ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КИРЧЕЙ Іван Ігорович

УДК 512.643

ДИСЕРТАЦІЯ

УЗАГАЛЬНЕНІ ОБЕРНЕНІ МАТРИЦІ НАД ТІЛОМ КВАТЕРНІОНІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

111 Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

І. Кирчей ____________ І. І. Кирчей

Науковий консультант
Григорчук Ростислав Іванович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Кирчей І. І. Узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів та їх застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 «Алгебра і теорія чисел». – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – Інститут математики НАН України, Київ, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів і, в першу чергу, побудові їх визначникових зображень, а також застосуванню отриманих визначникових зображень до покомпонентного розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Основна частина дисертації складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У *першому розділі* дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження, підґрунтя окреслених напрямків дослідження та вказано місце отриманих результатів у загальній теорії окреслених напрямків.

У *другому розділі* у рамках теорії стовпцево-рядкових некомутативних визначників, яка була розроблена здобувачем у кандидатській дисертації, одержано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$.

У першому підрозділі введено поняття узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза на основі сингулярного розкладу кватерніонової матриці, одержано граничне зображення матриці Мура-Пенроуза та доведено допоміжні леми про ранг деяких матриць та аналоги характеристичних многочленів. Ці леми та граничне зображення матриці Мура-Пенроуза сформували метод (який назвемо гранично-ранговим), за допомогою якого отримано визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}$ для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, індукованих нею проекторів $\mathbf{Q}_A = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}$ та $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}$, а також для її ермітово-спряженої матриці $\mathbf{A}^*$ та η-ермітово-спряженої $\mathbf{A}^{\eta*} := -\eta\mathbf{A}^*\eta$, де $\eta \in \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$. Використовую-

чи гранично-ранговий метод одержано нові визначникові зображення комплексної матриці Мура-Пенроуза, які є більш аплікабельними в порівнянні з раніше отриманими іншими авторами, зокрема Станіміровічем.

У другому підрозділі доведено теорему про зважений сингулярний розклад довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ з вагами $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$, що є додатноозначеними матрицями порядку m і n, на основі якого дано означення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$, а також її граничне зображення. Визначникове зображення зваженої Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ одержимо гранично-ранговим методом, коли матриця $\mathbf{A}^{\sharp} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}$ – ермітова, та використовуючи представлення $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^{\dagger}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$ у випадку, коли $\mathbf{A}^{\sharp}$ не є ермітова. Окремо, отримані нові визначникові зображення комплексної зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$.

У третьому підрозділі будуються визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Дразіна $\mathbf{A}^{d}$ для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, гранично-ранговим методом, коли $\mathbf{A}$ – ермітова, та використовуючи її представлення через матрицю Мура-Пенроуза, коли $\mathbf{A}$ не є ермітова. Також гранично-ранговим методом одержуються нові визначникові зображення комплексної матриці Дразіна.

У четвертому підрозділі одержано загальні алгебраїчні структури зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна $\mathbf{A}_{d,W}$ для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ з вагою $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, на основі яких отримані її визначникові зображення, інші визначникові зображення одержані з використанням визначникових зображень матриць Дразіна для матриць $\mathbf{V} = \mathbf{AW}$ і $\mathbf{U} = \mathbf{WA}$, та гранично-ранговим методом, коли матриці $\mathbf{V}$ або $\mathbf{U}$ – ермітові. В кінці кожного підрозділу наводяться приклади для демонстрації отриманих результатів.

У *третьому розділі* вивчаються кватерніонові серцевинні обернені матриці та їх узагальнення. Поняття серцевинної оберненої комплексної матриці було введене Баксаларі та Тренклером у 2010 році, зокрема вони отримали її визначникове зображення. У публікаціях, представлених здобувачем, кватерніонові серцевинні обернені матриці та їх узагальнення були розглянуті вперше.

У першому підрозділі для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ з $\operatorname{Ind}\mathbf{A} \leq 1$ розглядаються її права серцевинна $\mathbf{A}^{\oplus}$, що визначається умовами $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\oplus} = \mathbf{P}_A$, $\mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{\oplus}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A})$, та її ліва серцевинна $\mathbf{A}_{\oplus}$ з умовами $\mathbf{A}_{\oplus}\mathbf{A} = \mathbf{Q}_A$, та $\mathcal{R}_l(\mathbf{A}_{\oplus}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A})$, де $\mathcal{C}_r(\mathbf{A})$ і $\mathcal{R}_l(\mathbf{A})$ позначають, відповідно, правий стовпцевий та лівий рядковий простори матриці $\mathbf{A}$. Установлені їх представлення через групову обернену та матрицю Мура-Пенроуза, на основі яких отримані визначникові зображення.

У другому підрозділі вивчаються кватерніонові узагальнення *EP*-серцевинної оберненої, яка для комплексних матриць була введена Прасадом та Мохана у 2014 році. Для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ маємо праву *EP*-серцевинну обернену $\mathbf{A}^{\oplus}$ таку, що $\mathbf{A}^{\oplus}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\oplus} = \mathbf{A}$, і $\mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{\oplus}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{\oplus *}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^d)$, та ліву *EP*-серцевинну обернену $\mathbf{A}_{\oplus}$ з умовами $\mathbf{A}_{\oplus}\mathbf{A}\mathbf{A}_{\oplus} = \mathbf{A}$, $\mathcal{R}_l(\mathbf{A}_{\oplus}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A}_{\oplus}{}^*) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^d)$. При цьому *EP*-матриці, це матриці які мають одинакові проектори (equivalent projectors). Установлені представлення *EP*-серцевинних обернених через матриці Мура-Пенроуза і Дразіна та побудовані їх визначникові зображення.

У подальших підрозділах, цього розділу впроваджені поняття, досліджені властивості та одержані визначникові зображення таких кватерніонових узагальнень серцевинної оберненої матриці, як зважені *EP*-серцевинні, а також *MPD*-, *DMP*- та *CMP*-обернені матриці та їх зважені. В останньому підрозділі отримані результати проходять перевірку прикладами.

Узагальнені обернені є важливим і ефективним інструментом розв'язання матричних рівнянь. *Четвертий розділ* присвячений розв'язку кватерніонових узагальнених матричних рівнянь типу Сильвестра та їх систем. Визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза отримані у другому розділі виражаються через аналог класичної приєднаної матриці, тому розв'язки матричних рівнянь можна отримати покомпонентно аналогічно правилу Крамера. Використовуючи визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза, спочатку побудовано правило Крамера для розв'язків та нормальних (найменших квадратів) розв'язків двостороннього рівняння, $\mathbf{AXB} = \mathbf{D}$, та його часткових випадків, коли $\mathbf{A}$ або $\mathbf{B}$ є одиничними, а на їх основі одержано правила Крамера для узагальненого матричного рівняння Сильвестра, $\mathbf{AXB}+\mathbf{CYD} = \mathbf{E}$, та його часткових випадків, коли один чи обидва доданки рівняння є односторонніми. Також отримані визначникові зображення загальних, ермітових та η-ермітових розв'язків рівняння Сильвестра із $*$-ермітовістю та η-ермітовістю.

У третьому підрозділі будуємо визначникові зображення розв'язків системи

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2, \end{cases}$$

та її часткових випадків. Також знайдені визначникові зображення загальних, ермітових та η-ермітових розв'язків системи із $*$-ермітовістю та η-ермітовістю. Кожен із підрозділів завершується прикладами.

У першому підрозділі *п'ятого розділу* розглядаються визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d$, двостороннього рівняння, (що є його розв'язком при певних обмеженнях), а також розв'язків диференціальних матричних рівнянь $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$ та $\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{B}$, коли $\mathbf{A}$ не є оборотна.

У другому підрозділі отримано визначникові зображення зваженого Мура-Пенроуза оберненого розв'язку, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\dagger_{M,N}\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger_{P,Q}$, двостороннього матричного рівняння, що є його розв'язком з відповідними обмеженнями.

У третьому підрозділі одержано правило Крамера для $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}_1}\mathbf{D}\mathbf{B}_{d,\mathbf{W}_2}$ – розв'язку матричного рівняння $\mathbf{W}_1\mathbf{A}\mathbf{W}_1\mathbf{X}\mathbf{W}_2\mathbf{B}\mathbf{W}_2 = \mathbf{D}$ з певними встановленими обмеженнями та його часткових випадків.

У четвертому підрозділі показано, що $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\oplus}\mathbf{C}\mathbf{B}_{\oplus}$ є розв'язком задачі кватерніонно-матричної мінімізації:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} - \mathbf{C}\|_F = \min, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{B}^{k_2}),$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ з $k_1 = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$, $k_2 = \operatorname{Ind}\mathbf{B}$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k_1} = r_1$ і $\operatorname{rank}\mathbf{B}^{k_2} = r_2$, та одержано визначникове зображення розв'язку.

Ключові слова: тіло кватерніонів, некомутативний визначник, узагальнена обернена матриця, матриця Мура - Пенроуза, матриця Дразіна, серцевинна обернена, правило Крамера, нормальний розв'язок, узагальнене матричне рівняння Сильвестра, система матричних рівнянь, диференціальне матричне рівняння.

ABSTRACT

Kyrchei I.I. Generalized inverse matrices over the quaternion skew field and their applications. — Qualifying work on the right of the manuscript.

Thesis for the doctor of mathematical and physical sciences degree in the specialty 01.01.06 – Algebra and Number Theory. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of generalized inverse matrices over the quaternion skew field and, first of all, to the construction of their determinantal representations, as well as to the applications of the obtained determinantal representations of componentwise solutions to quaternion matrix equations.

The main part of the thesis consists of an introduction, five chapters, conclusions, list of references, and appendix.

The *first chapter* of the thesis presents the review of the literature on the subject of research is outlined, the background of the outlined areas of research and indicated on the place obtained by the applicant results in the general theory.

In the *second chapter*, within the framework of the theory of column and row noncommutative determinants that was developed by the applicant in his Ph.D. thesis, determinantal representations of the Moore-Penrose and Drazin generalized inverses, and their weighted generalized inverses are obtained over the quaternion skew field $\mathbb{H}$.

In the first section, it is introduced the notion of a generalized inverse Moore-Penrose matrix based on the singular value decomposition of a quaternion matrix. The limit representation of the Moore-Penrose inverse is given, and auxiliary lemmas about ranks of some matrices and analogs of the characteristic polynomial are proved. These lemmas and the limit representation of the Moore-Penrose inverse form the method (it is called the limit-rank method), by which the determinantal representations of the Moore-Penrose inverse $\mathbf{A}^{\dagger}$ of $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, its hermitian-conjugated $\mathbf{A}^{*}$, and η-hermitian-conjugated $\mathbf{A}^{\eta *} := -\eta\mathbf{A}^{*}\eta$, where $\eta \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ are

obtained. Using the limit-rank method, new determinantal representations of the complex Moore-Penrose inverse are obtained, that are more applicable in comparison with previously obtained by other authors, in particular Stanimirović.

In the second section, it is proved the theorem on the weighted singular value decomposition of $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ with weights $\mathbf{M}$ and $\mathbf{N}$ that are positive-definite matrices of order m and n. Using this theorem, the weighted Moore-Penrose inverse $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ is introduced and its determinantal representations are obtained.

In the third section, determinantal representations of the Drazin inverse $\mathbf{A}^{d}$ of $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ are obtained by the corresponding limit-rank method, when $\mathbf{A}$ is Hermitian, and by using its representation through the Moore-Penrose inverse, when $\mathbf{A}$ is not Hermitian. Also, new determinantal representations of the complex Drazin inverse are derived by the limit-rank method as well.

In the fourth section, we give general algebraic structures of the weighted Drazin inverse $\mathbf{A}_{d,W}$ for $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ with respect to $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$. Using these general algebraic structures, determinantal representations of the weighted Drazin inverse are obtained. Other determinantal representations are derived by using the determinantal representations of the Drazin inverses of $\mathbf{V} = \mathbf{AW}$ and $\mathbf{U} = \mathbf{WA}$, and by the limit-rank method when $\mathbf{V}$ or $\mathbf{U}$ is Hermitian. At the end of each sections, examples are given to demonstrate the obtained results.

The core inverse and its generalizations for quaternion matrices are studied in the *third chapter*. The concept of a core inverse for a complex matrix was introduced by Baksalari and Trenkler in 2010. In particular, they give its determinantal representation. For the first time, the quaternion core inverses and their generalizations were considered by the applicant. In the first section, for an arbitrary $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ with $\operatorname{Ind}\mathbf{A} \leq 1$, it is introduced its right core $\mathbf{A}^{\textcircled{\#}}$ that is determined by the equations $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\textcircled{\#}} = \mathbf{P}_A$, $\mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{\textcircled{\#}}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A})$, and its left core $\mathbf{A}_{\textcircled{\#}}$ with the conditions $\mathbf{A}_{\textcircled{\#}}\mathbf{A} = \mathbf{Q}_A$, and $\mathcal{R}_l(\mathbf{A}_{\textcircled{\#}}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A})$, where $\mathcal{C}_r(\mathbf{A})$ and $\mathcal{R}_l(\mathbf{A})$ denote, respectively, the right column and left row spaces of the matrix $\mathbf{A}$.

In the second section, the quaternion generalizations of the *EP*-core inverse are examined that was introduced for complex matrices by Prasad and Mohan in 2014. For $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, we have its right *EP*-core inverse $\mathbf{A}^{\oplus}$, i.e. $\mathbf{A}^{\oplus}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\oplus} = \mathbf{A}$, and $\mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{\oplus}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{\oplus *}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^d)$, and its left *EP*-core inverse $\mathbf{A}_{\oplus}$ that is $\mathbf{A}_{\oplus}\mathbf{A}\mathbf{A}_{\oplus} = \mathbf{A}$, $\mathcal{R}_l(\mathbf{A}_{\oplus}) = \mathcal{R}_l({\mathbf{A}_{\oplus}}^*) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^d)$. *EP*-matrices are such that have identical projectors. Representations of the *EP*-core inverses by using the Moore-Penrose inverse and the Drazin inverse are established, and their determinantal representation are constructed.

In the following sections, other quaternion generalizations of the core inverses are introduced, namely the weighted *EP*-core inverses, *MPD*-, *DMP*- and *CMP*-inverses, and their weighted. Their properties are investigated, and their determinantal representations are obtained. In the last section, the results are verified by examples.

Generalized inverses are important and effective tools in solving matrix equations. *The fourth chapter* is devoted to solving quaternion generalized Sylvester-type matrix equations and their systems. The determinantal representations of the Moore-Penrose inverse obtained in the second chapter are expressed through an analog of the classical adjoint matrix, so solutions of matrix equations can be derived similarly to Cramer's rule. Using the determinantal representations of the Moore-Penrose inverse, Cramer's rules are constructed for solutions and least squares solutions to a two-sided quaternion matrix equation, $\mathbf{AXB} = \mathbf{D}$, and its partial cases, when $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ and $\mathbf{B} = \mathbf{I}$. On their basis, we give Cramer's rules for the quaternion generalized Sylvester matrix equation

$$\mathbf{AXB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}.$$

and its partial cases when one or both terms of the equation are one-sided. Determinantal representations of the general, Hermitian, and η-hermitian solutions to the generalized Sylvester matrix equation with $*$-hermicity and η–hermicity are also obtained.

In the third section, we construct determinantal representations of the solutions to the system

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2, \end{cases}$$

and its partial cases. Determinantal representations of the general, Hermitian, and η-hermitian solutions to to the system are also obtained.

In the first section of *the fifth chapter* determinantal representations of the Drazin inverse solution, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d$, to the two-sided quaternion restricted matrix equation are considered. We also give determinantal representations of solutions to the differential matrix equations $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$ and $\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{B}$ with singular $\mathbf{A}$.

In the second section, determinantal representations of the weighted Moore-Penrose inverse solution, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}_{P,Q}$, to some two-sided quaternion restricted matrix equation are derived.

In the third section, Cramer's rules for the weighted Drazin inverse solution, $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}_1}\mathbf{D}\mathbf{B}_{d,\mathbf{W}_2}$, to the restricted equation $\mathbf{W}_1\mathbf{A}\mathbf{W}_1\mathbf{X}\mathbf{W}_2\mathbf{B}\mathbf{W}_2 = \mathbf{D}$ and its partial cases are derived.

In the forth section, it is demonstrated that $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\oplus}\mathbf{C}\mathbf{B}_{\oplus}$ is the solution of matrix minimization problem:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} - \mathbf{C}\| = \min, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \ \ \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{B}^{k_2}),$$

where $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ with $k_1 = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$, $k_2 = \operatorname{Ind}\mathbf{B}$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k_1} = r_1$ and $\operatorname{rank}\mathbf{B}^{k_2} = r_2$. Determinantal representations of the solution are given.

Keywords: quaternion skew field, noncommutative determinant, generalized inverse matrix, Moore-Penrose inverse, Drazin inverse, core inverse, Cramer's rule, least squares solution, generalized Sylvester matrix equation, system of matrix equations, differential matrix equation.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати

1. Kyrchei, I.I., Mosić, D., Stanimirović, P.S.: Solvability of new constrained quaternion matrix approximation problems based on core-EP inverses, Adv. Appl. Clifford Algebras **31**:3 (2021)
2. Kyrchei, I.I.: Weighted quaternion core-EP, DMP, MPD, and CMP inverses and their determinantal representations. RACSAM **114**:198 (2020)
3. Rehman, A., Kyrchei, I.I., Ali, I., Akram, M., Shakoor, A.: Explicit formulas and determinantal representation for η-skew-Hermitian solution to a system of quaternion matrix equations. Filomat **34**(8), 2601-2627 (2020)
4. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the weighted core-EP, DMP, MPD, and CMP inverses. J. Math. **2020**:9816038 (2020)
5. Kyrchei, I.I.: Cramer's Rules for Sylvester-type matrix equations. In: Kyrchei,I.I. (ed.) Hot Topics in Linear Algebra, pp. 138-162. Nova Sci. Publ., New York (2020)
6. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions to systems of two-sided quaternion matrix equations. Linear Multilinear Algebra (2019).

   doi:10.1080/03081087.2019.1614517
7. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of general and (skew-)Hermitian solutions to the generalized Sylvester-type quaternion matrix equation. Abstr. Appl. Anal. **2019**:5926832 (2019)
8. Kyrchei, I.I.: Cramer's Rules of η-(skew-)Hermitian solutions to the quaternion Sylvester-type matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**(3):56 (2019)
9. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the core inverse and its generalizations with applications, J. Math. **2019**:1631979 (2019)

10. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the quaternion core inverse and its generalizations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**(5):104 (2019)

11. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the core inverse and its generalizations, In: Functional Calculus. IntechOpen, London (2019). doi:10.5772/intechopen.89341

12. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for the system of quaternion matrix equations with η-Hermicity. 4open **2**:24 (2019)

13. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for Sylvester quaternion matrix equation and its special cases. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**(5):90 (2018)

14. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions to systems of quaternion matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**(1):23 (2018)

15. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions and Hermitian solutions to some system of two-sided quaternion matrix equations. J. Math. **2018**:6294672 (2018). doi:10.1155/2018/6294672

16. Kyrchei, I.I.: Explicit determinantal representation formulas for the solution of the two-sided restricted quaternionic matrix equation. J. Appl. Math. Comput. **58**(1-2), 335-365 (2018)

17. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for the system of two-sided matrix equations and of its special cases. In: Yasser, H.A.(ed.) Matrix Theory-Applications and Theorems, pp. 3-20. IntechOpen, London (2018)

18. Kyrchei, I.I.: Weighted singular value decomposition and determinantal representations of the quaternion weighted Moore–Penrose inverse. Appl. Math. Comput. **309**, 1-16 (2017)

19. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for some Hermitian coquaternionic matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **27**(3), 2509–2529 (2017)

20. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the quaternion weighted Moore-Penrose inverse and its applications, In: Baswell, A.R.(ed.) Advances in Mathematics Research **23**, pp. 35-96. Nova Sci. Publ., New York (2017)

21. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin and W-weighted Drazin inverses over the quaternion skew field with applications. In: Griffin, S.(ed.) Quaternions: Theory and Applications, pp.201-275. Nova Sci. Publ., New York (2017)

22. Kyrchei, I.I.: Explicit determinantal representation formulas of W-weighted Drazin inverse solutions of some matrix equations over the quaternion skew field. Math. Probl. Eng. **2016**:8673809 (2016)

23. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field. Appl. Math. Comput. **264**(1), 453-465 (2015)

24. Kyrchei, I.I.: The column and row immanants of matrices over a split quaternion algebra. Adv. Appl. Clifford Algebras **25**(3), 611-619 (2015)

25. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for generalized inverse solutions. In: Kyrchei, I.I. (ed.) Advances in Linear Algebra Research, pp. 79-132. Nova Sci. Publ., New York (2015)

26. Kleyn, A., Kyrchei, I.I.: Relation of row-column determinants with quasideterminants of matrices over a quaternion algebra. In: Kyrchei, I.I.(ed.) Advances in Linear Algebra Research, pp. 299-324. Nova Sci. Publ., New York (2015)

27. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin inverse over the quaternion skew field with applications to some matrix equations. Appl. Math. Comput. **238**, 193–207 (2014)

28. Kyrchei, I.I.: Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solutions of some matrix and differential matrix equations. Appl. Math. Comput. **219**, 7632-7644 (2013)

29. Kyrchei, I.I.: Explicit representation formulas for the minimum norm least squares solutions of some quaternion matrix equations. Linear Algebra Appl. **438**(1), 136-152 (2013)

30. Kyrchei, I.I.: Analogs of Cramer's rule for the minimum norm least squares solutions of some matrix equations. Appl. Math. Comput. **218**, 6375-6384 (2012)

31. Kyrchei, I.I.: The theory of the column and row determinants in a quaternion linear algebra. In: Baswell, A.R.(ed.) Advances in Mathematics Research **15**, pp. 301-359. Nova Sci. Publ., New York (2012)

32. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules. Linear Multilinear Algebra **59**(4), 413-431 (2011)

33. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for some quaternion matrix equations. Appl. Math. Comput. **217**(5), 2024-2030 (2010)

34. Kyrchei, I.I.: Analogs of the adjoint matrix for generalized inverses and corresponding Cramer rules. Linear Multilinear Algebra **56**(4), 453-469 (2008)

35. Кирчей, І.І.: Визначникові зображення розв'язку кватерніонового узагальненого матричного рівняння Сильвестра. Мат. методи та фіз.-мех. поля **60**(3), 97-106 (2017)

36. Кирчей, І.І.: Визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза над тілом кватерніонів, Мат. методи та фіз.-мех. поля **53**(3), 36-46 (2010)

37. Кирчей, І.І.: Зображення узагальненої оберненої Мура-Пенроуза через аналог приєднаної матриці. Мат. методи та фіз.-мех. поля **47**(4), 6-11 (2004)

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Kyrchei, I.I.: Quaternion core inverse and its generalizations. Abstracts of XI International Skorobohatko Mathematical Conference (2020, October 26-30, Lviv, Ukraine), P.58.

2. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for Sylvester-type quaternion matrix equations. Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (2019, July 02–06, Vinnytsia, Ukraine), P.63.

3. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for two-sided restricted quaternionic matrix equation.

Abstracts of 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko (2017, July 03-07, Kyiv, Ukraine), P.74.

4. Kyrchei, I.I.: Analogues of the adjugate matrix for the weighted Moore-Penrose inverse. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2015, 25-28 серпня, Дрогобич, Україна), С.92.
5. Kyrchei, I.I.: Determinantal representation of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field. Abstracts of X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (2015, August 20-27, Odessa, Ukraine), P.60.
6. Kyrchei, I.I.: Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solution of the quaternion matrix equation AXB=D. Abstracts of the 9th International Algebraic Conference in Ukraine (2013, July 8-13, Lviv, Ukraine), P.108.
7. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin inverse matrix over a quaternion skew field. Abstracts of International Conference on Algebra (ICA) dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov (2012, August 20-26, Kyiv, Ukraine), P.78.
8. Кирчей, І.І.: Явна формула для нормального розв'язку деякого матричного рівняння над тілом кватерніонів. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2011, 19-23 вересня, Дрогобич, Україна), С.92.
9. Kyrchei, I.I.: Explicit representation formulas for the least squares solutions of the quaternion matrix equation AXB=D. Abstracts of the 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 60th anniversary of Prof. V. M. Usenko (2011, July 5-12, Lugansk, Ukraine), P.171.
10. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для нормального розв'язку двостороннього матричного рівняння над тілом кватерніонів. Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2010, 13-15 травня, Київ, Україна), С.145.
11. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for some two-sided quaternionic matrix equations.

Abstracts of 7th International Algebraic Conference in Ukraine (2009, August 18-23, Kharkiv, Ukraine), P.82-83.

12. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для нормального розв'язку кватерніонових систем лінійних рівнянь. Матеріали XII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2008, 15-17 травня, Київ, Україна), С.646.

13. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для системи узагальнених нормальних. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2007, 24-28 вересня, Дрогобич, Україна), С.126.

14. Кирчей, І.І.: Визначникове зображення матриці Дразіна. Праці міжнародного симпозіуму"Питання оптимізації обчислень"(ПОО-XXXIII)(2007, 23–28 вересня, Ялта, Україна), С.121-122.

