная матрица над телом // Тезисы докладов Межд. конференции им. В. Я. Скоробагатька. – Дрогобыч, 27 сентября – 1 октября 2004. – С.92.

13. Kyrchei I.I. Generalization of Cramer's rule over a skew field // Тезисы докладов Межд. алгебраической конференции, посвящённой 250-летию Московского университета. – Москва, 26 мая–2 июня 2004. - С.226- 228.

14. Kyrchei I.I. The least square solution of system of linear equations over the quaternion skew field // Тезисы докладов Межд. алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина. - Екатеринбург, 29 августа – 3 сентября 2005. - С. 128-129.

15. Kyrchei I. Determinantal representation of the inverse matrix over the quaternion skew field // 5th International Algebraic Conference in Ukraine. Abstracts. - Odessa, 20-27 June 2005. - P. 120.

16. Кирчей И.И. Детерминантное представление обобщенной обратной Мура - Пенроуза // Одиннадцатая межд. научная конференция им. ак. М. Кравчука. Материалы конференции. – Киев, 18-20 мая 2006. - С. 452.

17. Kyrchei I. Determinantal representation of the Moore-Penrose inverse matrix over quaternion skew field // 6th International Algebraic Conference in Ukraine. Abstracts. - Kamyanets-Podilsky, 1-7 Jule 2007. – P. 120 – 121.

АННОТАЦИЯ

Кирчей И. И. *Теория столбцовых и строчных определителей и обратная матрица над телом с инволюцией.* – Рукопись.

Диссертация на получение научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. - Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2008.

В диссертационной работе разрабатывается теория новых матричных функционалов - столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом с инволюцией, которое является композиционной нерасщепляемой ассоциативной алгеброй над своим центром – полем нулевой характеристики. В рамках этой теории получено детерминантное представление обратной матрицы через аналог классической присоединенной матрицы, а также обобщение правила Крамера для систем линейных уравнений над телом с инволюцией. Диссертация состоит из введения, трёх разделов, выводов и списка использованных источников.

В первом разделе рассматриваются главные подходы, которые исторически сложились при определении некоммутативных определителей, т.е. определителей матриц с некоммутирующими элементами. При первом подходе некоммутативные определители определяются как образ матричного отображения, которое удовлетворяет определенным аксиомам. Примерами таких определителей являются, в частности, определители Стади и Дьёдонне. Другой способ определения некоммутативных определителей - рассматривать их как значение некоторых рациональных функции от элементов матрицы. Как пример такого определения рассматриваются квазидетерминанты Гельфанда-Ретаха. И, наконец, третий способ определения некоммутативных определителей - рассматривать их подобно коммутативному случаю как альтернированную сумму мономов от элементов матрицы, фиксируя дополнительно порядок элементов в этих мономах. Такой способ разрабатывали, в частности, А. Кели, Е. Г. Мур, Л. Чен. Поскольку, ни один из представленных некоммутативных определителей не удовлетворяет свойство разложения Лапласа по любой строке или столбцу матрицы, то и определить алгебраическое дополнение элемента матрицы, а отсюда, и получить аналитическое представление классической присоединенной матрицы над некоммутативным кольцом в рамках теории любого из определённых выше определителей, невозможно.

Во втором разделе показано, что основным телом, над которым рассматривается объект исследований, – алгебра матриц, есть тело с инволюцией, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над полем нулевой характеристики. Единственным примером некоммутативной ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгебры есть кватернионовая алгебра с делением. Вводятся новые понятия столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом, и исследуются их свойства. Показано, что каждый из них удовлетворяет свой-

ство разложения Лапласа по соответствующей строке или столбцу. Доказано, что столбцовые и строчные определители эрмитовой матрицы равны между собой и принимают свое значение в поле. Это значение, в силу его однозначности, определяется как определитель эрмитовой матрицы. Исследованы свойства определителя эрмитовой матрицы, в частности, вырожденность строчного (столбцового) определителя по строке (столбцу), которая заменяется левой (правой) линейной комбинацией других строк (столбцов) эрмитовой матрицы. Введено понятие унимодулярного подобия эрмитовых матриц над телом. Доказано, что любая эрмитовая матрица над телом с инволюцией унимодулярно подобна диагональной матрице, элементы которой принадлежат полю.

В третьем разделе вводятся понятия левой и правой соответствующих эрмитовых матриц для произвольной матрицы над телом с инволюцией. Исследованы свойства, которые устанавливают зависимость между произвольной матрицей над телом и определителями соответствующими ей эрмитовыми матрицами. Доказана теорема о равенстве определителей левой и правой соответствующих эрмитовых матриц для произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией, на основании которой вводится понятие двойного определителя квадратной матрицы над телом. Показано, что этот определитель корректно определён, поскольку удовлетворяет аксиомы некоммутативных определителей. Если основное тело является алгеброй над максимальным упорядоченным полем, то двойной определитель, как матричный функционал, является мультипликативным. Кроме того, посредством столбцовых и строчных определителей, он удовлетворяет свойство Лапласа разложения по любому столбцу или строке матрицы. Установлен критерий обратимости произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией, а именно, неравенство нулю ее двойного определителя. Получено детерминантное представление обратной матрицы через аналоги классической присоединенной, элементами которых являются соответствующие правые или левые двойные алгебраические дополнения. Решения правой и левой систем линейных уравнений над телом с инволюцией аналитически представлены формулами, которые обобщают правило Крамера.

Ключевые слова: тело с инволюцией, тело кватернионов, композиционная алгебра, некоммутативный определитель, обратная матрица, система линейных уравнений, правило Крамера.

ABSTRACT

Kyrchei I. I. *Theory of the column and row determinants and inverse matrix over a skew field with involution.* – Manuscript.

Dissertation for obtaining the Candidate degree of Physical and Mathematical Sciences by the speciality 01.01.06 – Algebra and Number Theory. – Kiev National Taras Shevchenko University, Kiev, 2008.

The column and row determinants of a square matrix are introduced over a skew field with involution. The skew field is a composition associative non-split algebra over its center - a field of zero characteristic. Such determinants can be expanded along a corresponding column for the column determinants and a corresponding row for the row determinants. The column and row determinants of a Hermitian matrix are equal and accept the value in the field. This value is defined as the determinant of a Hermitian matrix. The properties of the determinant of a Hermitian matrix are investigated. A double determinant of an arbitrary square matrix over a skew field is introduced. The double determinant is correctly defined as it satisfies the axioms of the noncommutative determinant. The double determinant can be expanded along an arbitrary row or column of a matrix by the column and row determinants of its corresponding left or right Hermitian matrices, respectively. The necessary and sufficient existence condition of the inverse matrix and its determinantal representation by analog of an adjoint matrix have been obtained. The solutions of the right and of the left systems of linear equations are represented by formulas, which generalize the Cramer rule.

Key words: skew field with involution, quaternion algebra, composition algebra, noncommutative determinant, inverse matrix, system of linear equations, Cramer rule.