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено вивченню узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів і, в першу чергу, побудові їх визначникових зображень, а також застосуванню отриманих визначникових зображень до покомпонентного розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

З часу побудови Гамільтоном у 1843 році некомутативної чотиривимірної алгебри кватерніонів до сьогодення, кватерніони стали стали об'єктом вивчення багатьох частин математики, зокрема алгебри, геометричної алгебри і топології, аналізу та та інших, а також вони знаходять застосування у багатьох прикладних галузях, таких як обробка сигналів та кольорових зображень, теорія управління, квантова механіка та механіка обертання, інформатика, тощо. Наприклад, Біхан і Марс використовували сингулярний розклад кватерніонових матриць для обробки сигналів [14]. Тюк і Мандік проілюстрували застосування доповнювальної кватерніонової статистики в адаптивному фільтруванні [240, 241]. Джіа та ін. розглядали робастну кватерніонову матричну компенсацію та її застосування у відновленні зображень [83]. Кватерніонова лінійна алгебра викликає все більший інтерес з боку теоретичної фізики, переважно в контексті квантової механіки та теорії поля [1,43,55,84–86]. Зокрема, у фізичних наукових журналах розглядалося питання про розширення поняття визначника з комплексних до кватерніонових матриць [1, 41].

Хронологія робіт, в яких вводяться та вивчаються визначники матриць із некомутуючими елементами, їх ще називають некомутативними визначниками, розпочинаються ще від роботи Келі 1845 року, але продовжується й досі. Найбільш відомі некомутативні визначники Дьйодонне (1943 р.) і Стаді (1920 р.) були означені шляхом перетворення кватерніонової матриці в еквівалентну їй комплексну або дійсну матрицю, але при цьому можливість використати їх для визначникового зображення кватерніонової оберненої чи узагальненої оберненої матриці була втрачена. Хоча деякі інші раніше введені визначники матриць над тілом кватерніонів приймають значення у самому тілі (див., напр. [29, 30, 300, 301]), але вони є важко застосовними для визначникового зображення кватерніонової оберненої матриці.

У даній дисертаційній роботі використовуються стовпцеві і рядкові некомутативні визначники, теорія яких була розроблена здобувачем у кандидатській дисертації [303], де зокрема було отримане визначникове зображення оберненої матриці. У подальших дослідженнях, які є представлені у дисертаційній роботі, розвиток теорії стовпцевих і рядкових визначників продовжується до вивчення узагальнених обернених кватерніонових матриць.

Вперше, поняття псевдообернення увів Фредгольм у 1903 році для інтегральних операторів. Узагальнену обернену (псевдообернену) матрицю незалежно один від одного описали Мур у 1920 році [187], Б'єхаммар у 1951 році [16] та Пенроуз у 1955 році [192]. Пенроуз на основі сингулярного розкладу матриці виписав рівняння, як необхідні та достатні умови для визначення такої узагальненої оберненої матриці, єдиної для довільної матриці. Розглядалися різні представлення та способи побудови матриці Мура-Пенроуза, серед яких її сингулярний розклад, повнорангове представлення, граничне та визначникове зображення, отримано багато ітеративних методів її побудови (див. напр. [11,22,67,198,246]). Прямими методами знаходження матриці Мура-Пенроуза є її сингулярний розклад та визначникове зображення. На відміну від оберненої матриці, яка має однозначне визначникове зображення через алгебричні доповнення, для узагальнених обернених матриць, зокрема матриці Мура – Пенроуза, були побудовані різні визначникові зображення навіть для матриць над полем дійсних чи комплексних чисел внаслідок пошуку їхніх більш застосовних явних виразів (для матриці Мура – Пенроуза див., напр. [8, 10, 187, 233, 299]).

У подальших дослідженнях Прасад і Бапат [194] отримали зважену узагальнену обернену матрицю Мура-Пенроуза. Означення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза отримують, виходячи зі зваженого сингулярного розкладу (ЗСР) матриць. ЗСР для комплексних матриць було отримано

Лоаном [161], використовуючи розклад Холецького, та Галба [91] для дійсних матриць через зважені ортогональні та псевдоортогональні матриці. Визначникові зображення комплексної зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза були отримані Станіміровічем і Станковічем [234] через повноранговy факторизацію, Лю, Ю та ін. методом обчислення визначників [158] та Лю, Жу та ін. [159] через граничне зображення, використовуючи гранично-ранговий метод вперше запропонований здобувачем [101].

У 1958 році Дразін [48] дав означення нової узагальненої оберненої матриці для комплексної квадратної матриці. Як один із важливих типів узагальнених обернених матриць, матриця Дразіна та її застосування ґрунтовно вивчаються у науковій літературі (див., напр. [10, 22, 68, 96, 258, 285]). Зокрема, отримані представлення матриці Дразіна, використовуючи жорданову форму [11], її граничне зображення [175], на основі якого побудовані різного роду ітеративні методи її знаходження [151, 213, 260]. Станіміровіч і Джорджевіч [232] отримали повнорангове, а на його основі і визначникове зображення комплексної узагальненої оберненої матриці Дразіна.

Клайн і Гревілл [34] розширили поняття узагальненої оберненої комплексної матриці Дразіна з квадратних матриць до прямокутних. Властивості комплексної W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна досліджуються, зокрема, у роботах [34,183,261–263,281]. Наприклад, отримані загальні алгебричні структури W-зваженої матриці Дразіна [262,281]. Визначникові зображення комплексної W-зваженої матриці Дразіна, будуються через повноранговий розклад [158] та через граничне зображення [159].

У дисертаційній роботі отримані визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура – Пенроуза, Дразіна та їх зважених для матриць над тілом кватерніонів у рамках теорії некомутативних стовпцевих і рядкових визначників. Як наслідок, побудовані нові визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць Мура – Пенроуза, Дразіна та їх зважених на основі розробленого гранично-рангового методу.

Відмітимо, що в останні двадцять років, інтерес математиків розширився з вивчення комплексних узагальнених обернених матриць до кватерніонових [32, 253, 284]. Властивості узагальнених обернених в основному повністю узагальнюються на кватерніонові матриці, але побудову визначникових зображень кватерніонових узагальнених обернених матриць вдалося отримати тільки засобом рядково-стовпцевих визначників. Вперше це було зроблено у роботах, які представлені здобувачем у даній дисертаційній роботі, але й інші математики почали застосовувати апарат рядково-стовпцевих визначників для дослідження кватерніонових узагальнених обернених [157, 222–230].

Уведення Баксаларі та Тренклерем у 2010 році [6] поняття серцевинної оберненої для комплексних матриць викликало сплеск нової активності у розвитку теорії узагальнених обернених матриць. У наступні роки, були введені та досліджені такі її узагальнення, як *EP*-серцевинна обернена – Прасадом і Мохана [195] у 2014 р., *DMP*-обернена – Малик і Томе [171] у 2014 р., *CMP*-обернена – Мехдіпур і Салемі [173] у 2017 р., зважена *EP*-обернена – Ферейра та ін. [53] у 2018 р., зважена *DMP*-обернена – Менг [174] у 2017 р. і зважена *CMP*-обернена – Мосіч [182] у 2018 р. Досліджувалися зображення, властивості та застосування цих нових узагальнених обернених не тільки для комплексних матриць [162–166, 170, 196, 249–251], але і для операторів у гільбертовому просторі чи елементів кільця [39, 59, 180, 181, 184, 275, 276]. Були отримані, зокрема, визначникові зображення комплексної серцевинної оберненої [6] і *EP*-серцевинна оберненої [195]. Кватерніонові серцевинна обернена та її узагальнення вперше досліджувалися у роботах здобувача, результати яких представляються у дисертації, отримані їх визначникові зображення для матриць над тілом кватерніонів. Для комплексних матриць побудовані нові визначникові зображення.

Узагальнені обернені матриці є важливим інструментом розв'язку матричних рівнянь. У 1979 році, Баксаларі та Кала [5] дали необхідну і достатню умову розв'язності рівняння $\mathbf{AX} + \mathbf{YB} = \mathbf{C}$, та виразили його розв'язок у термінах узагальнених обернених матриць. Пізніше, вони встановили [6] необхідну та достатню умову сумісності та подали розв'язок у термінах узагальнених обернених матриць для двостороннього узагальненого матричного рівняння

Сильвестра

$$\mathbf{AXB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}. \tag{1}$$

Нормальні розв'язки (розв'язки у найменших квадратах) та деякі інші особливі розв'язки двостороннього матричного рівняння і рівнянь типу Сильвестра вивчалися, зокрема, у роботах [37, 72, 97, 150, 155, 160, 254, 286, 288–290].

За останні двадцять років інтерес до матричних рівнянь типу Сильвестра розширився до матриць над алгеброю кватерніонів [69–71, 77, 89, 154, 221, 277, 279, 292]. Наприклад, Родман розглядає стандартне кватерніонове матричне рівняння Сильвестра $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ [205]. Футорний та ін. представили критерії розв'язності Рота деяких кватерніонових матричних рівнянь типу Сильвестра [56]. Дмитришин та Кагстрем розглядають зв'язку матричних рівнянь типу Сильвестра та діагоналізацію блоків [45]. Ванг та ін. досліджували двостороннє узагальнене кватерніонове матричне рівняння Сильвестра, рівнянь типу Сильвестра, та їх систем і дали зображення їх розв'язків у термінах узагальнених обернених матриць [252, 253, 255, 257]. Багато робіт присвячено правилам Крамера для комплексних матричних рівнянь [63, 86, 87, 247, 248, 267], а також для кватерніонових рівнянь, визначникові зображення розв'язків у яких отримані в рамках теорії рядково-стовпцевих визначників. Це як роботи здобувача, так і інших авторів, зокрема [157, 223, 224, 227–230].

У дисертаційній роботі вперше одержано визначникове зображення розв'язку двостороннього кватерніонового матричного рівняння, а на його основі для розв'язку узагальненого кватерніонового матричного рівняння Сильвестра (1), усіх його часткових випадків, та особливих випадків рівняння Сильвестра з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю. Також отримані аналоги правила Крамера для системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь, усіх її часткових випадків, та особливих випадків для рівнянь з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю.

У деяких ситуаціях виникає потреба знаходження Дразіна оберненого розв'язку систем лінійних рівнянь та матричних рівнянь (див., напр. [66, 67, 176, 191, 214, 265]). Матрицю Дразіна також застосовують до розв'язку деяких сингулярних диференціальних матричних рівнянь [19, 24]. Для обчислення Дразіна оберненого розв'язку було розроблено багато різних методів [151, 177, 215, 216, 264, 286, 296], зокрема, у комплексному чи дійсному випадках, розглядалися різні підходи до побудови правила Крамера [88, 159, 247, 248].

Зважений Мура-Пенроуза розв'язок матричних рівнянь з деякими обмеженнями на стовпцевий простір та ядро невідомої матриці розглядається для комплексного випадку у роботах [152, 153] та для кватерніонових матричних рівнянь [222, 224], використовуючи апарат рядково-стовпцевих визначників.

W-зважені обернені розв'язки Дразіна виникають для деяких вироджених лінійних рівнянь та матричних рівнянь з певними обмеженнями на стовпцевий та нульовий простори невідомої матриці для комплексних матриць [261–263] і для кватерніонових [226].

Серцевинні обернені та їх узагальнення знаходять застосування у розв'язках деяких задач матричного наближення з обмеженнями [90, 251].

У дисертаційній роботі отримані правила Крамера для узагальнених обернених розв'язків Дразіна, зваженого Мура-Пенроуза, та зваженого Дразіна для двостороннього кватерніонового матричного рівняння з відповідними для кожного випадку обмеженнями на стовпцевий (рядковий) та нульовий простори невідомої матриці. Одержано визначникове зображення розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь. Як застосування визначникових зображень кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень, отримано визначникове зображення розв'язку деяких задач кватерніонно-матричної мінімізації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Робота виконувалась в рамках виконання держбюджетних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: "Алгебро-геометричні методи дослідження інваріантних структур на многовидах та релятивістських рівнянь математичної та теоретичної фізики" (номер державної реєстрації 01102U004819), "Розвиток методів дослідження структур на многовидах, асоційованих з групами, алгебрами і графами та розвиток геометричного аналізу стосовно релятивістських полів і часток" (номер державної реєстрації 01102U004819).

Мета та завдання дослідження. Основною тематикою дослідження є вивчення узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів та їх застосувань до розв'язку кватерніонових матричних та деяких диференціальних матричних рівнянь.

Метою дисертаційної роботи є побудова визначникових зображень кватерніонових узагальнених обернених матриць, засобом стовпцево-рядкових визначників та індукованих ними визначникових зображень узагальнено-обернених розв'язків кватерніонових матричних рівнянь та їх систем.

Об'єктом дослідження є узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів, кватерніонові матричні та диференціальні матричні рівняння та їх системи.

Предметом дослідження є алгебраїчні властивості стовпцевих і рядкових некомутативних визначників кватерніонових матриць, алгебра матриць над тілом кватерніонів.

Методи дослідження дисертаційної роботи є методи теорії некомутативних кілець та алгебр, теорії матриць над тілом.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані в роботі результати є новими і полягають у наступному.

1. Отримано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених для матриць над тілом кватерніонів, використовуючи раніше введені здобувачем стовпцеві і рядкові некомутативні визначники. Встановлені нові властивості стовпцевих і рядкових визначників, тим самим внесено значний вклад в розвиток їх теорії.
2. Доведено нові теореми з теорії матриць над тілом кватерніонів, зокрема, теореми про зважений сингулярний розклад матриці, про граничне зображення зваженої матриці Мура-Пенроуза, теорема про загальну алгебричну структуру зваженої матриці Дразіна, тощо.
3. Розроблено новий гранично-ранговий метод, який застосовується для по-

будови визначникового зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. Для кватерніонових узагальненої оберненої матриці Дразіна, зважених узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна цей метод застосовується в особливих випадках, пов'язаних з ермітовістю відповідних матриць.

4. За допомогою гранично-ранговий методу отримані нові визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених.

5. Поняття та властивості серцевинної оберненої матриці та її узагальнень розширено до кватерніонових матриць. Зокрема, доведені теореми про характеризацію лівої W-зваженої EP-серцевинної оберненої матриці, зваженої MPD-оберненої матриці, тощо.

6. Побудовані визначникові зображення кватерніонових правої та лівої серцевинних обернених, правої та лівої EP-серцевинних обернених, DMP- та MPD-обернених, CMP-оберненої, зважених правої та лівої EP-обернених, зважених DMP- та MPD-обернених і зваженої CMP-оберненої.

7. Новизна отриманих визначникових зображень серцевинної оберненої матриці та її узагальнень зберігається і у випадку їх побудови для комплексних матриць.

8. Побудовані аналоги правила Крамера для кватерніонових двостороннього матричного рівняння, узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливих випадків з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю. Отримані правила Крамера зберігають свою новизну як прямого методу знаходження розв'язку комплексного узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливого випадку з $*$-ермітовістю.

9. Одержані визначникові зображення загального розв'язку системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь та усіх його часткових випадків, а також загального, ермітового, η-(косо-)ермітового розв'язків системи з,

відповідно, $*$-ермітовістю чи η-ермітовістю.

10. Отримані визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з обмеженнями, а також розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь.
11. Побудовані визначникові зображення зваженого Мура-Пенроуза оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями, а також його часткових випадків.
12. Одержані визначникові зображення Дразіна зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями та його часткових випадків.
13. Як застосування визначникових зображень кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень, одержано розв'язки деяких задач кватерніонно-матричної мінімізації та побудовані правила Крамера для їх знаходження.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію некомутативних визначників, зокрема у теорію стовпцевих і рядкових визначників, у теорію матриць над тілом кватерніонів, у теорію узагальнених обернених матриць та їх застосувань. Результати роботи можуть бути використанні в теорії матричних рівнянь типу Сильвестра та їх систем, як над тілом кватерніонів, так і над полем комплексних (дійсних) чисел, в теорії кватерніонових диференціальних матричних рівнянь, у задачах кватерніонових матричних наближень та апроксимації.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержані здобувачем самостійно. У статтях, що опубліковано у співавторстві [99, 131, 201], до дисертації увійшли результати, що отримані здобувачем самостійно.

Апробація матеріалів дисертації.

Результати, наведені у даній дисертаційній роботі, доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях, семінарах, школах:

– Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Львів, Україна, 26-30 жовтня 2020 р.

– XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 215-й річниці з дня народження В. Буняковського, м.Вінниця, Україна, 02–06 липня, 2019 р.

– XI Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні присвячена 75-річчю В. В. Кириченка, м.Київ, Україна, 3-7 липня 2017 р.

– Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 25-28 серпня 2015 р.

– X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-й річниці з дня народження Ю. А. Дрозда, м.Одеса, Україна, 20-27 серпня, 2015 р.

– IX Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Львів, Україна, 8-13 липня, 2013 р.

– Міжнародна конференція з алгебри, присвячена 100-й річниці С.М. Чернікова, м.Київ, Україна, 23-27 червня, 2012 р.

– Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 19-23 жовтня 2011 р.

– VIII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Луганськ, Україна, 5-12 липня, 2011 р.

– VII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Харків, Україна, 18-23 серпня, 2009 р.

– XIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, м.Київ, Україна, 13-15 травня, 2010 р.

– XII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, м.Київ, Україна, 15-17 травня, 2008 р.

– Міжнародний симпозіум "Питання оптимізації обчислень"(ПОО-XXXIII), м. Ялта, Україна, 23–28 вересня, 2007 р.

– Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 24-28 жовтня 2007 р.

– Науковий семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 20 грудня, 2016 р.

– Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН Україна, 15 січня, 2019 р.

– Науковий семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 4 лютого, 2021 р.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 37 науковій роботі (див. список публікацій здобувача), внесених до переліку фахових видань з тонким–математичних наук, 30 з них [1-4,6-10,13-16,18-34] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз Scopus та Web of Science. Частково вони також висвітлені у матеріалах 19 міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, анотації, 5 розділів, розбитих на підрозділи і пункти, висновків, списку використаних джерел із 318 найменувань та додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 444 сторінок.

Зміст дисертації. Увступі дисертації обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, визначено мету і завдання, об'єкт, предмет і методи дослідження, вказано наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, апробацію матеріалів дисертації, описано структуру, обсяг та її основний зміст.

У **першому розділі** дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження, підґрунтя окреслених напрямків дослідження та вказано місце отриманих результатів у загальній теорії окреслених напрямків. У першому підрозділі розглядаються елементи лінійної алгебри та теорії матриць над тілом кватерніонів, які будуть необхідні для викладення основного матеріалу. Зокрема, розглядаються властивості стовпцевих і рядкових некомутативних визначників, теорія яких була досліджена здобувачем у кандидатській дисертації [303], і які застосовуються для побудови визначникових зображень узагальнених обернених кватерніонових матриць.

Нехай $\mathbb{H}^{n\times n}$ – множина $n\times n$-матриць над тілом кватерніонів

$$\mathbb{H}=\{a_0+a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}\mid \mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{ijk}=-1,a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\},$$

а $\mathbb{H}_r^{n\times n}$ позначає її підмножину матриць рангу r.

Нехай S_n – симетрична група на множині $I_n=\{1,\dots,n\}$.

Означення 1.6 *Рядковий визначник по i-му рядку* матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ для довільного $i\in I_n$ будемо визначати, поклавши

$$\mathrm{rdet}_i\mathbf{A}=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{n-r}\left(a_{i\,i_{k_1}}a_{i_{k_1}i_{k_1+1}}\dots a_{i_{k_1+l_1}i}\right)\dots\left(a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\dots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}\right),$$

$$\sigma=\left(i\,i_{k_1}i_{k_1+1}\dots i_{k_1+l_1}\right)\left(i_{k_2}i_{k_2+1}\dots i_{k_2+l_2}\right)\dots\left(i_{k_r}i_{k_r+1}\dots i_{k_r+l_r}\right),$$

де σ є перестановкою впорядкованою зліва. Це означає, що перший цикл зліва починається індексом i, інші цикли розпочинаються зліва з мінімального з усіх індексів, які містяться в ньому, $i_{k_t}<i_{k_t+s}$ для всіх $t=2,\dots,r$, $s=1,\dots,l_t$, а порядок неперервних циклів (крім першого) обумовлений строгим зростанням зліва направо їх перших елементів, $i_{k_2}<i_{k_3}<\dots<i_{k_r}$.

Означення 1.7 *Стовпцевий визначник по j-му стовпцю* матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ для довільного $j\in I_n$ будемо означати, поклавши

$$\mathrm{cdet}_j\mathbf{A}=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{n-r}(a_{j_{k_r}j_{k_r+l_r}}\dots a_{j_{k_r+1}j_{k_r}})\dots(a_{j\,j_{k_1+l_1}}\dots a_{j_{k_1+1}j_{k_1}}a_{j_{k_1}j}),$$

$$\tau=\left(j_{k_r+l_r}\dots j_{k_r+1}j_{k_r}\right)\dots\left(j_{k_2+l_2}\dots j_{k_2+1}j_{k_2}\right)\ \left(j_{k_1+l_1}\dots j_{k_1+1}j_{k_1}j\right),$$

де τ є право-впорядкована перестановка. Це означає, що перший цикл справа починається індексом j, інші цикли розпочинаються справа з мінімального з усіх цілих чисел, які містяться в ньому, $j_{k_t}<j_{k_t+s}$ для всіх $t=2,\dots,r$, $s=1,\dots,l_t$, а порядок неперервних циклів (крім першого) обумовлений строгим зростанням справа наліво їх перших елементів, $j_{k_2}<j_{k_3}<\dots<j_{k_r}$.

У загальному, стовпцеві та рядкові визначники довільної квадратної кватерніонової матриці не є рівними між собою, але коли $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ – ермітова, то $\mathrm{rdet}_1\mathbf{A} = \ldots = \mathrm{rdet}_n\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_1\mathbf{A} = \ldots = \mathrm{cdet}_n\mathbf{A} \in \mathbb{R}$. На основі чого вводиться поняття визначника ермітової матриці, $\det \mathbf{A} := \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A} = \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}$ для довільного $i = 1, \ldots, n$.

У другому підрозділі першого розділу розглядаються деякі раніше отримані факти з теорії узагальнених обернених матриць та їх застосувань.

Виклад основних результатів дисертації починається з **другого розділу**, у якому у рамках теорії стовпцево-рядкових некомутативних визначників одержано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$. У першому підрозділі введено поняття узагальненої оберненої матриці Мура- Пенроуза на основі сингулярного розкладу кватерніонової матриці.

Означення 2.1. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. Матриця $\mathbf{A}^{\dagger}$ називається її узагальненою оберненою матрицею Мура-Пенроуза, якщо вона задовольняє умови*

$$(1)\ \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{A},\ \ (2)\ \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger},\ \ (3)\ \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\right)^{*} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger},\quad (4)\ \left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\right)^{*} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}.$$

Доведена теорема про про граничне зображення матриці Мура-Пенроуза, леми про ранги матриць та стовпцево-рядкові аналоги характеристичного многочлена, які формують метод (назвемо його гранично-ранговим), на основі якого доведена теорема про визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза.

Теорема 2.2. *Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, тоді узагальнена обернена матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger} = \left(a^{\dagger}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ має визначникові зображення*

$$a^{\dagger}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{a}^*_{i\,.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\mathbf{a}^*_{.j}$ і $\mathbf{a}^*_{i.}$ – j-й стовпець та i-й рядок матриці $\mathbf{A}^*$.

Розглядаються визначникові зображення проективних матриць $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} =: \mathbf{Q}_A$ і $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} =: \mathbf{P}_A$, та матриць Мура-Пенроуза для деяких особливих матриць, а саме для ермітово-спряженої, η-ермітово-спряженої.

Нехай $\eta \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ і покладемо, і $\mathbf{A}^{\eta *} = -\eta\mathbf{A}^*\eta$.

Лема 2.13. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$ *і* $\mathbf{A}^{\eta*} = \left(a_{ij}^{\eta*}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *є її* η*-ермітово-спряжена матриця. Тоді матриця Мура-Пенроуза* $(\mathbf{A}^{\eta*})^{\dagger} = \left((a_{ij}^{\eta*})^{\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *має наступні визначникові зображення,*

$$(a_{ij}^{\eta*})^{\dagger} = -\,\eta \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in I_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\alpha}^{\alpha}} \eta =$$

$$= -\,\eta \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{.i}(\mathbf{a}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\beta}^{\beta}} \eta.$$

У пункті 2.1.4 будуються визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза для комплексних матриць, замінивши у відповідних визначникових зображеннях кватерніонових матриць стовпцеві і рядкові визначники звичайними визначниками. Отримані визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза для комплексних матриць є новими і більш застосовними, порівнюючи з раніше введеними.

У підрозділі 2.2 будуються визначникові зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. У пункті 2.2.1 введено поняття зваженої узагальненої оберненої матриці Мура- Пенроуза на основі зваженого сингулярного розкладу кватерніонової матриці. Доведена теорема.

Теорема 2.3. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, *та* $\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{N}$ *додатноозначені матриці порядку* m *і* n, *відповідно. Позначимо* $\mathbf{A}^{\sharp} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$. *Тоді існують матриці* $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *що задовольняють умови* $\mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I}_m$ *і* $\mathbf{V}^*\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$, *і такі, що* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^*$, *де* $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$ *і* σ_i^2 *- ненульові власні значення матриць* $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ *чи* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$, *які співпадають.*

Означення 2.3. *Для матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *зважена узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза з вагами* $\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{N}$ *(позначається як* $\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}$*) є єдина*

$\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, *що задовольняє рівняння:*

$$(1)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A};\ (2)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X};$$
$$(3M)\ (\mathbf{MAX})^* = \mathbf{MAX};\ (4N)\ (\mathbf{NXA})^* = \mathbf{NXA}.$$

Показано, що матриця $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ може бути представлена як

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^*\mathbf{M}. \tag{2}$$

Визначникові зображення матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ будуються у залежності від того, чи матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ обидві або одна з них є ермітовими, або не є ермітовими.

У випадку ермітових матриць $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ чи $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ будується гранично-ранговий метод, з допомогою якого маємо

Теорема 2.7. Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$. Якщо $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ або $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ є ермітовими, тоді $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \left(a^{\ddagger}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ має визначникові зображення

$$a^{\ddagger}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.})\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}\right|^{\alpha}_{\alpha}}.$$

У випадку неермітових матриць $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ чи $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ визначникові зображення матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ будуються, використовуючи представлення (2).

У підрозділі 2.3 будуються визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Дразіна.

Означення 2.4. *Нехай для* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}_r$ *з індексом* $k = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$

$$(2)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X};\ \ (5)\ \mathbf{AX} = \mathbf{XA};\ \ (6)\ \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{k}. \tag{3}$$

Тоді єдина матриця $\mathbf{X}$, *що задовольняє рівняння (2), (5) і (6) називається її узагальненою оберненою матрицею Дразіна і позначається як* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{d}$. *Якщо* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$, *то* $\mathbf{X}$ *– групова обернена,* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\#}$.

Для ермітової кватерніонової матриці визначникове зображення матриці Дразіна одержимо відповідним гранично-ранговим методом.

Теорема 2.10. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{n\times n}$ *– ермітова з індексом* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k = r$*, тоді* $\mathbf{A}^d = \left(a_{ij}^d\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *має визначникові зображення:*

$$a_{ij}^d = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_\beta^\beta} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^{k+1})_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^{(k)})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_\alpha^\alpha}.$$

Для визначникового зображення довільної кватерніонової матриці використовуємо представлення $\mathbf{A}^d = \mathbf{A}^k(\mathbf{A}^{2k+1})^\dagger\mathbf{A}^k$.

Теорема 2.11. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\,(n,\mathbb{H})$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k = r$*, тоді* $\mathbf{A}^d$ *має визначникові зображення*

$$a_{ij}^d = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,t}(\hat{\mathbf{a}}_{.\,j})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\mathbf{A}^{2k+1}\right|_\beta^\beta} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{s\,.}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_\alpha^\alpha\right)a_{sj}^{(k)}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha}.$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $(\mathbf{A}^{2k+1})^*\mathbf{A}^k =: \hat{\mathbf{A}}$ та $\check{\mathbf{a}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{A}^k(\mathbf{A}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{A}}$.

У підрозділі 2.4 розглядається зважена узагальнена обернена матриця Дразіна.

Означення 2.5. *Для* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$*, W-зважена обернена Дразіна до* $\mathbf{A}$ *з вагою* $\mathbf{W}$ *є единим розв'язком рівнянь,*

$$(\mathbf{AW})^{k+1}\mathbf{XW} = (\mathbf{AW})^k,\ \mathbf{XWAWX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AWX} = \mathbf{XWA},$$

де $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{AW}), \operatorname{Ind}(\mathbf{WA})\}$*. Позначаєтьcя як* $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}}$.

У випадках, коли $\mathbf{AW} = \mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ або $\mathbf{WA} = \mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовими матрицями, то можемо застосувати відповідний гранично-ранговий метод. Зокрема маємо теорему.

Теорема 2.18. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, *і* $\mathbf{AW} = \mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *є ермітовою з індексом* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$ *та* $\mathrm{rank}(\mathbf{AW})^{k+1} = \mathrm{rank}(\mathbf{AW})^{k} = r$, *тоді* $\mathbf{A}_{d,W} = \left(a_{ij}^{d,W}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *має визначникове зображення:*

$$a_{ij}^{d,W} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{AW}\right)^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}} \left|\left(\mathbf{AW}\right)^{k+2}\right|^{\beta}_{\beta}},$$

де $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\bar{\mathbf{V}}^{k} = (\mathbf{AW})^{k}\mathbf{A}$ *для всіх* $j = 1, \ldots, m$.

У випадку коли коли $\mathbf{V}$ та $\mathbf{U}$ не є ермітовими матрицями, то визначникові зображення будуються, використавши представлення

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} =& \left\{(\mathbf{AW})^{k}\left[(\mathbf{AW})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{k}\right\}\mathbf{W}^{\dagger} = \\ =&\mathbf{W}^{\dagger}\left\{(\mathbf{WA})^{k}\left[(\mathbf{WA})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{WA})^{k}\right\}.\end{aligned}$$

З того, що $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = \mathbf{A}\left((\mathbf{WA})^{d}\right)^{2} = \left((\mathbf{AW})^{d}\right)^{2}\mathbf{A}$ одержимо ще два нові визначникові зображення матриці $\mathbf{A}_{d,W}$.

Третій розділ присвячений веденню понять та дослідженню властивостей, зокрема визначниковому зображенню, кватерніонової серцевинної оберненої матриці та її узагальнень. У підрозділі 3.1 розглядаються кватерніонові серцевинні обернені матриці.

Означення 3.1 (3.2). *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається* ***правою (лівою) серцевинною оберненою*** *матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *якщо* $\mathbf{AX} = \mathbf{P}_{A}$, $\mathcal{C}_r(\mathbf{X}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A})$ *(*$\mathbf{XA} = \mathbf{Q}_{A}$, $\mathcal{R}_l(\mathbf{X}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A})$*). Коли така* $\mathbf{X}$ *існує, то позначається* $\mathbf{A}^{\oplus}$ $(\mathbf{A}_{\oplus})$.

Відомо, що серцевинні обернені матриці існують для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, якщо $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} \leq 1$. Маємо наступні представлення серцевинних обернених.

$$\mathbf{A}^{\oplus} = \mathbf{A}^{\#}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}, \quad \mathbf{A}_{\oplus} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\#}.$$

Використавши одержані у розділі 2 визначникові зображення групової оберненої та матриці Мура-Пенроуза, одержимо визначникові зображення серцевинних обернених. Зокрема, для правої серцевинної оберненої маємо.

Теорема 3.3. *Нехай* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} \leq 1$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^2 = \operatorname{rank}\mathbf{A} = s$. *Тоді визначникове зображення* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *має вираз*

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{u}}_{i.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|(\mathbf{A}^3\,(\mathbf{A}^3)^*)_{\alpha}^{\alpha}\right| \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ *є* i*-м рядком* $\widetilde{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$. *Тут* $\mathbf{U} = (u_{if}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є такою, що*

$$u_{if} = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_f \left(\left(\mathbf{A}^3\left(\mathbf{A}^3\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\check{\mathbf{A}} := \mathbf{A}(\mathbf{A}^3)^*$.

У підрозділі 3.2 розглядаються *EP*-серцевинні обернені матриці.

Означення 3.3(3.4). *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається* ***правою (лівою) EP-серцевинною оберненою*** *до матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *якщо вона задовольняє умови* $\mathbf{XAX} = \mathbf{A}$, $\mathcal{C}_r(\mathbf{X}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{X}^*) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^d)$ $(\mathcal{R}_l(\mathbf{X}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{X}^*) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^d))$. *Вона позначається як* $\mathbf{A}^{\oplus}$ *(*$\mathbf{A}_{\oplus}$*).*

З леми про характеризацію *EP*-серцевинних обернених слідує

Теорема 3.5. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^k = s$, *та існують права* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *та ліва* $\mathbf{A}_{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,l}\right)$ *EP-серцевинні обернені матриці. Тоді*

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^*\right)_{j.}(\hat{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\,(\mathbf{A}^{k+1})^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

$$a_{ij}^{\oplus,l} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^*\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\check{\mathbf{a}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left|(\mathbf{A}^{k+1})^*\,\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *–* i*-й рядок* $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^k(\mathbf{A}^{k+1})^*$ *та* $\check{\mathbf{a}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець* $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{k+1})^*\mathbf{A}^k$.

У підрозділі 3.2 розглядаються кватерніонові *DMP*- і *MPD*-обернені матриці.

Означення 3.5 (3.6). *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$. *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається* ***DMP-(MPD-)оберненою*** *до* $\mathbf{A}$, *якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\, \mathbf{XA} = \mathbf{A}^d\mathbf{A},\ \mathbf{A}^k\mathbf{X} = \mathbf{A}^k\mathbf{A}^{\dagger}$$

$$(\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\, \mathbf{AX} = \mathbf{A}\mathbf{A}^d,\ \mathbf{X}\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}^k).$$

Вона позначається як $\mathbf{A}^{d,\dagger}$ $(\mathbf{A}^{\dagger,d})$.

Лема 3.5 (3.6). *Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$*, її DMP-(MPD)-обернена завжди існує та є единою, при цьому* $\mathbf{A}^{d,\dagger} = \mathbf{A}^{d}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}$ $(\mathbf{A}^{\dagger,d} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{A}^{d})$.

Використавши одержані у розділі 2 визначникові зображення матриць Мура-Пенроуза та Дразіна, одержимо визначникові зображення *DMP*- і *MPD*-обернених. Зокрема, для DMP-оберненої маємо теорему.

Теорема 3.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}_{s}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^{k}) = s_1$*. Тоді її DMP-обернена* $\mathbf{A}^{d,\dagger} = \left(a_{ij}^{d,\dagger}\right)$ *має наступні визначникові зображення.*

(i) *Коли* $\mathbf{A}$ *є довільною матрицею, то*

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{u}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} \left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Тут $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$*, а матриця* $\mathbf{U} = (u_{if}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є така, що*

$$u_{if} = \sum_{\alpha\in I_{s_1,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\check{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{2k+1})^*$.

(ii) *Коли* $\mathbf{A}$ *– ермітова, то*

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{v}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|\mathbf{A}^2\right|_{\alpha}^{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\mathbf{w}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left|\mathbf{A}^2\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де

$$\mathbf{v}_{i.} = \left[\sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.f}^{(k+2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad f = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{w}_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{a}_{l.}^{(k+2)})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1,\ldots,n.$$

У підрозділах 3.4, 3.5, 3.6 та 3.7 розглядаються кватерніонові *CMP*-обернена, та зважені ліва та права *EP*-обернена, *DMP*- і *MPD*-обернені, а також *CMP*-обернена. Одержані теореми про їх характеризацію та визначникові ображення.

Узагальнені обернені є важливим і ефективним інструментом розв'язання матричних рівнянь. **Четвертий розділ** присвячений розв'язку кватерніонових узагальнених матричних рівнянь типу Сильвестра та їх систем. У підрозділі 4.2 розглядається узагальнене кватерніонове матричне рівняння Сильвестра

$$\mathbf{AXB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}. \tag{4}$$

Його частковий розв'язок може бути виражений як

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}, \tag{5}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger} + \mathbf{Q}_S\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}, \tag{6}$$

де $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{C} = (\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger})\mathbf{C}$, $\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L}_B = \mathbf{D}(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{B})$, $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{L}_M = \mathbf{C}(\mathbf{I}-\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{M})$.

Наступна теорема дає визначникове зображення розв'язку (5)-(6).

Теорема 4.14. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}_{r_2}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}_{r_3}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}_{r_4}$, $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_5$, $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_6$, $\operatorname{rank}\mathbf{S} = r_7$. *Тоді розв'язок (5)-(6),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, $\mathbf{Y} = (y_{gf}) \in \mathbb{H}^{p\times q}$ *покомпонентно* $x_{ij} = x^{(1)}_{ij} - x^{(2)}_{ij} - x^{(3)}_{ij}$, $y_{gf} = y^{(1)}_{gf} + y^{(2)}_{gf}$, *має наступні визначникові зображення.*

(i) *Для* $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{X}_1 = \left(x^{(1)}_{ij}\right)$,

$$x^{(1)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

$$\mathbf{d}^B_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{k.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad k = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{.l}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad l = 1,\ldots,r.$$

Тут $\mathbf{e}^{(1)}_{k.}$ *і* $\mathbf{e}^{(1)}_{.l}$ *є* k*-м рядком і* l*-м стовпцем матриці* $\mathbf{E}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{E}\mathbf{B}^*$.

(ii) *Для* $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{X}_2 = \left(x^{(2)}_{ij}\right)$,

$$x^{(2)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in I_{r_5,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ *-* i*-й рядок* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{\Phi}\mathbf{E}\mathbf{B}^*$*. Матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq})$ *є така, що*

$$\phi_{iq} = \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\boldsymbol{\varphi}^{M}_{.q}\right)\right)^{\beta}_{\beta} = \sum_{\alpha\in I_{r_5,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\boldsymbol{\varphi}^{A}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha},$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{M}_{.q} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_5,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q\,.} \left(\mathbf{c}^{(1)}_{f.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad f = 1,\ldots,n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{A}_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{c}^{(1)}_{.s}\right)\right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times m}, \quad s = 1,\ldots,m.$$

Тут $\mathbf{c}^{(1)}_{f\,.}$ *і* $\mathbf{c}^{(1)}_{.s}$ *є* f*-м рядком і* s*-м стовпцем* $\mathbf{C}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{M}^*$*.*

(iii) *Для* $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{N}^\dagger\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{X}_3 = \left(x^{(3)}_{ij}\right)$,

$$x^{(3)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in J_{r_6,s}} |\mathbf{N}^*\mathbf{N}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ *-* j*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$*. Матриця* $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{tj}) \in \mathbb{H}^{p\times n}$ *така, що*

$$\upsilon_{tj} = \sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t} \left(\widetilde{\mathbf{e}}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{e}}_{.j}$ *-* j*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\Psi$*, а* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{fj}) \in \mathbb{H}^{s\times n}$ *задається умовою*

$$\psi_{fj} = \sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{t\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\zeta^{N}_{f.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} = \sum_{\beta\in J_{r_6,s}\{f\}} \operatorname{cdet}_f \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f} \left(\zeta^{B}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta},$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{N}_{f.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_6,s}\{f\}} \operatorname{cdet}_f \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f} \left(\mathbf{d}^{(1)}_{.k}\right)\right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad k = 1,\ldots,r,$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{B}_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\mathbf{d}^{(1)}_{l.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{s\times 1}, \quad l = 1,\ldots,s,$$

та $\mathbf{d}^{(1)}_{.k}$ *і* $\mathbf{d}^{(1)}_{l.}$ *є* k*-м стовпцем і* l*-м рядком матриці* $\mathbf{D}_1 = \mathbf{N}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$*.*

(iv) *Для* $\mathbf{M}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{Y}_1 = \left(y^{(1)}_{gf}\right)$,

$$y^{(1)}_{gf} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.g} \left(\mathbf{d}^{D}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|^{\alpha}_{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f \left((\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.} \left(\mathbf{d}^{M}_{g.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

$$\mathbf{d}^D_{.f}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_4,q}\{f\}}\mathrm{rdet}_f\left((\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.}\left(\mathbf{e}^{(4)}_{k.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{p\times 1},\quad k=1,\ldots,p,$$

$$\mathbf{d}^M_{g.}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_5,p}\{g\}}\mathrm{cdet}_g\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.g}\left(\mathbf{e}^{(4)}_{.l}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times q},\quad l=1,\ldots,q.$$

Тут $\mathbf{e}^{(4)}_{k.}$ *і* $\mathbf{e}^{(4)}_{.l}$ *є* k*-м рядком і* l*-м стовпцем матриці* $\mathbf{E}_4:=\mathbf{M}^*\mathbf{E}\mathbf{D}^*$.

(v) *Для* $\mathbf{Q}_S\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}=\mathbf{Y}_2=\left(y^{(2)}_{gf}\right)$,

$$y^{(2)}_{gf}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,p}\{g\}}\mathrm{cdet}_g\left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.g}\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,p}}|\mathbf{S}^*\mathbf{S}|^{\beta}_{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,p}}|\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_6,q}}|\mathbf{N}\mathbf{N}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.f}$ *-* f*-й рядок* $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}:=\mathbf{S}^*\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}$. *Матриця* $\boldsymbol{\Omega}=(\omega_{tf})$ *така, що*

$$\omega_{tf}=\sum_{\alpha\in I_{r_6,q}\{f\}}\mathrm{rdet}_f\left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.}\left(\boldsymbol{\xi}^C_{t.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}=\sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}}\mathrm{cdet}_t\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}\left(\boldsymbol{\xi}^N_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta},$$

$$\boldsymbol{\xi}^C_{t.}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}}\mathrm{cdet}_t\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}\left(\mathbf{e}^{(5)}_{.k}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times q},\quad k=1,\ldots,q,$$

$$\boldsymbol{\xi}^N_{.f}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_6,q}\{f\}}\mathrm{rdet}_f\left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.}\left(\mathbf{e}^{(5)}_{l.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{s\times 1},\quad l=1,\ldots,p.$$

Тут $\mathbf{e}^{(5)}_{.k}$ *і* $\mathbf{e}^{(5)}_{l.}$ *є* k*-м стовпцем і* l*-м рядком матриці* $\mathbf{E}_5=\mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{N}^*$.

Також отримані визначникові зображення загальних, ермітових та η-ермітових розв'язків рівняння (4) із $*$-ермітовістю та η-ермітовістю. У третьому підрозділі будуємо визначникові зображення розв'язків системи

$$\begin{cases}\mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1=\mathbf{C}_1,\\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2=\mathbf{C}_2,\end{cases}\tag{7}$$

та її часткових випадків. Також знайдені визначникові зображення загальних, ермітових та η-ермітових розв'язків системи (7) із $*$-ермітовістю та η-ермітовістю.

У першому підрозділі **п'ятого розділу** розглядаються визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку двостороннього матричного рівняння

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{D}, \tag{8}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ задані матриці, і $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ – невідома. Нехай $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k_1$ і $\operatorname{Ind}\mathbf{B} = k_2$. Рівняння (5.1) з обмеженнями

$$\mathcal{R}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^{k_1}), \tag{9}$$

$$\mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_r(\mathbf{B}^{k_2}), \quad \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l(\mathbf{B}^{k_2}), \tag{10}$$

має єдиний розв'язок $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d$, де $\mathbf{A}^d$, $\mathbf{B}^d$ – узагальнені обернені матриці Дразіна.

Визначникове зображення розв'язку одержимо в залежності від того чи матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ є ермітовими, чи довільними. Зокрема, маємо.

Теорема 5.1. *Нехай матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *і* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *обидві є ермітовими, при цьому* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k_1+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k_1} = r_1 \le n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B}^{k_2+1} = \operatorname{rank}\mathbf{B}^{k_2} = r_2 \le m$. *Позначимо* $\mathbf{A}^{k_1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{k_2} =: \widetilde{\mathbf{D}} = (\widetilde{d}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$. *Тоді розв'язок* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *рівняння (8) з обмеженнями (9)-(10) має визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|_\alpha^\alpha} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_\beta^\beta\right| \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|_\alpha^\alpha},$$

$$\mathbf{d}^B_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}^{k_1+1}\right)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{l.}\right)\right)_\alpha^\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.t}\right)\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times m}, \quad t = 1,\ldots,m.$$

Тут $\widetilde{\mathbf{d}}_{i.}$ *і* $\widetilde{\mathbf{d}}_{.j}$ *–* i*-й рядок і* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{D}}$.

Узагальнену обернену матрицю Дразіна можна застосувати до розв'язку деяких кватерніонових сингулярних диференціальних матричних рівнянь. У підрозділі 5.1 розглядається наступне праве лінійне кватерніонове диференціальне матричне рівняння

$$\mathbf{X}^{'} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}, \tag{11}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, а матриці, $\mathbf{B}(t)$ і $\mathbf{X}(t)$, відповідно, кватерніоннозначні матричні функції з дійсною змінною. Маємо теорему.

Теорема 5.8. *Якщо матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ має індекс k, тоді*

$$\int e^{-\mathbf{A}t}\mathrm{d}t = -\,\mathbf{A}^{d}e^{-\mathbf{A}t} + \\ +(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^{d})t\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{2}t + \frac{\mathbf{A}^{2}}{3!}t^{2} + ... + \frac{(-1)^{k-1}\mathbf{A}^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right] + \mathbf{G}, \tag{12}$$

де $\mathbf{A}^{d}$ – узагальнена обернена матриця Дразіна.

Теорема 5.9. *Якщо матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ має індекс k і $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k} = r < n$, тоді частковий розв'язок рівняння (11), $\mathbf{X}(t) = (x_{ij}(t))$, має наступне визначникове зображення,*

(i) *коли матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – ермітова, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_{i}\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|} + \left(b_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_{i}\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k+1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right)t \\ -\frac{1}{2}\left(\widehat{b}^{(1)}_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_{i}\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k+2)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right)t^{2} + ... \\ \frac{(-1)^{k}}{k!}\left(\widehat{b}^{(k-1)}_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_{i}\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(2k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right)t^{k}$$

де $\mathbf{A}^{l}\mathbf{B} =: \widehat{\mathbf{B}}^{(l)} = \left(\widehat{b}^{(l)}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для всіх $l = 1, \ldots, 2k$;

(ii) *коли* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *- довільна, то*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} a_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{s\}} \mathrm{cdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s} \left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}^{(0)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right) {}_{\beta}^{\beta} \right|}$$

$$+ \left(b_{ij} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{s\}} \mathrm{cdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s} \left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}^{(1)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right) {}_{\beta}^{\beta} \right|} \right) t$$

$$- \frac{1}{2} \left(\widehat{b}_{ij}^{(1)} - \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{s\}} \mathrm{cdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s} \left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}^{(2)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right) {}_{\beta}^{\beta} \right|} \right) t^2 + \ldots$$

$$\frac{(-1)^k}{k!} \left(\widehat{b}_{ij}^{(k-1)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{s\}} \mathrm{cdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s} \left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}^{(k)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right) {}_{\beta}^{\beta} \right|} \right) t^k,$$

де $(\mathbf{A}^{2k+1})^*\mathbf{A}^{k+l}\mathbf{B} =: \widehat{\mathbf{D}}^{(l)} = (\widehat{d}_{ij}^{(l)}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *для всіх* $l = 0, \ldots, k$.

У підрозділі 5.2 розглядаються застосування зваженої оберненої матриці Мура-Пенроуза до розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Лема 5.4. [224] *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{r_2}^{p\times q}$, *а матриці* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ *і* $\mathbf{Q}$ *є додатноозначеними порядків* m, n, p *і* q, *відповідно. Позначимо* $\mathbf{A}^\sharp = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{B}^\sharp = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}$. *Якщо* $\mathbf{D} \subset \mathcal{C}_r\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp, \mathbf{B}^\sharp\mathbf{B}\right)$ *і* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_l\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)$ *для двостороннього рівняння (8) з обмеженнями*

$$\mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathbf{N}^{-1}\mathcal{C}_r(\mathbf{A}^*),\ \mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathbf{P}^{-1}\mathcal{N}_r(\mathbf{B}^*), \tag{13}$$

$$\mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^*)\mathbf{M},\ \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l(\mathbf{B}^*)\mathbf{Q} \tag{14}$$

тоді єдиним його розв'язком є $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{M,N}^\dagger\mathbf{D}\mathbf{B}_{P,Q}^\dagger$.

Розглядаються визначникові зображення розв'язку в залежності від того, чи матриці $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp$ є ермітовими та повноранговими. Зокрема, для ермітового випадку маємо.

Теорема 5.17. *Нехай* $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp$ *– ермітові. Позначимо* $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^\sharp\mathbf{D}\mathbf{B}^\sharp$. *Тоді розв'язок* $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp$ *має наступні визначникові зображення.*

(i) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|^\alpha_\alpha} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|^\alpha_\alpha},$$

$$\mathbf{d}^B_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{k.}\right)\right)^\alpha_\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

$$\mathbf{d}^A_{i.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.l}\right)\right)^\beta_\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}, \quad l = 1, \ldots, p. \tag{16}$$

Тут $\tilde{\mathbf{d}}_{k.}$ *і* $\tilde{\mathbf{d}}_{.l}$ *–* k*-й рядок і* l*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{D}}$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ і $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, тоді

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)} = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)},$$

$$\mathbf{d}^B_{.j} := \left[\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{k\,.}\right)\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

$$\mathbf{d}^A_{i.} := \left[\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})_{.\,i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.l}\right)\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}, \quad l = 1, \ldots, p. \tag{18}$$

(iii) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|^\alpha_\alpha} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|^\alpha_\alpha},$$

де $\mathbf{d}^B_{.j}$ *є (15) і* $\mathbf{d}^A_{i.}$ *знаходиться за формулою* (18).

(iv) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|^\beta_\beta\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|^\beta_\beta\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)},$$

де $\mathbf{d}^B_{.j}$ *є (17) і* $\mathbf{d}^A_{i.}$ *визначається формулою* (16).

У підрозділі 5.3 розглядаються застосування зваженої кватерніонової узагальненої оберненої матриці Дразіна до розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Розглянемо наступне матричне рівняння з обмеженням,

$$\mathbf{WAWX} = \mathbf{D}, \tag{19}$$

$$\mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r\left((\mathbf{AW})^k\right),\ \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l\left((\mathbf{WA})^k\right), \tag{20}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times p}$ та $\mathbf{W} \in \mathbb{H}_r^{n\times m}$ з індексом $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}\,(\mathbf{WA})\}$, $\mathrm{rank}\,(\mathbf{AW})^k = \mathrm{rank}\ \mathbf{V}^k = r_1$ і $\mathrm{rank}\,(\mathbf{WA})^k = \mathrm{rank}\ \mathbf{U}^k = r_2$.

Теорема 5.21. *Якщо $\mathbf{D} \subset \mathcal{C}_r\left((\mathbf{AW})^k\right)$ і $\mathbf{D} \supset \mathcal{N}_l\left((\mathbf{WA})^k\right)$, тоді рівняння (19) з обмеженням (20) має єдиний розв'язок, $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,W}\mathbf{D}$, котрий має наступні визначникові зображення,*

(i)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{W}^*\mathbf{W})_{.i}\,(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}_{.})\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}} |\mathbf{W}^*\mathbf{W}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_2,\,n}} \left|(\mathbf{U}^{2k+1})^*\,\mathbf{U}^{2k+1}\right|^{\beta}_{\beta}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}_{.j}$ – j-й стовпець $\widetilde{\mathbf{\Omega}}_1 = \mathbf{W}^*\mathbf{U}^k\mathbf{\Omega}_1$ і матриця $\mathbf{\Omega}_1 = \left(\omega^{(1)}_{tj}\right)$ така, що

$$\omega^{(1)}_{ts} := \sum_{\beta\in J_{r_2,\,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.t}(\hat{\mathbf{d}}_{.j})\right)^{\beta}_{\beta},$$

де $\hat{\mathbf{d}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{U}^{2k+1})^*\mathbf{U}^k\mathbf{D}$.

(ii)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v^{(k)}_{it} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,t}\left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}} \left|(\mathbf{V}^{2k+1})^*\,\mathbf{V}^{2k+1}\right|^{\beta}_{\beta}\right)^2},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^{(1)}_{.j}$ - j-й стовпець $\widetilde{\mathbf{\Psi}}_1 := (\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{2k}\mathbf{\Psi}\mathbf{AD}$, і $\mathbf{\Psi} = (\psi_{sj}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ така, що

$$\psi_{sj} = \sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{s\}} \mathrm{cdet}_s\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,s}(\hat{\mathbf{v}}_{.\,j})\right)^{\beta}_{\beta}$$

і $\hat{\mathbf{v}}_{.\,j}$ - j-й стовпець $(\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^k =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m\times n}$.

(iii) *Якщо $\mathbf{AW} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ – ермітова, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}(\mathbf{f}_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}} \left|(\mathbf{AW})^{k+2}\right|^{\beta}_{\beta}},$$

де $\mathbf{f}_{.j}$ *–* j*-й стовпець* $\mathbf{F} = (\mathbf{AW})^k\mathbf{AD}$.

У підрозділі 5.4, як приклад застосування кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень розглянемо наступну задачу кватерніонових матричних наближень з обмеженнями:

$$\|\mathbf{AXB} - \mathbf{C}\|_F = \min, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{B}^{k_2}), \tag{21}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ з $k_1 = \mathrm{Ind}(\mathbf{A})$, $k_2 = \mathrm{Ind}(\mathbf{B})$, $\mathrm{rank}\,(\mathbf{A}^{k_1}) = r_1$ і $\mathrm{rank}(\mathbf{B}^{k_2}) = r_2$.

Теорема 5.25. Єдиним розв'язком задачі матричної мінімізації (21) є

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\oplus}\mathbf{C}\mathbf{B}_{\oplus}. \tag{22}$$

Теорема 5.26. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *з* $k_1 = \mathrm{Ind}(\mathbf{A})$, $k_2 = \mathrm{Ind}(\mathbf{B})$, $\mathrm{rank}(\mathbf{A}^{k_1}) = r_1$ *та* $\mathrm{rank}(\mathbf{B}^{k_2}) = r_2$. *Єдиний розв'язок* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *заданий умовою* (22) *покомпонентно можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,m}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\beta\in J_{r_2,n}} \left|\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^*\mathbf{B}^{k_2+1}\right|_\beta^\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}) = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{\Psi}$. *Тут* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ij})$ *і* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{ij})$ *задаються умовами*

$$\phi_{ik} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,m}\{k\}} \mathrm{rdet}_k\left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right)_{k.}(\hat{\mathbf{a}}_{i.})\right)_\alpha^\alpha,$$

$$\psi_{lj} = \sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{l\}} \mathrm{cdet}_l\left(\left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^*\mathbf{B}^{k_2+1}\right)_{.l}(\check{\mathbf{b}}_{.j})\right)_\beta^\beta,$$

де $\check{\mathbf{b}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець* $\check{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^{k_2+1})^*\mathbf{B}^{k_2}$ *і* $\hat{\mathbf{a}}_{i.}$ *–* i*-й рядок* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{k_1}(\mathbf{A}^{k_1+1})^*$.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури за темою дисертації. Попередні відомості

Цей розділено на два підрозділи. У підрозділі 1.1 розглядаються елементи лінійної алгебри теорії матриць над тілом кватерніонів, які будуть необхідні для викладення основного матеріалу. У підрозділі 1.2 наводяться деякі результати з теорії узагальнених обернених матриць та їх застосувань.

1.1. Елементи лінійної алгебри над тілом кватерніонів

1.1.1. Кватерніонові алгебри. Кватерніовою алгеброю над полем $\mathbf{F}$ називається центральна проста алгебра $\mathbf{A}$ над $\mathbf{F}$ розмірність якої дорівнює 4. Коли характеристика поля $\operatorname{char}\mathbf{F} \neq 2$, то кватерніонову алгебру можна описати як 4-вимірний векторний простір над $\mathbf{F}$ з базисом $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ та таблицею множення: $\mathbf{i}^2 = a$, $\mathbf{j}^2 = b$, $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$. Тоді кватерніонову алгебру будемо позначати $\mathbf{H}(a, b)$ або $(\frac{a,b}{\mathbf{F}})$. Кожну кватерніонову алгебру $\mathbf{H}(a, b)$ можна асоціювати з квадратичною формою n (яку називають нормою) на $\mathbf{H}$ такою, що $\mathrm{n}(xy) = \mathrm{n}(x)\mathrm{n}(y)$ для всіх x і y з $\mathbf{H}$. Над $\mathbf{H}$ може бути визначене лінійне відображення $x \to \overline{x} = \mathrm{t}(x) - x$, що є інволюцією, тобто $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$. Елемент $\overline{x}$ називається спряженим до $x \in \mathbf{H}$. $\mathrm{t}(x)$ і $\mathrm{n}(x)$ називаються, відповідно, слідом і нормою x так, що $\{\mathrm{n}(x), \mathrm{t}(x)\} \subset \mathbf{F}$ для всіх x з $\mathbf{H}$. Вони також задовольняють наступним умовам: $\mathrm{n}\left(\overline{x}\right) = \mathrm{n}(x)$, $\mathrm{t}\left(\overline{x}\right) = \mathrm{t}(x)$ і $\mathrm{t}\left(q \cdot p\right) = \mathrm{t}\left(p \cdot q\right)$.

Залежно від вибору $\mathbf{F}$, a і b маємо наступні випадки [148]:

1.$(\frac{a,b}{\mathbf{F}})$ є алгеброю з діленням – тілом,

2. $(\frac{a,b}{\mathbf{F}})$ є ізоморфною алгебрі всіх 2×2 матриць із елементами з $\mathbf{F}$.

Якщо $\mathbf{F}$-алгебра ізоморфна до всіх 2×2 матриць над $\mathbf{F}$ то кажуть, що ця алгебра є розщеплюваною (split algebra), в іншому випадку, нерозщеплюваною.

Найбільш відомими випадками розщеплюваної кватерніонової алгебри, є алгебра бікватерніонів, – кватерніонова алгебра над полем комплексних чисел, а також алгебра кокватерніонів Кокла [35], $\mathbf{H}_S = (\frac{-1,1}{\mathbb{R}})$, – алгеброю над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ та таблицею множення

$$\mathbf{i}^2 = -1, \;\; \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1,$$
$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \;\; \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \;\; \mathbf{ik} = -\mathbf{ki} = -\mathbf{j}.$$

Єдиним прикладом нерозщеплюваної кватерніонової алгебри над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ є Гамільтонова кватерніонова алгебра з діленням, – тіло кватерніонів $\mathbb{H}$, яке можна визначити як

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \,|\, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1, \; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Для довільного кватерніона $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$:

1. $\overline{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ – спряжений до q з властивістю $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\;\overline{q_1}$;
2. $\|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ – норма кватерніона;
3. $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$ – обернений до q кватерніон.

Для довільних кватерніонів $q_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ та $q_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ маємо

1. $q_1 \pm q_2 = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)\mathbf{i} + (c_1 \pm c_2)\mathbf{j} + (d_1 \pm d_2)\mathbf{k}$;
2. $q_1 q_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)\,\mathbf{i} +$
$(a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)\,\mathbf{j} + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)\,\mathbf{k}$.

У дисертаційній роботі будемо розглядати елементи теорії матриць над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$.

1.1.2. Кватерніонові матриці та векторні простори. Розглянемо правий і лівий кватерніонові векторні простори, позначивши їх, відповідно, $\mathcal{H}_r$ і $\mathcal{H}_l$, з відповідними $\mathbb{H}$-значними внутрішніми добутками $\langle\cdot,\cdot\rangle$, котрі для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$, і $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}_r(\mathcal{H}_l)$ задовольняють відношення:

$$\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \overline{\langle\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}; \tag{1.1}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \in \mathbb{R} \text{ і } \|\mathbf{x}\|^2 := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0}; \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}\alpha + \mathbf{y}\beta, \mathbf{z} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \alpha + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \beta, \text{ коли } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}_r \\ \langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle &= \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle, \text{ коли } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}_l; \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\alpha + \mathbf{z}\beta \rangle &= \overline{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle, \text{ коли } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}_r \\ \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \overline{\alpha} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \overline{\beta}, \text{ коли } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}_l. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Це може бути досягнуто, поклавши

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_r &= \overline{y}_1 x_1 + \cdots + \overline{y}_n x_n \;\text{ для }\; \mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n, \mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n \in \mathcal{H}_r, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_l &= x_1 \overline{y}_1 + \cdots + x_n \overline{y}_n \;\text{ для }\; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}_l. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Якщо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_r = 0$ ($\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_l = 0$), то вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ будемо називати ортогональними і позначатимемо $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, а якщо, крім того, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$, то вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ – ортонормальні.

Правий векторний простір $\mathcal{H}_r$ володіє процесом Грама-Шмідта, який з множини неортогональних лінійно незалежних векторів $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ для $k \leq n$ будує ортогональний (чи ортонормальний) базис $S' = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}$, що охоплює той самий k-мірний векторний підпростір простору $\mathcal{H}_r$, що й S. Для $\mathcal{H}_r$, може бути визначений наступний проективний оператор

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) := \mathbf{u} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_r}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_r},$$

який ортогонально проектує вектор $\mathbf{v}$ на вектор $\mathbf{u}$. Тоді алгоритм процесу Грама-Шмідта є наступним,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{e}_1 &= \tfrac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{\mathbf{u_j}}(\mathbf{v_k}), & \mathbf{e}_k &= \tfrac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}. \end{aligned}$$

Послідовність векторів $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ є результуючою системою ортогональних векторів, і нормалізовані вектори $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k$ утворюють результуючу множину ортонормальних векторів.

Процес Грама-Шмідта для лівого векторного простору $\mathcal{H}_l$ реалізується аналогічним алгоритмом, але проективним оператором

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_l}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_l} \mathbf{u}.$$

Для довільної матриці над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$, стовпці матриці утворюють систему векторів правого простору $\mathcal{H}_r$, а рядки – лівого $\mathcal{H}_l$. Множину кватерніонових $m \times n$-матриць позначатимемо $\mathbb{H}^{m\times n}$. Кватерніонові $n \times n$-матриці утворюють кільце, яке позначатимемо $\mathrm{M}(n, \mathbb{H})$.

Означення 1.1. *Нехай* $\mathbf{U} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *і* $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}$, *тоді матриця* $\mathbf{U}$ *називаєтьcя унітарною.*

Зрозуміло, що стовпці матриці $\mathbf{U}$ утворюють систему ортонормальних векторів у правому просторі $\mathcal{H}_r$, рядки матриці $\mathbf{U}^*$ – систему ортонормальних векторів у лівому просторі $\mathcal{H}_l$.

Векторні норми $\|\mathbf{x}\|_r = \sqrt{\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle_r}$ та $\|\mathbf{x}\|_l = \sqrt{\langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle_l}$ на просторах $\mathcal{H}_r$ і $\mathcal{H}_l$, визначають відповідні індуковані матричні норми на множині $\mathbb{H}^{n\times n}$ всіх $n \times n$ матриць наступним чином:

$$\|\mathbf{A}\|_r = \sup\{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_r : \mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \|\mathbf{x}\|_r = 1\},$$
$$\|\mathbf{A}\|_l = \sup\{\|\mathbf{x}\mathbf{A}\|_l : \mathbf{x} \in \mathbb{H}^{1\times n}, \|\mathbf{x}\|_l = 1\}.$$

Оскільки $\|\mathbf{x}\|_r = \|\mathbf{x}^T\|_l$, тоді $\|\mathbf{A}\|_r = \|\mathbf{A}\|_l$ для довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Таким чином, можна визначити норму матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ поклавши, $\|\mathbf{A}\| := \|\mathbf{A}\|_r = \|\mathbf{A}\|_l$. Аналогічно, комплексному випадку визначають і еквівалентну їй матричну норму Фробеніуса, поклавши для $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$,

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j \|a_{ij}\|^2}.$$

Зауваження 1.1. *Кватерніонові вектор-стовпці утворюють правий векторний простір* $\mathcal{H}_r$, *а вектор-рядки – лівий* $\mathcal{H}_l$, *які є пре-гільбертовими просторами. Ввівши умову повноти по кожній кватерніоновій базисній одиниці одержимо правий і лівий кватерніонові гільбертові простори (тобто, банахові з відповідними операціями внутрішнього множення).*

Правий кватерніоновий гільбертовий простір із кватернінно-значним внутрішним добутком (1.5) вивчається у роботі [235].

Означення 1.2. *Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *введемо наступні позначення.*

- $\mathcal{C}_r(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{H}^{m\times 1} : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n\times 1}\}$, *– правий стовпцевий простір матриці* $\mathbf{A}$*,*
- $\mathcal{N}_r(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n\times 1} : \ \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}$, *– правий нуль-простір матриці* $\mathbf{A}$ *(праве ядро),*
- $\mathcal{R}_l(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{H}^{1\times n} : \ \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{A}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{H}^{1\times m}\}$, *– лівий рядковий простір матриці* $\mathbf{A}$*,*
- $\mathcal{N}_l(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{1\times m} : \ \mathbf{x}\mathbf{A} = 0\}$, *– лівий нуль-простір матриці* $\mathbf{A}$ *(ліве ядро).*

Введемо також означення та позначення деяких кватерніонових матриць, які використовуються у роботі.

Для $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, будемо називати матрицю:

- *транспонованою*, $\mathbf{A}^T \in \mathbb{H}^{n\times m}$, – матриця, яку одержимо з $\mathbf{A}$ заміною її рядків на стовпці;
- *ермітово-спряженою*, $\mathbf{A}^* \in \mathbb{H}^{n\times m}$, – матриця, яку одержимо з $\mathbf{A}$ через її транспонування матриці і заміни кожного її елемента на спряжений.

Відмітимо наступні властивості транспонованої та ермітово-спряженої матриць. Нехай $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – кватерніонові матриці і $\lambda \in \mathbb{H}$, тоді маємо.

(i) Лінійність.

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T =& \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \quad (\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T;\\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})^* =& \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*, \quad (\lambda\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^*\overline{\lambda}.\end{aligned}$$

(ii) Добуток.

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T \neq \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T \ \text{ у загальному}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.$$

(iii) Обернена. Нехай $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ – оборотні.

$$\begin{aligned}&(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1};\\ &(\mathbf{A}^{-1})^T \neq (\mathbf{A}^T)^{-1} \ \text{ у загальному}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}.\end{aligned}$$

Для $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, будемо називати матрицю:

– *ермітовою*, якщо $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$;

– *нормальною*, якщо $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$;

– *ідемпотентною*, якщо $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

Позначимо суму двох підпросторів $L, M \in \mathbb{H}^n$ як

$$L + M := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \ : \ \mathbf{x} \in L, \ \mathbf{y} \in M\}. \tag{1.6}$$

Якщо $L \bigcap M = \{\mathbf{0}\}$, тоді сума (1.6) називається *прямою* і позначається $L \bigoplus M$. Два підпростори $L, M \in \mathbb{H}^n$ називаються *доповняльними*, якщо $L \bigoplus M = \mathbb{H}^n$. Тоді для довільного $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ існують такі $\mathbf{y} \in L$ та $\mathbf{z} \in M$, що

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \tag{1.7}$$

і будемо говорити, що $\mathbf{y}$ є проекцією $\mathbf{x}$ на L вздовж M. Нехай $P_{L,M}$ позначає перетворення, яке відображає будь-яке $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ у свою проекцію на L вздовж M. Будемо називати перетворення $P_{L,M}$ *проектором* на L вздовж M, або *косим проектором.* Аналогічно до комплексного випадку маємо наступну теорему.

Лема 1.1. *[11, Теорема 8] Для довільної ідемпотентної матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$*, простори* $\mathcal{C}_r(\mathbf{A})$ *та* $\mathcal{N}_r(\mathbf{A})$ *є доповняльними підпросторами з умовою* $\mathbf{A} = P_{\mathcal{C}_r(\mathbf{A}),\mathcal{N}_r(\mathbf{A})}$*. І, навпаки, якщо* L *та* M *є доповняльними, тоді існує єдина ідемпотентна матриця* $P_{L,M}$ *така, що* $\mathcal{C}_r(P_{L,M}) = L$ *та* $\mathcal{N}_r(P_{L,M}) = M$*.*

Якщо в рівності (1.7), $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$, тоді проектор $P_{L,M}$ будемо називати *ортогональним* і позначати $M := L^{\perp}$. Має місце

Лема 1.2. *[11, Лема 3] Нехай* $L \bigoplus M = \mathbb{H}^n$*. Тоді* $M = L^{\perp}$ *тоді тільки тоді, коли* $P_{L,M}$ *є ермітовою.*

1.1.3. Елементи теорії некомутативних визначників. Важливим інструментом лінійної алгебри над полем дійсних чи комплексних чисел є визначники. В силу некомутативності множення в тілі кватерніонів, питання означення визначника матриці з некомутативними елементами (їх ще називають некомутативними визначниками) не має однозначної відповіді.

Існує кілька підходів до означення некомутативного визначник. Але жоден з раніше введених некомутативних визначників матриць над некомутативним кільцем повністю не зберігає всі ті властивості, якими він володів для матриць над полем, - центром кільця. Зокрема, визначники матриць над полем є мультиплікативними. Але в [50] доведено, що не існує узагальнення визначника дійсних матриць до кватерніонових, яке б зберігало його мультиплікативність. Тому проблема означення некомутативного визначника досі залишалася відкритою.

Сучасну теорію некомутативних визначників можна розділити на три класи.

Нехай $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ – кільце $n \times n$ матриць, елементи яких належать некомутативному кільцю $\mathbf{R}$.

Перший підхід [3,36,49] полягає в означенні визначника, як матричного функціоналу $\mathrm{d} : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, що задовольняє набір необхідних аксіом.

Аксіома 1. (Виродженість.) $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли матриця $\mathbf{A}$ – необоротна.

Аксіома 2. (Мультиплікативність.) $\mathrm{d}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}(\mathbf{B})$ для всіх $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$.

Аксіома 3. (Інваріантність.) Якщо матриця $\mathbf{A}'$ одержується з квадратної матриці $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ через додавання до її довільного рядка, помноженого зліва на елемент кільця, її інший рядок, або через додавання до її довільного стовпця, помноженого справа на елемент кільця, її інший стовпець, тоді $\mathrm{d}(\mathbf{A})' = \mathrm{d}(\mathbf{A})$.

Тоді значення функціоналу $\mathrm{d}(\mathbf{A})$ називають визначником матриці $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$. Має місце теорема.

Теорема 1.1. *[3] Нехай* $\mathrm{d}(\mathbf{A})$ *задовольняє аксіоми 1, 2, 3, тоді образ* $\mathrm{d}(\mathrm{M}(n, \mathbf{R}))$ *належить центру кільця* $\mathbf{R}$.

Прикладами такого визначника є відомі визначники Стаді та Дьйодонне. У випадку для матриць над тілом кватерніонів такі визначники отримуються шляхом перетворення кватерніонової матриці до еквівалентної їй матриці над полем комплексних, чи відповідно, дійсних чисел, але при цьому втрачаються деякі функціональні можливості визначника, зокрема застосування його для побудови кватерніонової оберненої чи узагальненої оберненої матриці.

Другий спосіб означення некомутативного визначника – це розглядати його як певну раціональну функцію від елементів матриці. Найбільшого успіху тут досягли Гельфанд та Ретах, ввівши теорією квазідетермінантів [300, 301].

Довільна $n \times n$ матриця над тілом $\mathbf{R}$ асоціюється з $n \times n$ матрицею, елементи якої є квазідетермінанти. Квазідетермінант не є аналогом звичайного комутативного визначника, а його відношення до визначника $(n-1) \times (n-1)$-підматриці.

Означення 1.3. *Нехай $I = J = \{1, \ldots, n\}$ – множини рядкових і стовпцевих індексів, відповідно, і $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$, $i \in I$, $j \in J$. Для $i \in I$, $j \in J$, (i, j)-й квазідетермінант $|\mathbf{A}|_{ij}$ матриці $\mathbf{A}$ визначається як $\mid \mathbf{A} \mid_{ij} = b_{ji}^{-1}$, де $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = (b_{ij})$.*

Інше означення квазідетермінанта отримується за рекурентними співвідношеннями.

Означення 1.4. *Якщо $n = 1$ так, що $I = \{i\}$, $J = \{j\}$, тоді $\mid \mathbf{A} \mid_{ij} = a_{ij}$. Нехай $n \geq 2$ та $\mathbf{A}^{ij}$ буде $(n-1) \times (n-1)$-матрицею, що отримується з матриці $\mathbf{A}$, викресливши її i-й рядок та j-й стовпець. Тоді*

$$\mid \mathbf{A} \mid_{ij} = a_{ij} - \sum a_{ip} \left(\mid \mathbf{A}^{ij} \mid_{qp} \right)^{-1} a_{qj}.$$

Тут сума береться по всіх $p \in I \setminus i$, $q \in J \setminus j$.

Оскільки квазідетермінанти не володіють властивістю розкладу за алгебричними доповненнями вздовж довільного рядка чи стовпця, то обернена матриця не може бути представлена через класичну приєднану матрицю. Не дивлячись на це, квазідетермінанти застосовуються для розв'язку систем лінійних рівнянь.

Для лівої системи лінійних рівнянь, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \xi$, де $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ – матриця коефіцієнтів, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ стовпець відомих, маємо

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{A}|_{ji}^{-1} \xi_j,$$

або за аналогом правила Крамера як

$$|\mathbf{A}|_{ij}\, x_j = |\mathbf{A}_j\,(\xi)|_{ij}\,,$$

де $\mathbf{A}_j\,(\xi)$ одержується з матриці $\mathbf{A}$. замінивши j-й стовпець стовпцем ξ.

Нарешті, при третьому підході некомутативний визначник означається як сума $n!$ добутків елементів матриці взятих по одному з кожного рядка і стовпця, але з наперед заданим порядком елементів у кожному добутку. Мур був першим, хто домігся виконання основної Аксіоми 1, означаючи таким чином некомутативний визначник. Таке означення було введено не для всіх квадратних матриць над кільцем, а лише для ермітових матриць. Некомутативний визначник Мура був введений в [186]. Пізніше Дайсон дав деяке узагальнення і описав теорію визначник Мура в більш сучасних термінах [49].

Визначник Мура ермітової матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ (тобто, такої, що $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$) над кільцем $\mathbf{R}$ з інволюцією вводиться за індукцією по n наступним чином.

Означення 1.5. *[49] Нехай $\mathbf{A}(i \to j)$ – матриця, отримана з ермітової $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\,(n, \mathbf{R})$ заміною її j-о стовпця i-м стовпцем, і потім викресливши її i-і рядок і стовпець. Визначник Мура означається як*

$$\mathrm{Mdet}\mathbf{A} = \begin{cases} a_{11}, & n = 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} a_{ij} \mathrm{Mdet}\,(\mathbf{A}(i \to j))\,, & n > 1. \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -1, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.8}$$

Визначник Мура представляється [3] у термінах підстановок як

$$\mathrm{Mdet}\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} |\sigma| a_{n_{11} n_{12}} \cdots a_{n_{1l_1} n_{11}} a_{n_{21} n_{22}} \cdots a_{n_{rl_1} n_{r1}}.$$

Циклічним представленням перестановки $\sigma \in S_n$ в нормальній формі є

$$\sigma = (n_{11} \ldots n_{1l_1})\,(n_{21} \ldots n_{2l_2}) \ldots (n_{r1} \ldots n_{rl_r})\,,$$

де $n_{i1} < n_{im}$ для всіх $i = 1, \ldots, r$ та $m > 1$, при цьому $n_{11} > n_{21} > \cdots > n_{r1}$.

Дайсон [49] доводить виконання Аксіом 1 і 3 для визначника Мура та Аксіоми 2 при певних строгих обмеженнях на вихідне кільце $\mathbf{R}$. Однак, як він відмітив, питання узагальнення визначення Мура на довільні квадратні матриці над некомутативним кільцем на той час залишалося відкритим. Враховуючи те, що над кільцем не існує визначникового функціоналу, який би, з одного боку, задовольняв всі три аксіоми 1, 2, 3, а з іншого, приймав значення у самому кільці, Дайсон також допустив можливість побудови такого визначника, який не задовольняв би всі три аксіоми, але запропонував вважати Аксіому 1 необхідною й ключовою для означення некомутативного визначника.

Свою спробу вирішення цієї проблеми зробив Чен у роботах [29, 30]. Він визначив визначник довільної квадратної матриці $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$, поклавши

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} =& \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{n_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_s n_1} \dots a_{n_r k_2} \dots a_{k_l n_r}, \\ \sigma =& (n_1 i_2 \dots i_s) \dots (n_r k_2 \dots k_l), \\ n_1 >& i_2, i_3, \dots, i_s; \dots; n_r > k_2, k_3, \dots, k_l, \\ n =& n_1 > n_2 > \dots > n_r \geq 1. \end{aligned}$$

Хоча побудований таким чином визначник не задовольняє Аксіому 1, Чен отримав визначникове зображення оберненої матриці над тілом кватерніонів. Однак цей визначник також не володіє властивістю розкладу через алгебричні доповнення по довільному рядку чи стовпцю за винятком n-го рядка. Тому Чен також не отримав класичну приєднану матрицю чи її аналог.

Через $\|\mathbf{A}\| := \det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ Чен означив подвійний визначник матриці $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$, тоді визначникове зображення оберненої матриці задається наступною теоремою.

Теорема 1.2. *Якщо* $\|\mathbf{A}\| := \det(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) \neq 0$ *для* $\mathbf{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ *над* $\mathbb{H}$, *тоді існує обернена матриця* $\mathbf{A}^{-1} = (b_{jk})$, *де*

$$\begin{aligned} \overline{b_{jk}} &= \frac{1}{\|\mathbf{A}\|} \omega_{kj}, \quad (j, k = 1, 2, \dots, n), \\ \omega_{kj} &= \det(\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \alpha_n \alpha_{j+1} \dots \alpha_{n-1} \delta_k)^* (\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \alpha_n \alpha_{j+1} \dots \alpha_{n-1} \alpha_j). \end{aligned}$$

Тут α_i – i-й стовпець матриці $\mathbf{A}$, δ_k – n-мірний стовпець з 1 у k-у рядку та 0 в інших.

Якщо $\|\mathbf{A}\| \neq 0$, то розв'язок правої системи лінійних рівнянь $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \beta$ над $\mathbb{H}$ задається наступним аналогом правило Крамера,

$$x_j = \|\mathbf{A}\|^{-1} \overline{\mathbf{D}_j},$$

для всіх $j = 1, \ldots, n$, де

$$\mathbf{D}_j = \det \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_{j-1}^* \\ \alpha_n^* \\ \alpha_{j+1}^* \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^* \\ \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_{j-1} & \alpha_n & \alpha_{j+1} & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

Тут α_i – i-й стовпець матриці $\mathbf{A}$, α_i^* – i-й рядок матриці $\mathbf{A}^*$, і β^* є n-мірним вектор-рядком спряженим до β.

Оскільки, жоден із означених раніше визначників не задовольняє властивість розкладу Лапласа по будь-якому рядку чи стовпцю матриці, то й означити алгебричне доповнення елемента матриці, а звідси, й одержати аналітичне зображення класичної приєднаної матриці над некомутативним кільцем у рамках теорії будь-якого з означених вище визначників неможливо.

1.1.4. Елементи теорії стовпцевих та рядкових визначників. Як показано у попередньому пункті, щоб одержати визначникове зображення оберненої матриці над тілом через аналог класичної приєднаної матриці, необхідно побудувати такий некомутативний визначник, який, з одного боку, задовольняв би властивість розкладу по будь-якому рядку чи стовпцю матриці і в той же час, як визначникове відображення, задовольняв би Аксіоми 1, 2, 3.

Досягнути поставленої вище цілі вдається у рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників, розробленої здобувачем [104, 303, 305]. У цьому пункті розглянемо її детальніше.

Нехай S_n – симетрична група на множині $I_n = \{1, \dots, n\}$.

Означення 1.6. *[104, 305] Рядковий визначник по i-му рядку матриці $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для довільного $i \in I_n$ будемо визначати, поклавши*

$$\mathrm{rdet}_i \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} \left(a_{i\, i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \dots a_{i_{k_1+l_1} i}\right) \dots \left(a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \dots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}\right),$$

$$\sigma = \left(i\, i_{k_1} i_{k_1+1} \dots i_{k_1+l_1}\right) \left(i_{k_2} i_{k_2+1} \dots i_{k_2+l_2}\right) \dots \left(i_{k_r} i_{k_r+1} \dots i_{k_r+l_r}\right),$$

де σ є перестановкою впорядкованою зліва. Це означає, що перший цикл зліва починається індексом i, інші цикли розпочинаються зліва з мінімального з усіх індексів, які містяться в ньому,

$$i_{k_t} < i_{k_t+s} \quad \text{для всіх} \quad t = 2, \dots, r, \quad s = 1, \dots, l_t,$$

а порядок неперервних циклів (крім першого) обумовлений строгим зростанням зліва направо їх перших елементів, $i_{k_2} < i_{k_3} < \dots < i_{k_r}$.

Означення 1.7. *[104, 305] Стовпцевий визначник по j-му стовпцю матриці $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для довільного $j \in I_n$ будемо означати, поклавши*

$$\mathrm{cdet}_j \mathbf{A} = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{n-r} (a_{j_{k_r} j_{k_r+l_r}} \dots a_{j_{k_r+1} j_{k_r}}) \dots (a_{j\, j_{k_1+l_1}} \dots a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} a_{j_{k_1} j}),$$

$$\tau = \left(j_{k_r+l_r} \dots j_{k_r+1} j_{k_r}\right) \dots \left(j_{k_2+l_2} \dots j_{k_2+1} j_{k_2}\right) \left(j_{k_1+l_1} \dots j_{k_1+1} j_{k_1} j\right),$$

де τ є право-впорядкована перестановка. Це означає, що перший цикл справа починається індексом j, інші цикли розпочинаються справа з мінімального з усіх цілих чисел, які містяться в ньому,

$$j_{k_t} < j_{k_t+s} \quad \text{for all} \quad t = 2, \dots, r, \quad s = 1, \dots, l_t,$$

а порядок неперервних циклів (крім першого) обумовлений строгим зростанням справа наліво їх перших елементів, $j_{k_2} < j_{k_3} < \dots < j_{k_r}$.

Зауваження 1.2. *Для кватерніонової* 2×2*-матриці* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, *маємо чотири стовпцево-рядкові визначники*

$$\begin{aligned} \mathrm{rdet}_1 \mathbf{A} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \mathrm{rdet}_2 \mathbf{A} = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}, \\ \mathrm{cdet}_1 \mathbf{A} &= a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}, \quad \mathrm{cdet}_2 \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Оскільки $a_{ij} \in \mathbb{H}$, $i, j = 1, 2$, *то, в загальному, вони не є рівні між собою.*

Нехай $\mathbf{a}_{.j}$ позначає j-й стовпець, а $\mathbf{a}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{A}$. Через $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{c})$ позначимо матрицю, яку одержимо з $\mathbf{A}$ заміною її j-го стовпця вектор-стовпцем $\mathbf{c}$, а через $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ – матрицю, яку одержимо з $\mathbf{A}$, замінивши її i-й рядок вектор-рядком $\mathbf{b}$. Підматрицю, яку отримаємо з $\mathbf{A}$, викресливши її i-й рядок і j-й стовпець позначимо як $\mathbf{A}^{ij}$.

Наступні леми вводять розклад рядкового визначника $\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}$ за правими алгебричними доповненнями по i-му рядку та стовпцевого визначника за лівими алгебричними доповненнями по j-му стовпцю, відповідно, для всіх $i, j = 1, \ldots, n$. Таким чином, обчислення рядкових і стовпцевих визначників $n \times n$-матриці зводиться до обчислення визначників матриці нижчого порядку.

Лема 1.3. *[305] Нехай* R_{ij} *буде правим* ij*-им алгебричним доповненням матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$, *що означає* $\mathrm{rdet}_i \mathbf{A} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot R_{ij}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$. *Тоді*

$$R_{ij} = \begin{cases} -\mathrm{rdet}_j \mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}), & i \neq j, \\ \mathrm{rdet}_k \mathbf{A}^{ii}, & i = j, \end{cases} \tag{1.9}$$

де $\mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i})$ *одержується з матриці* $\mathbf{A}$, *замінивши її* j*-й стовпець* i*-м, а потім, видаливши* i*-й рядок та стовпець;* $k = \min\{I_n \setminus \{i\}\}$.

Лема 1.4. *[305] Нехай* L_{ij} *буде правим* ij*-им алгебричним доповненням матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$, *тобто* $\mathrm{cdet}_j \mathbf{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij}$ *для всіх* $j = 1, \ldots, n$. *Тоді*

$$L_{ij} = \begin{cases} -\mathrm{cdet}_i \mathbf{A}^{jj}_{i.}(\mathbf{a}_{j.}), & i \neq j, \\ \mathrm{cdet}_k \mathbf{A}^{jj}, & i = j, \end{cases} \tag{1.10}$$

де матриця $\mathbf{A}_{i.}^{jj}(\mathbf{a}_{j.})$ *одержується з* $\mathbf{A}$ *заміною* i*-о рядка* j*-м рядком, а потім, видаливши* j*-й рядок і стовпець;* $k = \min\{J_n \setminus \{j\}\}$.

Розглянемо основні властивості рядкових і стовпцевих визначників довільної квадратної матриці над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$, зокрема, про ліву дистрибутивність рядкового визначника, та праву – стовпцевого, відповідно.

Лема 1.5. *[305] Якщо* i*-й рядок матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є лівою лінійною комбінацією інших вектор-рядків, тобто,* $a_{i.} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{b}_k$*, де* $\alpha_l \in \mathbb{H}$ *та* $\mathbf{b}_l \in \mathbb{H}^{1\times n}$ *для всіх* $l = 1,\ldots,k$*,* $i = 1,\ldots,n$*, тоді*

$$\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(\alpha_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{b}_k) = \sum_l \alpha_l \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b}_l).$$

Лема 1.6. *[305] Якщо* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є правою лінійною комбінацією інших вектор-стовпців, тобто,* $\mathbf{a}_{.j} = \mathbf{b}_1\alpha_1 + \cdots + \mathbf{b}_k\alpha_k$*, де* $\alpha_l \in \mathbb{H}$ *та* $\mathbf{b}_l \in \mathbb{H}^{n\times 1}$ *для всіх* $l = 1,\ldots,k$*,* $j = 1,\ldots,n$*, тоді*

$$\mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b}_1\alpha_1 + \cdots + \mathbf{b}_k\alpha_k) = \sum_l \mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b}_l)\,\alpha_l.$$

Лема 1.7. *[305] Якщо* t*-й рядок матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ *такий, що* $a_{tj} = b_j + c_j$ *для всіх* $j = 1,\ldots,n$*, то для всіх* $i = 1,\ldots,n$

$$\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A} = \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}_{t.}(\mathbf{b}) + \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}_{t.}(\mathbf{c}),$$
$$\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A} = \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}_{t.}(\mathbf{b}) + \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}_{t.}(\mathbf{c}),$$

де $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_n)$*,* $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)$*.*

Лема 1.8. *[305] Якщо* t*-й стовпець матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{H})$*такий, що* $a_{i\,t} = b_i + c_i$ *для всіх* $i = 1,\ldots,n$*, то для всіх* $j = 1,\ldots,n$

$$\mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A} = \mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.\,t}(\mathbf{b}) + \mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.\,t}(\mathbf{c}),$$
$$\mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A} = \mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.\,t}(\mathbf{b}) + \mathrm{cdet}_j \mathbf{A}_{.\,t}(\mathbf{c}),$$

де $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_n)^T$*,* $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)^T$*.*

Лема 1.9. *[104] Якщо матриця* $\mathbf{A}^*$ *– ермітово-спряжена до* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{H})$*, тоді* $\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}^* = \overline{\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}}$ *для всіх* $i = 1,\ldots,n$*.*

Зауваження 1.3. *Рядкові і стовпцеві визначники довільної квадратної матриці над тілом кватерніонів* $\mathbb{H}$ *не задовольняють Аксіому 1, зокрема, також не виконується ключова властивість, – його виродженість при умові, що довільний його рядок чи стовпець є лінійною комбінацією інших. Тому можемо вважати їх пре-визначниками. Очевидно, також, що якщо елементи матриці* $\mathbf{A}$ *комутують, то* $\mathrm{rdet}_1\,\mathbf{A} = \ldots = \mathrm{rdet}_n\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_1\,\mathbf{A} = \ldots = \mathrm{cdet}_n\mathbf{A}$.

Ключовою в теорії рядково-стовпцевих визначників є наступна теорема.

Теорема 1.3. *[305] Якщо матриця* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\,(n, \mathbb{H})$ *– ермітова, то*

$$\mathrm{rdet}_1\mathbf{A} = \ldots = \mathrm{rdet}_n\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_1\mathbf{A} = \ldots = \mathrm{cdet}_n\mathbf{A} \in \mathbb{R}.$$

Зауваження 1.4. *В силу Теореми 1.3, можемо означити визначник ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\,(n, \mathbb{H})$, *поклавши* $\det \mathbf{A} := \mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}$ *для довільного* $i = 1, \ldots, n$.

Зауваження 1.5. *За Лемою 1.3, маємо*

$$\det \mathbf{A} = -\sum_{\sigma \in I_n} a_{i\,j} \cdot \mathrm{rdet}_j\,\mathbf{A}^{ii}_{.j}\,(\mathbf{a}_{.i}) + a_{i\,i} \cdot \mathrm{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii},\; k = \min\left\{I_n \setminus \{i\}\right\}. \qquad (1.11)$$

Порівнюючи вирази (1.8) та (1.11) для ермітової $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\,(n, \mathbb{H})$, *є очевидно, що рядковий визначник ермітової матриці співпадає з визначником Мура, а множина всіх рядкових і стовпцевих визначників є його природним і повним узагальненням для довільної квадратної матриці.*

Властивості визначника ермітової матриці, (засобом рядково-стовпцевих визначників), є близькими до властивостей звичайного визначника.

Лема 1.10. *[305] Якщо* i*-й рядок ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\,(n, \mathbb{H})$ *замінений лівою лінійною комбінацією його інших рядків, тобто* $\mathbf{a}_{i.} = c_1\mathbf{a}_{i_1.} + \cdots + c_k\mathbf{a}_{i_k.}$, *де* $c_l \in \mathbb{H}$ *для всіх* $l = 1, \ldots, k$ *і* $\{i, i_l\} \subset I_n$, *тоді*

$$\mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i\,.}\,(c_1\mathbf{a}_{i_1.} + \cdots + c_k\mathbf{a}_{i_k.}) = \mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i\,.}\,(c_1\mathbf{a}_{i_1.} + \cdots + c_k\mathbf{a}_{i_k.}) = 0.$$

Лема 1.11. *[305] Якщо j-й стовпець ермітової $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ замінений правою лінійною комбінацією його інших стовпців, тобто $\mathbf{a}_{.j} = \mathbf{a}_{.j_1} c_1 + \cdots + \mathbf{a}_{.j_k} c_k$, де $c_l \in \mathbb{H}$ для всіх $l = 1, \ldots, k$ і $\{j, j_l\} \subset J_n$, тоді*

$$\mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j_1} c_1 + \cdots + \mathbf{a}_{.j_k} c_k\right) = \mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j_1} c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} c_k\right) = 0.$$

Лема 1.12. *[305]Якщо i-й рядок ермітової матриці $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ отриманий при додаванні до нього лівої лінійної комбінації його інших рядків, тоді*

$$\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.} + c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) =$$
$$= \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.} + c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = \det \mathbf{A},$$

де $c_l \in \mathbb{H}$ для всіх $l = 1, \ldots, k$ і $\{i, i_l\} \subset I_n$.

Лема 1.13. *[305]Якщо j-й стовпець ермітової $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ отриманий при додаванні до нього правої лінійної комбінації його інших стовпців, тоді*

$$\mathrm{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j} + \mathbf{a}_{.j_1} c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} c_k\right) =$$
$$= \mathrm{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j} + \mathbf{a}_{.j_1} c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} c_k\right) = \det \mathbf{A},$$

де $c_l \in \mathbb{H}$ для всіх $l = 1, \ldots, k$ і $\{j, j_l\} \subset J_n$.

Прямим наслідком цих властивостей є наступна теорема про визначникове зображення матриці оберненої до ермітової.

Теорема 1.4. *[305] Нехай матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}$ – ермітова, і $\det \mathbf{A} \neq 0$, тоді існує єдина права $(R\mathbf{A})^{-1}$ і єдина ліва $(L\mathbf{A})^{-1}$ її обернені матриці, рівні між собою $(R\mathbf{A})^{-1} = (L\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$ і, що мають наступні визначникові зображення*

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{n1} \\ R_{12} & R_{22} & \cdots & R_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{1n} & R_{2n} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

$$(L\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & \cdots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & L_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

де R_{ij}, L_{ij} *виражаються формулами (1.9) та (1.10), відповідно.*

Наслідок 1.1. *Якщо* $\mathbf{A}$ *– ермітова і* $\det \mathbf{A} \neq 0$, *тоді* $\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$.

Зауваження 1.6. *Якщо матриця* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *– ермітова і невироджена* ($\det \mathbf{A} \neq 0$)*, тоді її класична приєднана представляється як* $\operatorname{Adj} \mathbf{A} = (L_{ij})_{n \times n}$ *або* $\operatorname{Adj} \mathbf{A} = (R_{ij})_{n \times n}$, *при цьому* $\det(\operatorname{Adj}[\mathbf{A}]) = (\det \mathbf{A})^{n-1}$.

Маємо наступний критерій оборотності ермітової матриці.

Теорема 1.5. *[104] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *– ермітова, тоді наступні твердження еквівалентні.*

(i) Матриця $\mathbf{A}$ *– оборотна, тобто,* $\mathbf{A} \in GL(n, S)$.

(ii) $\det \mathbf{A} \neq 0$.

(iii) Рядки матриці $\mathbf{A}$ *є лінійно незалежними зліва.*

(iv) Стовпці $\mathbf{A}$ *є лінійно незалежними справа.*

Зауваження 1.7. *Відмітимо, що стовпцево-рядкові імананти (стовпцево-рядкові визначники, зокрема) і їх властивості досліджувалися для матриць над кільцем кокватерніонів у роботі [111]. Також були отримані [113] визначникові зображення оберненої матриці та правила Крамера для правої і лівої систем лінійних кокватерніонових рівнянь з ермітовими коефіцієнтними матрицями.*

Для побудови визначникового зображення оберненої для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ розглядаються властивості її відповідних ермітових матриць $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Лема 1.14. *Якщо довільний рядок (стовпець) матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ *є лівою (правою) лінійною комбінацією інших його рядків, то* $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^* = 0$.

Зауваження 1.8. *На основі Леми 1.14 вводиться поняття визначникового рангу матриці* $\mathbf{A}$ *як порядку максимального ненульового головного мінору відповідної ермітової матриці* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *чи* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$. *Доведено, що стовпцевий ранг матриці* $\mathbf{A}$, *– максимальна кількість її лінійно незалежних справа стовпців* *(які називаємо базисними стовпцями), дорівнює її рядковому рангу, – максимальній кількості лінійно незалежних зліва рядків (які називаємо базисними рядками), та її визначниковому рангу.*

Теорема 1.6. *[305] Довільний стовпець (рядок) матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ є правою (лівою) лінійною комбінацією його базисних стовпців (рядків).*

Теорема 1.7. *[305] Якщо $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$, тоді $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \det \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.*

Означення 1.8. *[305] Для $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ визначник її відповідної ермітової матриці будемо називати подвійним визначником, тобто*

$$\mathrm{ddet}\mathbf{A} := \det(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^*).$$

Теорема 1.8. *[305] Довільний стовпець (рядок) матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є правою (лівою) лінійною комбінацією інших його стовпців (рядків) тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{ddet}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = 0$.*

Теорема 1.9. *[305] Для довільних матриць $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \subset \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$,*

$$\mathrm{ddet}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{ddet}\mathbf{A}\cdot\mathrm{ddet}\mathbf{B}.$$

Означення 1.9. *[305] Нехай $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ і $\mathrm{ddet}\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \sum\limits_i \mathbb{L}_{ij}\cdot a_{ij}$ для всіх $j = 1, \ldots, n$. Тоді $\mathbb{L}_{ij}$ будемо називати лівим подвійним (ij)-им алгебричним доповненням матриці $\mathbf{A}$.*

Означення 1.10. *[305] Нехай $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ і $\mathrm{ddet}\mathbf{A} = \mathrm{rdet}_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \sum\limits_j a_{ij}\cdot\mathbb{R}_{ij}$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді $\mathbb{R}_{ij}$ будемо називати правим подвійним (ij)-им алгебричним доповненням матриці $\mathbf{A}$.*

Теорема 1.10. *[104] Необхідною і достатньою умовою оборотності довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ є $\mathrm{ddet}\mathbf{A} \neq 0$. Тоді існує її обернена матриця $\mathbf{A}^{-1} = (L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1}$, яка виражається як ліва*

$$(L\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^* = \frac{1}{\mathrm{ddet}\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \mathbb{L}_{11} & \mathbb{L}_{21} & \ldots & \mathbb{L}_{n1} \\ \mathbb{L}_{12} & \mathbb{L}_{22} & \ldots & \mathbb{L}_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{L}_{1n} & \mathbb{L}_{2n} & \ldots & \mathbb{L}_{nn} \end{bmatrix}$$

чи права обернена

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^* \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{ddet}\mathbf{A}^*} \begin{bmatrix} \mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{21} & \ldots & \mathbb{R}_{n1} \\ \mathbb{R}_{12} & \mathbb{R}_{22} & \ldots & \mathbb{R}_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{R}_{1n} & \mathbb{R}_{2n} & \ldots & \mathbb{R}_{nn} \end{bmatrix}$$

такі, що

$$\mathbb{L}_{ij} = \mathrm{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right), \;\; \mathbb{R}_{\,ij} = \mathrm{rdet}_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.}\left(\mathbf{a}^*_{j.}\right), \tag{1.14}$$

для всіх $i, j = 1, \ldots, n$.

Зауваження 1.9. *З Теорем 1.10, 1.8 і 1.9 для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\,(n, \mathbb{H})$ *випливає, що її подвійний визначник* $\mathrm{ddet}\mathbf{A}$ *задовольняє Аксіоми 1, 2, 3 некомутативного визначника, а за Означеннями 1.9 та 1.10 – властивість розкладу по будь-якому рядку чи стовпцю матриці.*

Зауваження 1.10. *[99] Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\,(n, \mathbb{H})$ *встановлено наступні залежності між її подвійним визначником та визначниками Мура* $\mathrm{Mdet}\mathbf{A}$, *Стаді* $\mathrm{Sdet}\mathbf{A}$ *і Дьйодонне* $\mathrm{Ddet}\mathbf{A}$,

$$\mathrm{ddet}\mathbf{A} = \mathrm{Mdet}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = \mathrm{Sdet}\mathbf{A} = \mathrm{Ddet}^2\mathbf{A};$$

а також з квазідетермінантами Гельфанда-Ретаха, $|\mathbf{A}|_{pq}$ *з* $p, q = 1, \ldots, n$, *коли* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *– оборотна матриця,*

$$|\mathbf{A}|_{pq} = \frac{\mathrm{ddet}\mathbf{A} \cdot \overline{\mathrm{cdet}_q(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,q}\left(\mathbf{a}^*_{.p}\right)}}{\|\mathrm{cdet}_q(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,q}\left(\mathbf{a}^*_{.p}\right)\|^2} = \frac{\mathrm{ddet}\mathbf{A} \cdot \overline{\mathrm{rdet}_p(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{p\,.}\left(\mathbf{a}^*_{q.}\right)}}{\|\mathrm{rdet}_p(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{p\,.}\left(\mathbf{a}^*_{q.}\right)\|^2}.$$

Зауваження 1.11. *Виходячи з формул (1.14), для лівого і правого алгебричного доповнення ермітової матриці* $\mathbf{A}$ *одержимо більш зручні для обчислення вирази, аніж (1.9) та (1.10), а саме,*

$$L_{ij} = \mathrm{cdet}_j(\mathbf{A}^2)_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\right), \;\; R_{ij} = \mathrm{rdet}_i(\mathbf{A}^2)_{i.}\left(\mathbf{a}_{j.}\right),$$

для всіх $i, j = 1, \ldots, n$.

Важливим застосуванням визначникових зображень обернених матриць є правило Крамера для розв'язку систем лінійних рівнянь.

Теорема 1.11. *[104] Нехай*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{y} \tag{1.15}$$

є права система лінійних рівнянь з $\mathbf{A}\in \mathrm{M}(n,\mathbb{H})$, *стовпцем відомих* $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^T\in\mathbb{H}^{n\times 1}$, *та стовпцем невідомих* $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$. *Якщо* $\mathrm{ddet}\mathbf{A}\neq 0$, *тоді розв'язок системи (1.15) покомпонентно задається як*

$$x_j=\frac{\mathrm{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\,(\mathbf{f})}{\mathrm{ddet}\mathbf{A}},\ \ j=1,\ldots,n, \tag{1.16}$$

де $\mathbf{f}=\mathbf{A}^*\mathbf{y}$.

Теорема 1.12. *[104]Нехай*

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{y} \tag{1.17}$$

– ліва система лінійних рівнянь з $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$, *рядком відомих* $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{H}^{1\times n}$, *та рядком невідомих* $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$. *Якщо* $\mathrm{ddet}\mathbf{A}\neq 0$, *то розв'язок лінійної системи (1.17) покомпонентно задається як*

$$x_i=\frac{\mathrm{rdet}_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.}\,(\mathbf{z})}{\mathrm{ddet}\mathbf{A}},\quad i=1,\ldots,n \tag{1.18}$$

де $\mathbf{z}=\mathbf{y}\mathbf{A}^*$.

Зауваження 1.12. *Формули (1.16) і (1.18) є узагальненнями правила Крамера для систем лінійних рівнянь над тілом кватерніонів. Ще ближчий аналог правилу Крамера слідує з Теореми 1.4 у особливих випадках, коли матриці коефіцієнтів є ермітовими.*

Наслідок 1.2. *Якщо матриця* $\mathbf{A}\in\mathrm{M}(n,\mathbb{H})$ *у правій системі лінійних рівнянь (1.15) є ермітовою, тоді розв'язок лінійної системи* $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *покомпонентно задається як*

$$x_j=\frac{\mathrm{cdet}_j\mathbf{A}_{.j}\,(\mathbf{y})}{\det\mathbf{A}}\quad j=1,\ldots,n.$$

Наслідок 1.3. *Якщо матриця* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *у лівій системі лінійних рівнянь (1.17) є ермітовою, тоді розв'язок лінійної системи* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *задається як*

$$x_i = \frac{\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{y})}{\det \mathbf{A}} \quad i = 1, \ldots, n.$$

1.1.5. Власні значення кватерніонових матриць. Нам також знадобляться наступні факти про власні значення кватерніонових матриць. Через некомутативність кватерніонів існують два типи їх власних значень.

Означення 1.11. *Кватерніон* λ *називається лівим власним значенням матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *якщо*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \tag{1.19}$$

для деякого ненульового кватерніонового вектор-стовпця $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$. *Аналогічно,* λ *є її правим власним значенням, якщо*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \lambda \tag{1.20}$$

для ненульового $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$.

Тоді, множина $\{\lambda \in \mathbb{H} \mid \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{H}^n\}$ називається лівим спектром матриці $\mathbf{A}$, і позначається як $\sigma_l(\mathbf{A})$. Правий спектр визначається, поклавши $\sigma_r(\mathbf{A}) := \{\lambda \in \mathbb{H} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{x}\lambda,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{H}^n\}$.

Теорія лівих власних значень кватерніонових матриць досліджувалася, зокрема в роботах [78, 168, 220, 272]. Теорія правих власних значень кватерніонових матриць є більш розвинена (див. напр., [4, 18, 47, 51, 52, 283]). Це може бути наслідком того, що кватерніонові вектор-стовпці утворюють правий векторний простір, для якого ліві власні значення (1.19) є "екзотичними".

Представимо деякі факти з теорії правих власних значень, які будуть нижче використані. Зважаючи на вищесказане, відтепер ми опускатимемо термін "праві". Зокрема, добре відомо, що якщо $\lambda \notin \mathbb{R}$ є власним значенням $\mathbf{A}$, але не дійсним, то будь-який елемент класу еквівалентності $[\lambda] = \{x | x = u^{-1}\lambda u,\ u \in \mathbb{H},\ \|u\| = 1\}$ також є його власним значенням.

Лема 1.15. *[18] Будь-яка кватерніонова матриця* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *має точно* n *власних значень, які є комплексними числами з невід'ємними уявними частинами.*

Власні значення з Леми 1.15, $h_1 + k_1\mathbf{i}, \ldots, h_n + k_n\mathbf{i}$, де $k_t \geq 0$ і $h_t, k_t \in \mathbb{R}$ для всіх $t = 1, \ldots, n$, називаються *стандартними власними значеннями* матриці.

Лема 1.16. *[4] Нехай* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *є різними власними значеннями матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$*, жодні два з яких не є спряженими, і нехай* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *будуть відповідними власними векторами. Тоді вектори* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *є лінійно незалежними (справа).*

Аналогічно комплексному випадку розглянемо теорему про діагоналізацію кватерніонової матриці і дамо її доведення, враховуючи некомутативність кватерніонової алгебри.

Теорема 1.13. *Матриця* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *діагоналізується тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{A}$ *має множину* n *лінійно незалежних справа векторів. Більше того, якщо* $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ *є власною парою матриці* $\mathbf{A}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$*, тоді*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}, \tag{1.21}$$

де $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$*,* $\mathbf{D} = diag\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$*.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай матриця $\mathbf{A}$ є діагоналізованою, тобто, існують необоротна $\mathbf{P}$ і діагональна $\mathbf{D}$ матриці такі, що $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Тоді

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}. \tag{1.22}$$

Оскільки $\mathbf{D} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ – діагональна, то вона має лінійно незалежну справа множину n правих власних векторів таких, що

$$\mathbf{D}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i d_{ii}, \;\; \mathbf{D} = diag\,[d_{11}, \ldots, d_{nn}]\,, \;\; \mathbf{I} = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n]\,.$$

Отже, пара $(d_{ii}, \mathbf{e}_i)$ є власною парою матриці $\mathbf{D}$, для всіх $i = 1, \ldots, n$. З того, що $\mathbf{e}_i d_{ii} = d_{ii}\mathbf{e}_i$ і використовуючи (1.22), маємо

$$\mathbf{e}_i d_{ii} = d_{ii}\mathbf{e}_i = \mathbf{D}\mathbf{e}_i = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{e}_i. \tag{1.23}$$

Помноживши рівняння (1.23) зліва на матрицю $\mathbf{P}$, одержимо

$$\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{e}_i) = (\mathbf{P}\mathbf{e}_i)d_{ii}.$$

Отже, вектори $\mathbf{v}_i = \mathbf{P}\mathbf{e}_i$ є власними векторами матриці $\mathbf{A}$ з власними значеннями d_{ii} для всіх $i = 1, \ldots, n$. Оскільки, матриця $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ є оборотною, то за Теоремою 1.5, власні вектори $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ є лінійно незалежними справа.

($\Leftarrow$) Нехай $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ є власною парою матриці $\mathbf{A}$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Розглянемо матрицю $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$. Обчислюючи добуток матриць, маємо

$$\mathbf{AP} = \mathbf{A}\left[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\right] = \left[\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n\right] = \left[\mathbf{v}_1\lambda_1, \ldots, \mathbf{v}_n\lambda_n\right].$$

Оскільки власні вектори $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ – лінійно незалежні справа, то за Теоремою 1.5, матриця $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ є оборотною. Тоді існує $\mathbf{P}^{-1}$ і

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{P}^{-1}\left[\mathbf{v}_1\lambda_1, \ldots, \mathbf{v}_n\lambda_n\right] = \left[\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}_1\lambda_1, \ldots, \mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}_n\lambda_n\right].$$

Оскільки, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$, то $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Отже,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \left[\mathbf{e}_1\lambda_1, \ldots, \mathbf{e}_n\lambda_n\right] = \mathrm{diag}\left[\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n}\right]$$

Нехай $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left[\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n}\right]$, тоді $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, або еквівалентно, $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

□

Наслідок 1.4. *[4] Якщо матриця $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\left(n, \mathbb{H}\right)$ маємо n неспряжених власних значень, то вона може бути діагоналізована в тому сенсі, що тоді існує необоротна матриця $\mathbf{P} \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{H})$ для яких $\mathbf{PAP}^{-1}$ – діагональна.*

Теорема 1.14. *[18] Нехай $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\left(n, \mathbb{H}\right)$. Тоді існує унітарна матриця $\mathbf{U}$ така, що $\mathbf{U}^*\mathbf{AU}$ – верхня трикутна матриця з діагональними елементами $h_1 + k_1\mathbf{i}, \ldots, h_n + k_n\mathbf{i}$, що є стандартними власними значеннями матриці $\mathbf{A}$.*

З Теореми слідує розклад Шура для довільної, тобто для довільної $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\left(n, \mathbb{H}\right)$ існують унітарна матриця $\mathbf{U}$ та верхня трикутна $\mathbf{R}$ такі, що

$$\mathbf{A} = \mathbf{URU}^*. \tag{1.24}$$

Наслідок 1.5. *[283] Нехай матриця $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ має стандартні власні значення $h_1 + k_1\mathbf{i}, \dots, h_n + k_n\mathbf{i}$. Тоді $\sigma_r = [h_1 + k_1\mathbf{i}] \cup \cdots \cup [h_n + k_n\mathbf{i}]$.*

Наслідок 1.6. *[283] Матриця $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ є нормальною тоді і тільки тоді, коли існує унітарна матриця $\mathbf{U} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ така, що*

$$\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathrm{diag}\left[\lambda_1, \dots, \lambda_n\right],$$

де $\lambda_i = h_i + k_i\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ – стандартні власні значення для всіх $i = 1, \dots, n$.

Наслідок 1.7. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$. Матриця $\mathbf{A}$ є ермітовою тоді і тільки тоді, коли існує унітарна матриця $\mathbf{U} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ і діагональна матриця $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ така, що $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*$, де $\lambda_i \in \mathbb{R}$ для всіх $i = 1, \dots, n$ є правими власними значеннями матриці $\mathbf{A}$.*

За Лемою 1.18, для кватерніонової матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, власні значення її відповідних ермітових $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ є невід'ємні дійсні числа.

Означення 1.12. *Невід'ємні квадратні корені n власних значень матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ будемо називати сингулярними значеннями матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$.*

Наступна теорема вводить сингулярний розклад кватерніонової матриці.

Теорема 1.15. *[268, 283] Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$. Тоді існують унітарні кватерніонові матриці $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{H}^{m\times m}$ та $\mathbf{U}_2 \in \mathbb{H}^{n\times n}$ такі, що*

$$\mathbf{U}_1\mathbf{A}\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{m\times n}, \tag{1.25}$$

де $\mathbf{D}_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, та $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ - ненульові сингулярні значення матриці $\mathbf{A}$.

Теорема 1.16. *[268] Довільна кватерніонова матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ має жорданова канонічну форму з стандартними власним значеннями на головній діагоналі. Тобто, існують невироджена матриця $\mathbf{P} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ та жорданова матриця*

$$\mathcal{J} = \mathrm{diag}\left[\mathcal{J}_{\lambda_1} \;\; \ldots \;\; \mathcal{J}_{\lambda_r}\right],$$

де матричні блоки $\mathcal{J}_{\lambda_i}$ на діагоналі є жордановими клітинами

$$\mathcal{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & (\mathbf{0}) & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (\mathbf{0}) & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k},$$

що відповідають стандартним власним значенням λ_i, для всіх $i = 1, \ldots, r$, $r \leq n$, і k – кратність власного значення $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.

Праві (1.20) та ліві (1.19) власні значення у загальному не поєднані між собою [50], але не для ермітових матриць. Припустимо, що $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ – ермітова і $\lambda \in \mathbb{R}$ – її праве власне значення, тоді $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \lambda = \lambda \cdot \mathbf{x}$. Це означає, що всі праві власні значення ермітової матриці є і її лівими власними значеннями. Для лівих власних значень, $\lambda \in \mathbb{R}$, матриця $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ є також ермітовою.

Означення 1.13. *Якщо $t \in \mathbb{R}$, то для ермітової матриці $\mathbf{A}$ многочлен $p_{\mathbf{A}}(t) = \det(t\mathbf{I} - \mathbf{A})$ називається характеристичним многочленом матриці $\mathbf{A}$.*

Коефіцієнти характеристичного многочлена ермітової матриці можна дослідити подібно до комутативного випадку (див., напр. [144]). Спочатку доведемо допоміжну лему.

Лема 1.17. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ - ермітова, а її стовпці $i_1, \ldots, i_k$ є одиничними векторами $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}$. Тоді визначник $\det \mathbf{A}$ дорівнює головному мінору матриці $\mathbf{A}$, який отримаємо викресливши стовпці та рядки $i_1, \ldots, i_k$.*

Доведення. Очевидно, що коли $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ - ермітова, а її стовпці $i_1, \ldots, i_k$ є одиничними вектор-стовпцями $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}$, то і рядки $i_1, \ldots, i_k$ є одиничними вектор-рядками $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}$. За Лемою 1.4, розкладемо $\det \mathbf{A}$ по i_1-у стовпцю, де

$a_{i_1k} = 0$ для всіх $k \neq i_1$ та $a_{i_1i_1} = 1$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\det \mathbf{A} = \mathrm{cdet}_{i_1}\mathbf{A} = \\
&= -\mathrm{cdet}_{i_1}\mathbf{A}^{11}_{i_1.}\left(\mathbf{a}_{1.}\right) \cdot a_{1i_1} - \dots + \mathrm{cdet}_1\mathbf{A}^{i_1i_1} \cdot a_{i_1i_1} - \dots - \mathrm{cdet}_{i_1}\mathbf{A}^{nn}_{i_1.}\left(\mathbf{a}_{n.}\right) \cdot a_{ni_1} \\
&= -\mathrm{cdet}_{i_1}\mathbf{A}^{11}_{i_1.}\left(\mathbf{a}_{1.}\right) \cdot 0 + \dots + \mathrm{cdet}_1\mathbf{A}^{i_1i_1} \cdot 1 + \dots - \mathrm{cdet}_{i_1}\mathbf{A}^{nn}_{i_1.}\left(\mathbf{a}_{n.}\right) \cdot 0 \\
&= \mathrm{cdet}_1\mathbf{A}^{i_1i_1}.
\end{aligned}$$

Оскільки підматриця $\mathbf{A}^{i_1i_1}$ отримується з матриці $\mathbf{A}$ викресленням i_1-о рядка та стовпця, тоді з Теореми 1.3 слідує, що $\mathrm{cdet}_1\mathbf{A}^{i_1i_1} = \det \mathbf{A}^{i_1i_1}$. Обчислимо мінор $\det \mathbf{A}^{i_1i_1}$, розклавши його i_2-му стовпцю. Тоді одержимо, що $\det \mathbf{A}$ дорівнює головному мінору, отриманому з $\mathbf{A}$, викресливши i_1-і та i_2-і рядки і стовпці. Продовжуючи аналогічно, отримаємо твердження леми. $\square$

Використавши Лему 1.17, за аналогією до комутативного випадку (див., напр., [144]) можна довести наступну теорему.

Теорема 1.17. *Якщо $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\left(n, \mathbb{H}\right)$ - ермітова матриця, то $p_{\mathbf{A}}\left(t\right) = t^n - d_1t^{n-1} + d_2t^{n-2} - \ldots + \left(-1\right)^n d_n$, де d_r - сума головних мінорів матриці $\mathbf{A}$ порядку r, де $1 \leq r < n$ і $d_n = \det \mathbf{A}$.*

Корені характеристичного многочлена ермітової матриці є її (дійсними) лівими власними значеннями, котрі є також і її правими власними значеннями.

Означення 1.14. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – ермітова матриця, $\pi(\mathbf{A}) = \pi$ – кількість її додатних власних значень, $\nu(\mathbf{A}) = \nu$ – від'ємних, а $\delta(\mathbf{A}) = \delta$ – нульових. Тоді впорядкована трійка $\omega(\mathbf{A}) = (\pi, \nu, \delta)$ називається індексами інерції $\mathbf{A}$.*

Означення 1.15. *Ермітова матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ називається додатноозначеною (невід'ємноозначеною), якщо $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 (\geq 0)$ для довільного ненульового $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$.*

Наступні властивості з множини комплексних матриць можна узагальнити для кватерніонових додатноозначених матриць. Оскільки, їх доведення аналогічні доведенням у комплексному випадку, то ми перелічимо їх без повних доведень, але з деякими коментарями.

Теорема 1.18. *Нехай матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є додатноозначеною. Тоді наступні властивості є еквівалентними.*

(i) Всі її власні значення є додатними.

(ii) Всі головні мінори матриці є додатними.

(iii) Асоційована напівбілінійна форма є правим кватерніоново-значним скалярним добутком.

(iv) Вона є матрицею Грама лінійно незалежних векторів.

(v) Вона має єдиний розклад Холеського.

Доведення. (i) За Наслідком 1.7 існує унітарна матриця $\mathbf{U}$ така, що $\mathbf{A} = \mathbf{U}^*\mathbf{D}\mathbf{U}$, де праві власні значення $\lambda_1, ..., \lambda_n$ є дійсними. Тоді $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{U}\mathbf{x})^*\, \mathbf{D}\mathbf{U}\mathbf{x}$. Заміною однієї змінної на іншу $\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}$, одержимо $\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{y} > 0$, для довільного ненульового вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$, коли $\mathbf{D}$ є додатно-визначеною. Це означає кожен елемент головної діагоналі матриці $\mathbf{D}$, а отже, кожне власне значення матриці $\mathbf{A}$ є додатним.

(ii) Доведення цього пункту є аналогічним комплексному випадку, враховуючи той факт, що всі головні підматриці ермітової матриці є ермітовими, і можна визначити головні мінори, як визначники ермітових підматриць.

(iii) Нехай напівбілінійна форма для матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}$ визначається як відображення $\langle\cdot,\cdot\rangle_{r,A} \;:\; \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \Longrightarrow \mathbb{H}$ таке, що $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{r,A} := \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ для всіх $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$. За умовою (1.2), ця форма є правим кватерніоново-значним скалярним добутком $\mathbb{H}$ тоді і тільки тоді, коли $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle_{r,A}$ є дійсним ненульовим значенням для довільного вектора $\mathbf{x}$. А це означає, що $\mathbf{A}$ – додатно-визначена.

(iv) Існує $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ множина n лінійно незалежних справа векторів на просторі $\mathcal{H}_r^n$ з кватерніоново-значним скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_r$ така, що матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})$, де $a_{ij} = \langle x_i, x_j\rangle_r$, є матрицею Грама для системи векторів.

(v) Існує єдина нижня трикутна матриця $\mathbf{L}$, з дійсними і додатними елементами на головній діагоналі така, що $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^*$. Така факторизація називається розкладом Холецького матриці $\mathbf{A}$. □

Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – додатноозначена матриця і $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*$. Тоді $\mathbf{A}$ має єдиний квадратний корінь, який позначається як $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$б визначається, поклавши, $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} := \mathbf{U}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}^*$.

Лема 1.18. *[268] Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, тоді відповідні ермітові матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ є невід'ємноозначеними, і r ненульових власних значень матриць $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ співпадають.*

Означення 1.16. *Матрицю $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ називають $\mathbf{H}$-зваженою унітарною (унітарною з вагою $\mathbf{H}$) якщо $\mathbf{Q}^*\mathbf{H}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_m$, де $\mathbf{I}_m$ – одинична матриця.*

Наступні два факти (див., напр. [75]) про додатноозначені та ермітові матриці та їх добутки можуть бути узагальнені на кватерніонові матриці.

Лема 1.19. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – додатноозначена і $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ –ермітова матриця, відповідно. Тоді $\mathbf{AB}$ – діагоналізована матриця, всі її власні значення є дійсними, і $w(\mathbf{AB}) = w(\mathbf{A})$.*

Лема 1.20. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – додатноозначена матриця і $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – ермітова. Тоді існує невироджена матриця $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ така, що $\mathbf{C}^*\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ і $\mathbf{C}^*\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}$, де $\mathbf{\Lambda}$ є діагональною матрицею.*

1.2. Узагальнені обернені матриці та їх застосування

Поняття узагальнених обернених вперше було згадано в 1903 р. Фредгольмом [54], який сформулював псевдообернення для лінійного інтегрального оператора, який не є оборотним. У 1904 р. Гільберт [73] вивчав узагальнені обернені диференціальні оператори. Клас усіх псевдообернень був охарактеризований у 1912 р. Гурвіцем [79], який використав скінченну розмірність нульового простору операторів Фредгольма, щоб дати їх просту алгебраїчну конструкцію. Таким чином, узагальнені обернені диференціальні та інтегральні оператори породили узагальнені обернені матриці, існування яких вперше встановив Мур [187, 188] для довільної дійсної матриці. Відкриття Мура було малопомітним протягом 30 років після його першої публікації. На протязі цього періоду узагальнені обернені переозначувалися для матриць – Зігелем [217, 218], і для операторів – Ценгом [316–318], Мюрреєм та фон Нейманом [189], Аткінсон [302] та ін. Відродження інтересу до цієї теми в 1950-х рр. зосередилося навколо властивостей найменших квадратів деяких узагальнених обернених, які були встановлені Б'єрхаммаром [15, 16]. Він перевідкрив узагальнену обернену Мура, та знайшов зв'язок між псевдоoберненням та розв'язуванням лінійних систем. У 1955 р. Пенроуз [192] розширив результати Б'єрхаммара і на основі сингулярного розкладу матриці виписав рівняння, які дають необхідні та достатні умови для визначення такої узагальненої оберненої матриці, єдиної для довільної матриці.

В 1958 році Дразін [48] ввів поняття нової узагальненої оберненої матриці, яка зараз називається в його честь, як узагальнена обернена матриця Дразіна. Пізніше, Прасад і Бапат [194] у 1992 р. та Клайн і Гревілл [34] у 1980 ввели зважені узагальнені обернені матриці Мура-Пенроуза і Дразіна, відповідно. Всі ці узагальнені обернені матриці мають мають обширну літературу, але й досі грунтовно вивчаються.

На даний час узагальнені обернені охоплюють широкий спектр розділів математики, серед яких теорії матриць та операторів, диференціальні рівняння, чисельний аналіз, ланцюги Маркова, C^*-алгебри чи кільця. Їх численні застосування включають, зокрема, такі прикладні області, як статистика [33, 198], криптографія [149], теорія управління [22, 23], електротехніка [2], робототехніка [143, 145] та ін.

У підрозділі 1.2.1, будуть розглянуті деякі основні результати з теорії узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза і Дразіна та їх зважених.

В останні десять років зростання інтересу до вивчення узагальнених обернених було спричинене появою нових узагальнених обернених матриць як серцевинна обернена, EP-серцевинна обернена та їх узагальнення. У підрозділі 1.2.2, будуть наведені означення та основні властивості серцевинної оберненої та її узагальнень.

1.2.1. Узагальнені обернені матриці Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважені.

Нехай $\mathbb{C}^{m\times n}$ та $\mathbb{C}_r^{m\times n}$ позначають множину $m\times n$ матриць з комплексними елементами, та її підмножину матриць рангу r, відповідно.

Означення 1.17. *Узагальненою оберненою Мура-Пенроуза для матриці* $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ *називається матриця* $\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{n\times m}$*, що задовольняє рівняння*

$$(1)\ \mathbf{AXA}=\mathbf{A};\ (2)\ \mathbf{XAX}=\mathbf{X};\ (3)\ (\mathbf{AX})^*=\mathbf{AX};\ (4)\ (\mathbf{XA})^*=\mathbf{XA}.$$

Позначається як $\mathbf{A}^\dagger$.

Порядок нумерації цих рівнянь є усталеним. Більше того, матриця $\mathbf{A}$, що задовольняє умовам $(i),(j),\ldots$ називається $\{i,j,\ldots\}$-оберненою для матриці $\mathbf{A}$, і позначається як $\mathbf{A}^{(i,j,\ldots)}$. Множину матриць $\mathbf{A}^{(i,j,\ldots)}$ будемо позначати $\mathbf{A}\{i,j,\ldots\}$. Зокрема, $\mathbf{A}^{(1)}$ називається внутрішньою оберненою, $\mathbf{A}^{(2)}$ - зовнішньою оберненою, і $\mathbf{A}^{(1,2)}$ - рефлексивною, $\mathbf{A}^{(1,2,3,4)}$ є узагальненою оберненою матрицею Мура-Пенроуза і т.д.

Відмітимо наступні властивості матриці Мура-Пенроуза.

Лема 1.21. *[192] Для довільної матриці* $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ *існує єдина узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза* $\mathbf{A}^\dagger$.

Лема 1.22. *[175](про граничне зображення матриці Мура-Пенроуза) Якщо* $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$*, тоді* $\mathbf{A}^\dagger=\lim\limits_{\lambda\to 0}\mathbf{A}^*\left(\mathbf{AA}^*+\lambda\mathbf{I}\right)^{-1}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}+\lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{A}^*$*, де* $\lambda\in\mathbb{R}_+$*, – множина дійсних додатних чисел.*

Наслідок 1.8. *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$.

i) Якщо rank $\mathbf{A}=n$*, тоді* $\mathbf{A}^\dagger=\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*$.
ii) Якщо rank $\mathbf{A}=m$*, тоді* $\mathbf{A}^\dagger=\mathbf{A}^*\left(\mathbf{AA}^*\right)^{-1}$.
iii) Якщо rank $\mathbf{A}=n=m$*, тоді* $\mathbf{A}^\dagger=\mathbf{A}^{-1}$.

Лема 1.23. *[167] (про повнорангове зображення матриці Мура-Пенроуза) Якщо* $\mathbf{A}\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$*, тоді* $\mathbf{A}$ *має повноранговий розклад* $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$*, де* $\mathbf{B}\in\mathbb{C}^{m\times r}$ *та* $\mathbf{C}\in\mathbb{C}^{r\times n}$*, при цьому* $\mathbf{A}^\dagger=\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^\dagger=\mathbf{C}^*\left(\mathbf{CC}^*\right)^{-1}\left(\mathbf{B}^*\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^*$.

Лема 1.24. *(про сингулярний розклад матриці Мура-Пенроуза) Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *та існують унітарні матриці* $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *та* $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *такі, що*

$$\mathbf{A} = \mathbf{V\Sigma W}^*, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}.$$

Тут $\mathbf{D} = \operatorname{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r]$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, σ_i^2 *– ненульові власні значення матриці* $\mathbf{AA}^*$ *для всіх* $i = 1, \dots, r$. *Стовпці матриці* $\mathbf{V}$ *є власними векторами матриці* $\mathbf{AA}^*$, *а стовпці матриці* $\mathbf{W}^*$ *– власні вектори матриці* $\mathbf{AA}^*$. *Тоді* $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{W\Sigma}^\dagger\mathbf{V}^*$, *де* $\mathbf{\Sigma}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_r^{n\times m}$.

Сингулярний розклад матриці Мура-Пенроуза дає прямий метод її знаходження, але приводить до іншої складної задачі, (особливо, у випадку кватерніонових матриць), – знаходження власних векторів матриці.

Інший прямий метод можна отримати, давши визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. На відміну від оберненої матриці, яка має однозначно визначникове зображення через алгебричні доповнення її елементів, для узагальнених обернених матриць, зокрема матриці Мура – Пенроуза, існують різні визначникові зображення навіть для матриць над полем дійсних чи комплексних чисел внаслідок пошуку їхніх більш застосовних явних виразів (для матриці Мура – Пенроуза див., напр. [8, 10, 187, 233, 299]).

Будемо використовувати наступні позначення.

Нехай $\alpha := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ і $\beta := \{\beta_1, \dots, \beta_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ – підмножини порядку $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Тоді $|\mathbf{A}|_\beta^\alpha$ позначає мінор матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ рядки якого індексуються множиною α, а стовпці – β. Ясно, що тоді вираз $|\mathbf{A}|_\alpha^\alpha$ позначає головний мінор, рядки і стовпці якого індексуються множиною α. Алгебричне доповнення елемента a_{ij} матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ будемо позначати як $\frac{\partial}{\partial a_{ij}}|\mathbf{A}|$.

Для $1 \leq k \leq n$, через $L_{k,n} := \{\, \alpha : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)\,,\ 1 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k \leq n\}$ позначимо множину строго зростаючих послідовностей з k натуральних чисел вибраних з $\{1, \dots, n\}$. Нехай $N_k := L_{k,m} \times L_{k,n}$. Для фіксованого $\alpha \in L_{p,m}$,

$\beta \in L_{p,n}$, $1 \le p \le k$, покладемо

$$I_{k,\,m}\left(\alpha\right) := \{I :\ I \in L_{k,\,m}, I \supseteq \alpha\}, \quad J_{k,\,n}\left(\beta\right) := \{J :\ J \in L_{k,\,n}, J \supseteq \beta\},$$
$$N_k\left(\alpha, \beta\right) := I_{k,\,m}\left(\alpha\right) \times J_{k,\,n}\left(\beta\right).$$

Для випадку $i \in \alpha$ та $j \in \beta$, позначимо

$$I_{k,m}\{i\} := \{\alpha :\ \alpha \in L_{k,m}, i \in \alpha\}, J_{k,n}\{j\} := \{\beta :\ \beta \in L_{k,n}, j \in \beta\},$$
$$N_k\{i, j\} := I_{k,\,m}\{i\} \times J_{k,\,n}\{j\}.$$

Визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза, яке отримав Станіміровіч [233], використовуючи її повноранговий розклад, полягає в наступній теоремі.

Теорема 1.19. *Узагальнена обернена матриці Мура-Пенроуза* $\mathbf{A}^{\dagger} = (a_{ij}^{+})_{n\times m}$ *для матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *має наступне визначникове зображення*

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{(\alpha,\,\beta)\in N_r\{j,\,i\}} |\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial a_{j\,i}} |\mathbf{A}|_{\beta}^{\alpha}}{\sum\limits_{(\gamma,\,\delta)\in N_r} |\mathbf{A}^*|_{\gamma}^{\delta} \, |\mathbf{A}|_{\delta}^{\gamma}}, \ 1 \le i, j \le n. \tag{1.26}$$

Визначникове зображення (1.26), не дивлячись на те, що ця формула є громіздкою, дає прямий метод побудови матриці Мура-Пенроуза.

У розділі 2 даної дисертації отримано визначникові зображення узагальнених обернених матриць, зокрема, у пункті 2.1.2 отримано визначникові зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза у рамках теорії рядково-стовпцевих визначників, а в пункті 2.1.4 – комплексної матриці Мура-Пенроуза з використанням звичайних визначників.

У роботі [194] Прасад і Бапат отримали наступне узагальнення комплексної оберненої матриці Мура-Пенроуза.

Означення 1.18. *[194] Нехай* $\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{N}$ *ермітові додатноозначені матриці порядку* m *і* n*, відповідно. Для матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, зваженою узагальненою оберненою матрицею Мура-Пенроуза з вагами* $\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{N}$ *для матриці* $\mathbf{A}$ *(позначається як* $\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}$*) є єдина матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times m}$*, що задовольняє рівняння (1) і*

(2) Означення 1.17, а також наступні:

$$(3M)\ (\mathbf{MAX})^* = \mathbf{MAX};\quad (4N)\ (\mathbf{NXA})^* = \mathbf{NXA}.$$

Зокрема, коли $\mathbf{M} = \mathbf{I}_m$ and $\mathbf{N} = \mathbf{I}_n$, то матриця $\mathbf{X}$ є узагальненою оберненою матрицею Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^\dagger$.

Означення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза отримують, виходячи зі зваженого сингулярного розкладу (ЗСР) матриць. ЗСР для комплексних матриць було отримано Лоаном [161], використовуючи розклад Холецького, та Галба [91] для дійсних матриць через зважені ортогональні та псевдоортогональні матриці.

Визначникові зображення комплексної зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза були отримані Станіміровічем і Станковічем [234] через понорангову факторизацію, Лю, Ю та ін. методом обчислення визначників [158] та Лю, Жу та ін. [159] через граничне зображення, використовуючи метод вперше запропонований у [101].

У пункті 2.2.1 дисертації отримано зважений сингулярний розклад (ЗСР) кватерніонової матриці, на основі якого у рамках теорії рядково-стовпцевих визначників одержуються визначникові зображення зваженої кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза у пункті 2.2.3, а в пункті 2.2.4 – комплексної зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза.

В 1958 році Дразін [48] дав означення нової узагальненої оберненої матриці.

Означення 1.19. *Для матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *з індексом* $k = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$*, яке є найменшим невід'ємним цілим таким, що* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k$*, її узагальненою оберненою матрицею Дразіна є єдина матриця* $\mathbf{X}$ *, що задовольняє рівняння*

$$(2)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X};\ (5)\ \mathbf{AX} = \mathbf{XA};\ (6)\ \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{X} = \mathbf{A}^k. \tag{1.27}$$

Позначається як $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d$.

Зокрема, якщо $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$*, то матриця* $\mathbf{X}$ *називається груповою оберненою і позначається* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\#$.

Очевидно, що коли $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 0$, тоді $\mathbf{A}$ - оборотна, і $\mathbf{A}^d \equiv \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$.

Як один із важливих типів узагальнених обернених матриць, матриця Дразіна та її застосування грунтовно вивчаються у науковій літературі (див., напр. [10,22,68,96,285]). Матриця Дразіна має просте представлення, використовуючи жорданову форму.

Теорема 1.20. *[11] Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ має жорданову форму*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{N}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}, \tag{1.28}$$

де $\operatorname{rank}\mathbf{A}^k = \operatorname{rank}\mathbf{C}$ *і* $\mathbf{N}$ *– нільпотентна порядку k, і* $\mathbf{P}$ *– невироджена, тоді*

$$\mathbf{A}^d = \mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}. \tag{1.29}$$

Станіміровіч і Джорджевіч у роботі [232] отримали повноранговe, а на його основі і визначникове зображення комплексної узагальненої оберненої матриці Дразіна.

Теорема 1.21. *[232] Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$, $r_k = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k$. Припустимо, що $l \geq k$ – довільне натуральне число і $\mathbf{A}^l = \mathbf{P}_{A^l}\mathbf{Q}_{A^l}$ є повноранговою факторизацією матриці $\mathbf{A}^l$. Тоді матриця $\mathbf{Q}_{A^l}\mathbf{A}\mathbf{P}_{A^l}$ – оборотна і матрицю Дразіна можна подати як*

$$\mathbf{A}^d = \mathbf{P}_{A^l}\left(\mathbf{Q}_{A^l}\mathbf{A}\mathbf{P}_{A^l}\right)^{-1}\mathbf{Q}_{A^l}.$$

Теорема 1.22. *[232] Узагальнена обернена матриця Дразіна $\mathbf{A}^d = \left(a_{ij}^d\right)$ для довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ має наступне визначникове зображення*

$$a_{ij}^d = \frac{\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{N}_{r_k}(j,i)} \left|\mathbf{A}^l\right|_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial a_{ji}} \left|\mathbf{A}\right|_\alpha^\beta}{\sum_{(\gamma,\delta)\in\mathcal{N}_{r_k}} \left|\mathbf{A}^l\right|_\gamma^\delta \left|\mathbf{A}\right|_\delta^\gamma}, \quad 1 \leq i,j \leq n, \tag{1.30}$$

де $l \geq k = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$ і $r_k = \operatorname{rank}\mathbf{A}^l$.

Очевидно, що розглянуті узагальнені обернені є зовнішніми оберненими.

Означення 1.20. *[212] Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, T є підпростором $\mathbb{C}^n$ розмірності $t \leq r$ і S є підпростором $\mathbb{C}^m$ розмірності $m - t$, тоді матриця $\mathbf{A}$ має $\{2\}$-обернену $\mathbf{X}$ таку, що $\mathcal{R}(\mathbf{X}) = T$ і $\mathcal{N}(\mathbf{X}) = S$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{A}T \oplus S = \mathbb{C}^m$, у цьому випадку $\{2\}$-обернену $\mathbf{X}$ є единою і позначаеться $\mathbf{A}_{T,S}^{(2)}$.*

Відомо [246], що узагальнені обернені Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}$, зважена обернена Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$, узагальнена обернена Дразіна $\mathbf{A}^{d}$ та групова обернена матриця $\mathbf{A}^{\#}$ можуть бути подані як узагальнені обернені $\mathbf{A}^{(2)}_{T,S}$ із відповідно заданими просторами T і S так, що

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{(2)}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}^*),\mathcal{N}(\mathbf{A}^*)}, \quad \mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \mathbf{A}^{(2)}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}^\sharp),\mathcal{N}(\mathbf{A}^\sharp)},$$
$$\mathbf{A}^{d} = \mathbf{A}^{(2)}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}^k),\mathcal{N}(\mathbf{A}^k)}, \quad \mathbf{A}^{\#} = \mathbf{A}^{(2)}_{\mathcal{R}(\mathbf{A}),\mathcal{N}(\mathbf{A})}.$$

У пунктах 2.3.2 та 2.3.3 будуть отримані визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Дразіна, використовуючи рядково-стовпцеві визначники, у пункті 2.2.4 – комплексної матриці Дразіна.

Зауваження 1.13. *Відмітимо, що починаючи з 2000 р. з'являються роботи [32, 84–87, 89, 90], де розглядаються кватерніонові матричні рівняння та кватерніонові обернені чи узагальнені обернені матриці необхідні для їх розв'язку. Оскільки, алгебри кватерніонових та комплексних матриць мають мало відмінностей (серед яких відмітимо деякі властивості транспонованої матриці та некомутативні визначники (див. підрозділ 1.1) та ін.), то інколи означення та властивості узагальнених обернених без жодних змін поширюються на кватерніонові матриці. Але відмінності все ж є, що далі при необхідності буде вказано.*

Клайн і Гревілл [34] розширили поняття узагальненої оберненої комплексної матриці Дразіна з квадратних матриць до прямокутних.

Означення 1.21. *Для $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ і $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, W-зважена обернена Дразіна до $\mathbf{A}$ з вагою $\mathbf{W}$ є единим розв'язком рівнянь,*

$$(\mathbf{AW})^{k+1}\mathbf{XW} = (\mathbf{AW})^{k}, \; \mathbf{XWAWX} = \mathbf{X}, \; \mathbf{AWX} = \mathbf{XWA},$$

де $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$. Позначається як $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}}$.

Властивості комплексної W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна були досліджені, зокрема, у роботах [34,183,261–263,281]. У роботах [262,281], розглядаються загальні алгебричні структури W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна, які в пункті 2.4.1 будуть узагальнені на кватерніонові матриці.

Визначникові зображення комплексної W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна, були отримані через повноранговий розклад у роботі [158] та через граничне зображення у роботі [159]. Визначникові зображення кватерніонової W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна вдається одержати тільки засобом рядково-стовпцевих визначників. Крім визначникових зображень отриманих здобувачем і які будуть побудовані у пунктах 2.4.2, 2.4.3 та 2.4.4, нещодавно, у рамках теорії рядково-стовпцевих визначників визначникові зображення кватерніонової W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна одержав Сонг [226].

Означення 1.22. *Зовнішня обернена до матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$ із заданим правим стовпцевим простором T_1, правим ядром S_1, лівим стовпцевим простором T_2 і лівим ядром S_2 є розв'язком матричного рівняння з обмеженнями:*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) = T_1, \quad \mathcal{N}_r(\mathbf{X}) = S_1, \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) = T_2, \quad \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) = S_2,$$

і позначається як $\mathbf{A}^{(2)}_{(T_1,T_2),(S_1,S_2)}$.

Лема 1.25. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ і $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$. Тоді*

$$\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = (\mathbf{WAW})^{(2)}_{(\mathcal{C}_r((\mathbf{AW})^k),\mathcal{R}_l((\mathbf{WA})^k)),(\mathcal{N}_r((\mathbf{WA})^k),\mathcal{N}_l((\mathbf{AW})^k))}.$$

З Леми 1.25, слідує теорема про визначникове зображення $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}}$.

Теорема 1.23. *Нехай матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ мають індекс $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$ та $\mathrm{rank}(\mathbf{AW})^k = s$. Припустимо, що матриці $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{n-s}^{n\times(n-s)}$ і $\mathbf{C}^* \in \mathbb{H}_{m-s}^{m\times(m-s)}$ є матрицями повного рангу і такі, що*

$$\mathcal{R}_r(\mathbf{B}) = \mathcal{N}_r\left((\mathbf{WA})^k\right), \quad \mathcal{N}_l(\mathbf{B}) = \mathcal{R}_l\left((\mathbf{WA})^k\right), \tag{1.31}$$

$$\mathcal{R}_l(\mathbf{C}) = \mathcal{N}_l\left((\mathbf{AW})^k\right), \quad \mathcal{N}_r(\mathbf{C}) = \mathcal{R}_r\left((\mathbf{AW})^k\right). \tag{1.32}$$

Позначимо

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{WAW} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді W-зважена узагальнена обернена матриця Дразіна $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = (a)_{ij} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *має наступні визначникові зображення для всіх* $i = 1, \ldots, m$, *та* $j = 1, \ldots, n$,

$$a_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m+n-s} L_{ki} m^*_{kj}}{\det \mathbf{M}^*\mathbf{M}} = \frac{\sum_{k=1}^{m+n-s} m^*_{ik} R_{jk}}{\det \mathbf{M}\mathbf{M}^*}, \tag{1.33}$$

де L_{ij} *є лівим* (ij)*-им алгебричним доповненням матриці* $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ *і* R_{ij} *– правим* (ij)*-им алгебричним доповненням матриці* $\mathbf{M}\mathbf{M}^*$, *відповідно, для всіх* $i, j = 1, \ldots, m+n-s$.

Як можна побачити, у визначникових зображеннях (1.33), використовуються матриці $\mathbf{B}$ і $\mathbf{C}$, що задовольняють умови (1.31) та (1.32) і які не завжди легко підібрати. У підрозділі 2.4 будуть отримані визначникові зображення W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна для довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ по відношенню до $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, використовуючи елементи тільки цих двох матриць.

1.2.2. Комплексна серцевинна обернена матриця та її узагальнення. Поняття серцевинної оберненої комплексної матриці було введене Баксаларі та Тренклером [7] у 2010 році.

Означення 1.23. *[7] Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *називається серцевинною оберненою до матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{P}_A, \quad \mathcal{C}(\mathbf{X}) = \mathcal{C}(\mathbf{A}).$$

Коли така матриця $\mathbf{X}$ *існує, то вона позначається як* $\mathbf{A}^{\oplus}$.

Ракіч та ін. [200] узагальнили серцевинну обернену як елемента довільного кільця та ввели поняття дуальної серцевинної оберненої.

Означення 1.24. *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *називається дуальною серцевинною оберненою матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XA} = \mathbf{Q}_A, \quad \mathcal{R}(\mathbf{X}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}).$$

Коли така матриця $\mathbf{X}$ *існує, то вона позначається як* $\mathbf{A}_{\oplus}$.

Оскільки обидві ці серцевинні обернені матриці відрізняються лише в положенні щодо індукуючої матриці $\mathbf{A}$, ми пропонуємо називати їх правою $\mathbf{A}^{\textcircled{\#}}$ і лівою $\mathbf{A}_{\textcircled{\#}}$ серцевинними оберненими.

Подальші дослідження серцевинних обернених матриць розглядалися, зокрема, в роботах [98, 162, 165, 208, 209, 251, 275, 282]

У 2014 році К. Манджуната Прасадом та К.С. Мохана узагальнили поняття серцевинних обернених матриць.

Означення 1.25. *[195] Матриця $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ називається **EP-серцевинною оберненою** для матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ якщо вона задовольняє умови*

$$(i)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{A},\ \ (ii)\ \mathcal{C}(\mathbf{X}) = \mathcal{C}(\mathbf{X}^*) = \mathcal{C}(\mathbf{A}^d).$$

Така матриця позначається як $\mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}}$.

Відмітимо, що виконання умови (i) означає, що матриця $\mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}}$ є (зовнішною) узагальненою оберненою, але це ще не передбачає виконання умови (ii). Також вводиться поняття дуальної EP-серцевинною оберненою наступним чином.

Означення 1.26. *Матриця $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ називається **EP-$*$серцевинною оберненою** для матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{A},\ \ \mathcal{R}(\mathbf{X}) = \mathcal{R}(\mathbf{X}^*) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^d).$$

Така матриця позначається як $\mathbf{A}_{\textcircled{\dagger}}$.

Хоча завдяки [59], існує важлива кореляція між EP-серцевинною оберненою $\mathbf{A}_{\textcircled{\dagger}}$ матрицею та її дуальною $\mathbf{A}_{\textcircled{\dagger}}$, $(\mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}})^* = (\mathbf{A}^*)_{\textcircled{\dagger}}$, у пункті 3.2.2 ми дамо визначникові зображення цих обох матриць окремо.

К. Манджунат Прасад та К.С. Мохана [195] дали також необхідні та достатні умови існування *EP*-серцевинних обернених, які в наступному пункті узагальнюються для кватерніонових матриць. Має місце лема, що характеризує структуру *EP*-серцевинних обернених.

Лема 1.26. *[249] Якщо $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ і $k = \mathrm{Ind}(\mathbf{M})$, існує унітарна матриця $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, невироджена матриця $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{C}^{t\times t}$, $t = \mathrm{rank}\,(\mathbf{M}^k)$, і нільпотентна* *матриця* $\mathbf{M}_3 \in \mathbb{H}^{(n-t)\times(n-t)}$ *індексу* k *які трансформують* $\mathbf{M}$ *у форму*

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2\\ 0 & \mathbf{M}_3\end{bmatrix}\mathbf{P}^*. \tag{1.34}$$

Крім того,

$$\mathbf{M}^{\oplus} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{M}_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{P}^*. \tag{1.35}$$

В останні роки багато авторів досліджували *EP*-серцевинні обернені комплексних матриць, (див., напр. [60, 166, 196, 197, 249, 295]. Зокрема, отримано визначникові зображення *EP*-серцевинних обернених наступним чином.

У позначеннях з підрозділу 1.2 для матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}_r$ її *EP*-серцевинну обернену $\mathbf{A}^{\oplus} = (g_{ij})$ та $\mathbf{A}_{\oplus} = (f_{ij})$ покомпонентно можна подати як

$$g_{ij} = \left(\sum_{\alpha\in I_n} |\mathbf{A}|_{\gamma}^{\alpha}\right)^{-1} (\mathrm{tr}(C_r(\mathbf{A})))^{-1} \sum_{i\in\alpha,\ j\in\beta} |\mathbf{A}|_{\gamma}^{\alpha}\, |\mathbf{A}|_{\gamma}^{\beta}\, \frac{\partial}{\partial a_{ji}}\, |\mathbf{A}|_{\alpha}^{\beta}, \tag{1.36}$$

$$f_{ij} = \left(\sum_{\alpha\in I_n} |\mathbf{A}|_{\alpha}^{\gamma}\right)^{-1} (\mathrm{tr}(C_r(\mathbf{A})))^{-1} \sum_{i\in\alpha,\ j\in\beta} |\mathbf{A}|_{\alpha}^{\gamma}\, |\mathbf{A}|_{\beta}^{\gamma}\, \frac{\partial}{\partial a_{ji}}\, |\mathbf{A}|_{\alpha}^{\beta}, \tag{1.37}$$

У 2014 році С. Малик та Н. Томе [171] ввели поняття *DMP*-оберненої на множині комплексних матриць.

Означення 1.27. *[171] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$. *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *називається* ***DMP-оберненою*** *матриці* $\mathbf{A}$ *якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{XA} = \mathbf{A}^d\mathbf{A},\ \mathbf{A}^k\mathbf{X} = \mathbf{A}^k\mathbf{A}^{\dagger}. \tag{1.38}$$

Вона позначається як $\mathbf{A}^{d,\dagger}$.

Лема 1.27. *[171] Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *її DMP-обернена завжди існує та є единою, при цьому*

$$\mathbf{A}^{d,\dagger} = \mathbf{A}^d\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}. \tag{1.39}$$

DMP-обернена, як комплексна матриця та оператор в гільбертовому просторі, на протязі останніх років активно вивчалася [40, 155, 164, 276, 298]. Зокрема, отримано [40] наступний розклад *DMP*-оберненої, який може бути узагальнений для кватерніонових матриць.

Лема 1.28. *[40] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^k) = r$. *Нехай існує розклад Шура матриці* $\mathbf{A}$, *що має вигляд* (1.24). *Тоді* DMP-*обернена може бути виражена як*

$$\mathbf{A}^{d,\dagger} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} & \mathbf{X}_0\mathbf{T}_3\mathbf{T}_3^{\dagger} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^*,$$

де $\mathbf{X}_0 = \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{T}_1^{i-k-1}\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3^{k-1-i}$.

У роботі [179] Мітра та ін. ввели серцевинно-нільпотентний розклад матриці.

Лема 1.29. *[179] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Тоді* $\mathbf{A}$ *задається як сума двох матриць,* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, *де* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$ *такі, що*

(i) $\operatorname{rank}(\mathbf{A}_1) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}_1^2)$, *тобто* $\operatorname{Ind}(\mathbf{A}_1) \le 1$;
(ii) $\mathbf{A}_2$ *є нільпотентною;*
(iii) $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 0$.

На основі серцевинно-нільпотентного розкладу Мехдіпур та Салемі [173] нещодавно ввели нову узагальнену обернену матрицю.

Означення 1.28. *[173] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *має серцевинно-нільпотентний розклад.* ***CMP-оберненою*** *до матриці* $\mathbf{A}$ *називається матриця* $\mathbf{A}^{c,\dagger} := \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}_1\mathbf{A}^{\dagger}$.

Лема 1.30. *[173] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Матриця* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{c,\dagger}$ *є единою матрицею, яка задовольняє наступній системі рівнянь:*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A}_1,\ \mathbf{AX} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}^{\dagger},\ \mathbf{XA} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}_1.$$

Більш того, $\mathbf{A}^{c,\dagger} = \mathbf{Q}_A\mathbf{A}^d\ \mathbf{P}_A$.

У подальшому дослідженні *CMP*-оберненою матриці було встановлено її представлення на основі розкладу Шура матриці.

Лема 1.31. *[274] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^k) = r$. *Нехай існує розклад Шура матриці* $\mathbf{A}$, *що має вигляд* (1.24). *Тоді* CMP-*обернена може бути виражена як*

$$\mathbf{A}^{c\dagger} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Y}\mathbf{T}_1^{-k}\boldsymbol{\Phi}_k\mathbf{T}_3\mathbf{T}_3^{\dagger} \\ \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{T}_1^{-k}\boldsymbol{\Phi}_k\mathbf{T}_3\mathbf{T}_3^{\dagger} \end{bmatrix}\mathbf{U}^*,$$

де $\mathbf{\Phi}_k = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{T}_1^{j-1}\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3^{k-j}$, $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_3^{\dagger}\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2^{*}(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{*} + \mathbf{T}_2(\mathbf{I} - \mathbf{T}_3^{\dagger}\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_2^{*})^{-1}$ *та* $\mathbf{Y} = \mathbf{T}_1^{-1}(\mathbf{I}_r - \mathbf{T}_2\mathbf{X})$.

Серед інших властивостей *CMP*-оберненою відмітимо наступні.

Лема 1.32. *[173, 274]*

1. $\mathbf{A}^{c\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger,d}\mathbf{A}\mathbf{A}^{d,\dagger} = \mathbf{Q}_A\mathbf{A}^{d,\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger,d}\mathbf{P}_A$.

2. $\mathbf{A}^{c\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ind}\mathbf{A} \leq 1$.

Зауваження 1.14. *Щодо можливого існування дуальної матриці до CMP-оберненої, зазначимо наступне. Беручи до уваги* $\left(\mathbf{A}^{d}\right)^2\mathbf{A} = \mathbf{A}^{d}$,

$$\mathbf{P}_A\mathbf{A}^{d}\,\mathbf{Q}_A = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\left(\mathbf{A}^{d}\right)^2\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}^{d} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{d}\right)^2 = \mathbf{A}^{d}.$$

Феррейра та ін. у роботі [53] узагальнили *EP*-серцевинну обернену матрицю на множину прямокутних матриць.

Означення 1.29. *[53] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *та* $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *будуть ненульовими матрицями з* $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{WA}), \operatorname{Ind}(\mathbf{AW})\}$. *Тоді W-зважена EP-серцевинна обернена матриці* $\mathbf{A}$ *є єдиним розв'язком системи*

$$\mathbf{WAWX} = (\mathbf{WA})^k\left[(\mathbf{WA})^k\right]^{\dagger}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{R}_r\left((\mathbf{AW})^k\right).$$

Вона позначається як $\mathbf{A}^{\oplus,W}$.

Було також встановлено її представлення на основі розкладу Шура матриць.

Лема 1.33. *[53]Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *та* $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *будуть ненульовими матрицями з* $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{WA}), \operatorname{Ind}(\mathbf{AW})\}$. *Тоді існують унітарні матриці* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *та* $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *невироджені матриці* $\mathbf{A}_1, \mathbf{W}_1 \in \mathbb{C}^{t\times t}$ *та дві матриці* $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}^{(m-t)\times(n-t)}$ *та* $\mathbf{W}_2 \in \mathbb{C}^{(n-t)\times(m-t)}$ *такі, що* $\mathbf{A}_2\mathbf{W}_2$ *і* $\mathbf{W}_2\mathbf{A}_2$ *є нільпотентними з* $\operatorname{Ind}(\mathbf{AW})$ *та* $\operatorname{Ind}(\mathbf{WA})$, *відповідно, що мають розклади Шура*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_2\end{bmatrix}\mathbf{V}^{*},$$

тоді

$$\mathbf{A}^{\oplus,W} = \mathbf{U}\begin{bmatrix}(\mathbf{W}_1\mathbf{A}_1\mathbf{W}_1)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{V}^{*} = \mathbf{A}^{d,W}(\mathbf{WA})^k\left[(\mathbf{WA})^k\right]^{\dagger}.$$

У подальших дослідженнях EP-серцевинні оберненої, як комплексної матриці [61, 82, 163] та як оператора в гільбертовому просторі [181], були отримані її нові характеристичні представлення та застосування.

1.2.3. Застосування узагальнених обернених до розв'язку матричних рівнянь. Узагальнені обернені, і в першу чергу матриця Мура-Пенроуза, є ефективним інструментом розв'язку матричних рівнянь. Четвертий розділ присвячений застосуванню матриці Мура-Пенроуза до розв'язку матричних рівнянь та, на основі одержаних визначникових зображень, побудові їх аналогів правила Крамера.

Очевидним наслідком визначникового зображення оберненої матриці через класичну приєднану матрицю є правило Крамера, яке дає явний покомпонентний розв'язок невироджених систем лінійних рівнянь. Робінсон дав [204] елегантне доведення правила Крамера, яке викликало широкий інтерес до пошуку детермінантних формул для розв'язків систем лінійних рівнянь з обмеженнями, як невироджених, так і вироджених. Правила Крамера для псевдорозв'язків (розв'язків у найменших квадратах) систем комплексних лінійних рівнянь будувалися Бен-Ізраїлем [12], Вергезе [245], Вернером [267], Ченем [31], Джі [88], Вангом [247], та ін. При цьому для його побудови разом з коефіцієнтною матрицею використовувалися також допоміжні матриці.

Так, наприклад, у роботі [88] для системи $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, де $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, вводилася матриця $\mathbf{V} \in \mathbb{C}_{n-r}^{n\times(n-r)}$ така, що $\mathcal{R}(\mathbf{V}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$. Тоді правило Крамера для її нормального псевдорозв'язку $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{b}$ будується наступним чином

$$x_j = \frac{\det\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A} + \mathbf{VV}^*)(j \to \mathbf{A}^*\mathbf{b})\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A} + \mathbf{VV}^*)}. \tag{1.40}$$

Аналогічним чином, вводячи допоміжні матриці зі стовпцевих та нуль просторів та виражаючи узагальнені обернені матриці Мура-Пенроуза, Дразіна, та їх зважені через узагальнені обернені типу $\mathbf{A}^{(2)}_{T,S}$, Сонг та ін. [222,223] у рамках теорії стовпцево-рядкових визначників будують правила Крамера кватерніонового двостороннього матричного рівняння $\mathbf{AXB} = \mathbf{D}$.

У підрозділі 4.1, правила Крамера кватерніонового двостороннього матричного рівняння, його часткових, та особливих випадків отримуються з використанням тільки коефіцієнтних матриць.

У підрозділі 4.2, вивчається узагальнене кватерніонове матричне рівняння Сильвестра

$$\mathbf{AXB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}. \tag{1.41}$$

Матричні рівняння типу Сильвестра мають широке застосування у різних прикладних галузях, зокрема, в сингулярному системному контролі [211], системному дизайні [237], робастному керуванні [244], зворотньому зв'язку [238], нейронних мережах [291], теорії орбіт [239], комп'ютерному баченні [28], тощо. В силу свого широкого прикладного та теоретичного значення, рівняння Сильвестра ретельно вивчаються і щодо них є багато важливих результатів. Так, Мансур [172] вивчав умови розв'язувальності рівняння (1.41) в операторній алгебрі. Ліпінг [154] отримав необхідні та достатні умови для існування розв'язків аналогічного рівняння над тілом кватерніонів. Баксаларі та Кала [6] отримали загальний розв'язок комплексного рівняння (1.41), виражений у термінах узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза, що Вангом [252, 255] було розширено і для рівняння над тілом кватерніонів. Побудова правило Крамера для узагальненого кватерніонового матричного рівняння Сильвестра не тільки кватерніонового, але й комплексного досі не розглядалася.

У підрозділі буде отримано аналог правила Крамера, – визначникове зображення розв'яку, - узагальненого кватерніонового матричного рівняння Сильвестра (1.41), усіх його часткових випадків, коли один із доданків рівняння є, відносно невідомої матриці, одностороннім, та особливих випадків рівняння Сильвестра з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю. У підрозділі будуються аналоги правила Крамера для системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2, \end{cases}$$

усіх її часткових випадків, та особливих випадків для рівнянь з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю. Відмітимо, що правила Крамера для узагальненого кватерніонового матричного рівняння Сильвестра (1.41) та системи матричних рівнянь типу Сильвестра, представлені у дисертації, будуються вперше.

П'ятий розділ присвячений застосуванню матриці Дразіна, зважених матриці Мура-Пенроуза та Дразіна до розв'язків двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями та побудові їх аналогів правила Крамера, а також застосуванню серцевинної оберненої та її узагальнень до задач кватерніонової матричної мінімізації.

Так, зокрема, у багатьох ситуаціях дослідники використовують Дразіна обернений розв'язок (див., напр. [66,67,176,191,214,265]). Його характеризацію спочатку розглянемо на прикладі(правої) системи лінійних рівнянь

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}. \tag{1.42}$$

Наступні леми дають характеризацію Дразіна оберненого розв'язку $\mathbf{A}^d\mathbf{f}$ системи (1.42) над полем комплексних чисел.

Лема 1.34. *[265, Теорема 3.1] Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ з $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$. Тоді $\mathbf{A}^d\mathbf{f}$ є єдиним розв'язком у просторі $R(\mathbf{A}^k)$ системи*

$$\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^k\mathbf{f}. \tag{1.43}$$

Введемо поняття P-норми вектора як $\|\mathbf{x}\|_P = \|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}\|$ для всіх $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, де $\mathbf{P}$ – невироджена матриця, що трансформує матрицю $\mathbf{A}$ в її жорданову канонічну форму (1.28).

Лема 1.35. *[265, Теорема 3.2] Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ з $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$. Тоді $\widetilde{\mathbf{x}}$ задовольняє умову*

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}}\|_P = \min\nolimits_{\mathbf{x}\in\mathcal{N}(\mathbf{A})+\mathcal{R}(\mathbf{A}^{k-1})}\|\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_P$$

тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{\mathbf{x}}$ є розв'язком системи

$$\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^k\mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) + \mathcal{R}(\mathbf{A}^{k-1}).$$

Щобільше, Дразіна обернений розв'язок $\mathbf{A}^d\mathbf{f}$ є єдиним мінімальним по P-нормі розв'язком системи (1.43).

Відмітимо, що на відміну від Мура-Пенроуза оберненого розв'язку $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{f}$, Дразіна обернений розв'язок $\mathbf{A}^{d}\mathbf{f}$ може не бути розв'язком системи (1.42) навіть, якщо вона сумісна. Наступний наслідок дає його характеризацію по відношенню до системи (1.42).

Наслідок 1.9. *[258] В умовах Леми 1.35, якщо $\mathbf{f} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^k)$, тоді $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{d}\mathbf{f}$ є єдиним мінімальним по P-нормі розв'язком системи (1.42).*

Для обчислення Дразіна оберненого розв'язку було розроблено багато різних методів [177, 215, 216, 264, 286, 296], зокрема, у комплексних чи дійсному випадку, розглядалися різні підходи до побудови правила Крамера [159, 247, 248], але всі будуються аналогічно до (1.40) з використанням допоміжних матриць. У підрозділі 5.1 будуть побудовані правила Крамера для знаходження Дразіна оберненого розв'язку двостороннього кватерніонового матричного рівняння, використовуючи тільки коефіцієнтні матриці, а також отримано визначникове зображення розв'язку деяких кватерніонових сингулярних диференціальних матричних рівнянь. У роботі [24], Кемпбел та ін. застосували узагальнену обернену матрицю Дразіна до розв'язку деяких комплексних сингулярних диференціальних матричних рівнянь. У пункті 5.1.3, їх результати узагальнюються для відповідних кватерніонових сингулярних диференціальних матричних рівнянь з дійсною змінною, а в пункті 5.1.5 буде отримано визначникове зображення їх розв'язку. Вступ до теорії кватерніонових диференціальних рівнянь з дійсною змінною розглядається, для зручності, у пункті 5.1.2.

Подібним чином будуть отримані правила Крамера для зваженого Мура-Пенроуза оберненого розв'язку у підрозділі 5.2 та зваженого Дразіна оберненого розв'язку у підрозділі 5.3.

У підрозділі 5.4, використовуючи визначникові зображення кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень, досліджується деяка задача кватерніонно-матричної мінімізації. Відмітимо, що побудований метод зберігає свою новизну і при розгляді відповідних комплексних задач [185].

1.3. Висновки до розділу 1

У підрозділі 1 наведено необхідний теоретичний матеріал про кватерніонові алгебри та гамільтонову алгебру кватерніонів, зокрема. Розглянуто всі підходи та теоретичні засади визначника матриці з некомутючими елементами. Показано, що оскільки жоден з раніше введених некомутативних визначників не задовольняє властивість розкладу по будь-якому рядку чи стовпцю матриці, то й означити алгебричне доповнення елемента матриці, а звідси отримати визначникове зображення оберненої матриці через аналог класичної приєднаної матриці засобом таких визначників неможливо. Зроблено огляд основних властивостей стовпцевих і рядкових визначників кватерніонової квадратної матриці. Засобом апарату стовпцево-рядкових визначників одержано визначникове зображення оберненої матриці через аналог класичної приєднаної матриці, і як наслідок правило Крамера для лівих і правих систем лінійних рівнянь над тілом кватерніонів. Теорія стовпцево-рядкових кватерніонових визначників та визначникове зображення оберненої матриці, отримане в її рамках, були досліджені автором в дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук [303] та у роботах [104, 305]

У підрозділі також зроблено огляд результатів досліджень з теорії власних значень кватерніонових матриць. У підрозділі 2 даються відомості про теорію узагальнених обернених матриць над полем комплексних чисел та їх застосування у теорії матричних рівнянь.

Усі твердження, які не належать автору, наведено із зазначенням авторства і відповідного посилання на джерело.

РОЗДІЛ 2

Матриці Мура-Пенроуза і Дразіна та їх зважені над тілом кватерніонів

Узагальненою оберненою матрицею називають матрицю, яка в деякому сенсі може служити оберненою для більш широкого класу матриць, аніж оборотні. Узагальнена оборотність існує для довільної матриці, і коли матриця є оборотною, то її узагальнена обернена співпадає з її оберненою матрицею. У цьому розділі вводяться поняття та досліджуються основні властивості узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза і Дразіна та їх зважених над тілом кватерніонів, а також одержані прямі методи їх побудови, а саме їх визначникові зображення, отримані в рамках теорії стовпцево-рядкових визначників.

2.1. Кватерніонова матриця Мура-Пенроуза та її визначникові зображення

2.1.1. Кватерніонова матриця Мура-Пенроуза. У цьому пункті дамо означення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза як єдиного розв'язку рівнянь Пенроуза.

Ключове значення для означення оберненої матриці Мура-Пенроуза має Теорема 1.15 про сингулярний розклад матриці. Рівняння (1.25) можна записати як

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{W}^*, \tag{2.1}$$

де $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1^{-1}$ і $\mathbf{W}^* = \mathbf{U}_2^{-1}$ - унітарні кватерніонові матриці, а матриця

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{m\times n}.$$

Маємо леми аналогічні до випадку комплексних матриць (див., напр. [75]).

Лема 2.1. *Припустимо, що матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *має сингулярний розклад,* $\mathbf{A} = \mathbf{V\Sigma W}^*$. *Нехай* $\mathbf{A}^\dagger := \mathbf{W\Sigma}^\dagger\mathbf{V}^*$, *де* $\mathbf{\Sigma}^\dagger \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *одержується з* $\mathbf{\Sigma}$ *шляхом її транспонування та заміни її додатних елементів - оберненими. Тоді для* $\mathbf{A}^\dagger$ *справедливими є наступні умови*

$$\begin{gathered}(1)\ \mathbf{AA}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A},\ \ (2)\ \mathbf{A}^\dagger\mathbf{AA}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger,\\ (3)\ \left(\mathbf{AA}^\dagger\right)^* = \mathbf{AA}^\dagger,\ \ (4)\ \left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\right)^* = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Доведення. Відмітимо, що $\mathbf{\Sigma\Sigma}^\dagger = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{m\times m}$. Це означає, що $\mathbf{\Sigma\Sigma}^\dagger\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}$, тоді $\mathbf{AA}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{V\Sigma W}^* \cdot \mathbf{W\Sigma}^\dagger\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V\Sigma W}^* = \mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma\Sigma}^\dagger\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{W}^* = \mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{W}^* = \mathbf{A}$. Умова (1) доведена. Аналогічно доводиться умова (2).

За Теоремою 1.15, $\left(\mathbf{\Sigma}^T\right)^* = \mathbf{\Sigma}$ та $\left(\left(\mathbf{\Sigma}^\dagger\right)^T\right)^* = \mathbf{\Sigma}^\dagger$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{AA}^\dagger\right)^* &= \left(\mathbf{V\Sigma W}^*\mathbf{W\Sigma}^\dagger\mathbf{V}^*\right)^* = \left(\mathbf{V\Sigma I\Sigma}^\dagger\mathbf{V}^*\right)^* = \left(\mathbf{V}\left(\mathbf{\Sigma}^\dagger\right)^T\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{V}^*\right)^* =\\ &= \left(\mathbf{V}\left(\mathbf{\Sigma}^\dagger\right)^T\mathbf{W}^*\mathbf{W\Sigma}^T\mathbf{V}^*\right)^* = \mathbf{V\Sigma W}^*\mathbf{W\Sigma}^\dagger\mathbf{V}^* = \mathbf{AA}^\dagger.\end{aligned}$$

Отже умова (3) доведена. Умова (4) доводиться аналогічно. □

Лема 2.2. *Існує єдина матриця* $\mathbf{A}^\dagger$, *що задовольняє умовам (1)-(4) в (2.2).*

Доведення. Припустимо, що обидві матриці $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ і $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ задовольняє умовам (1)-(4) Леми 2.1. Тоді, маємо

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{BAB} = \mathbf{B}\left(\mathbf{AB}\right)^* = \mathbf{BB}^*\mathbf{A}^* = \mathbf{BB}^*\left(\mathbf{ACA}\right)^* = \mathbf{BB}^*\mathbf{A}^*\mathbf{C}^*\mathbf{A}^*\\ &= \mathbf{B}\left(\mathbf{AB}\right)^*\left(\mathbf{AC}\right)^* = \mathbf{BABAC} = \mathbf{BAC} = \mathbf{BACAC} = \left(\mathbf{BA}\right)^*\left(\mathbf{CA}\right)^*\mathbf{C}\\ &= \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*\mathbf{C}^*\mathbf{C} = \left(\mathbf{ABA}\right)^*\mathbf{C}^*\mathbf{C} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*\mathbf{C} = \left(\mathbf{CA}\right)^*\mathbf{C} = \mathbf{CAC} = \mathbf{C}.\end{aligned}$$

□

Очевидно, що умови (2.2) співпадають з умовами Пенроуза в Означенні 1.17 узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. З цього випливає її означення для кватерніонової матриці отримане на основі сингулярного розкладу матриці.

Означення 2.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. *Матриця* $\mathbf{A}^{\dagger}$ *називається її узагальненою оберненою матрицею Мура-Пенроуза, якщо вона задовольняє умови (2.2).*

Аналогічно до комплексного випадку [175], маємо теорему про граничне зображення матриці Мура-Пенроуза.

Теорема 2.1. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{A}^{\dagger}$ *- її узагальнена обернена Мура-Пенроуза, тоді*

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \lim_{\lambda\to 0}\mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} = \lim_{\lambda\to 0}\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*},$$

де $\lambda \in \mathbb{R}_{+}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{A} = \mathbf{V\Sigma W}^{*}$, тоді $\mathbf{A}^{*} = \mathbf{W\Sigma}^{*}\mathbf{V}^{*}$ і $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{W\Sigma}^{\dagger}\mathbf{V}^{*}$. Оскільки, $\mathbf{V}$ - унітарна, то $\mathbf{V}^{*} = \mathbf{V}^{-1}$. Маємо

$$\mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} = \mathbf{W\Sigma V}^{*}\cdot\left(\mathbf{V\Sigma}\cdot\mathbf{W}^{*}\mathbf{W}\cdot\mathbf{\Sigma V}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} =$$
$$= \mathbf{W\Sigma V}^{*}\cdot\left(\mathbf{V}\left(\mathbf{\Sigma\Sigma}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{V}^{*}\right)^{-1} = \mathbf{W\Sigma}\left(\mathbf{\Sigma\Sigma}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{V}^{*}.$$

Розглянемо матрицю

$$\mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{\Sigma\Sigma}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\lambda} & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & \frac{\lambda_r}{\lambda_r^2+\lambda} & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{\lambda\to 0}\mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{\Sigma\Sigma}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} = \mathbf{\Sigma}^{\dagger}$. Звідси випливає, що

$$\lim_{\lambda\to 0}\mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1} = \lim_{\lambda\to 0}\mathbf{W\Sigma}\left(\mathbf{\Sigma\Sigma}^{*} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{V}^{*} = \mathbf{A}^{\dagger}.$$

Подібним чином можна довести, що $\mathbf{A}^{\dagger} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*}$. □

З теореми очевидно випливає

Наслідок 2.1. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *тоді наступні твердження є справедливими.*

i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, *тоді* $\mathbf{A}^{\dagger} = \left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*}$.

ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, *then* $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}$.

iii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n = m$, *тоді* $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{-1}$.

2.1.2. Визначникові зображення кватерніонової матриці Мура-Пенроуза.

У цьому пункті дамо визначникові зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза.

Розглянемо допоміжні леми про ранги матриць.

Лема 2.3. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, *тоді* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right) \leq r$, *де* $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$ – *матриця, яку одержимо з* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *замінивши її* i*-й стовпець* j*-м стовпцем матриці* $\mathbf{A}^*$.

Доведення. Проведемо елементарні перетворення матриці $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$ домножуючи її справа на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_{ik}(-a_{jk})$, $k \neq j$. Матриця елементарних перетворень, $\mathbf{P}_{ik}\left(-a_{jk}\right)$, має (i,k)-м елементом $-a_{jk}$, одиниці на головній діагоналі, а інші елементи є нулями. Домножуючи довільну матрицю справа на матрицю $\mathbf{P}_{ik}\left(-a_{jk}\right)$, коли $k \neq j$, одержимо додавання до її k-го стовпця i-й стовпець домножений справа на $-a_{jk}$. Таким чином, маємо

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\cdot\prod_{k\neq i}\mathbf{P}_{ik}(-a_{jk}) = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} \sum\limits_{k\neq j} a^*_{1k}a_{k1} & \ldots & a^*_{1j} & \ldots & \sum\limits_{k\neq j} a^*_{1k}a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k\neq j} a^*_{nk}a_{k1} & \ldots & a^*_{nj} & \ldots & \sum\limits_{k\neq j} a^*_{nk}a_{kn} \end{bmatrix} \\ i-\text{ий} \end{array}.$$

Ця матриця має наступну факторизацію,

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \sum\limits_{k\neq j} a^*_{1k}a_{k1} & \ldots & a^*_{1j} & \ldots & \sum\limits_{k\neq j} a^*_{1k}a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k\neq j} a^*_{nk}a_{k1} & \ldots & a^*_{nj} & \ldots & \sum\limits_{k\neq j} a^*_{nk}a_{kn} \end{bmatrix} \\ i-\text{ий} \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \ldots & a^*_{1m} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & \ldots & a^*_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^*_{n1} & a^*_{n2} & \ldots & a^*_{nm} \end{bmatrix} \begin{array}{cc}\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} & j-\text{ий}. \\ i-\text{ий} & \end{array}$$

Позначимо

$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ j-\text{ий}. \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & i-\text{ий} & & \phantom{a_{mn}} \end{array} & \end{array}$$

Матриця $\tilde{\mathbf{A}}$ отримується з матриці $\mathbf{A}$ заміною всіх елементів її j-го рядка та i-го стовпця нулями за виключенням (j,i)-го елемента, котрий дорівнює 1. Оскільки, елементарні перетворення матриці не змінюють її ранг, а ранг матричного добутку не перевищує рангу кожного множника, то $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right) \leq \min\left\{\operatorname{rank}\mathbf{A}^*, \operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}}\right\}$. Очевидно, що $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}} \geq \operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^*$. Тоді за Зауваженням 1.8, маємо $\operatorname{rank}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}$, що й доводить лему. □

Аналогічно доводиться наступна лема.

Лема 2.4. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, *тоді* $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{i\,.}\left(\mathbf{a}^*_{j.}\right) \leq r$.

До позначень, які були введені у підрозділі 1.2.1 додамо наступні. Через $\mathbf{A}^{\alpha}_{\beta}$ позначимо підматрицю матриці $\mathbf{A}$ з рядками індексованими множиною α і стовпцями, які індексуються множиною β. Тоді $\mathbf{A}^{\alpha}_{\alpha}$ - її головна підматриця, рядки і стовпці якої індексуються множиною α. Якщо $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\left(n, \mathbb{H}\right)$ - ермітова, тоді $|\mathbf{A}|^{\alpha}_{\alpha}$ - її відповідний головний мінор.

Лема 2.5. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $t \in \mathbb{R}$, *тоді*

$$\operatorname{cdet}_i\left(t\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right) = c_1^{(ij)}t^{n-1} + c_2^{(ij)}t^{n-2} + \dots + c_n^{(ij)}, \tag{2.3}$$

де $c_n^{(ij)} = \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$ *і* $c_k^{(ij)} = \sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$ *для всіх* $k = 1,\dots,n-1$, $i = 1,\dots,n$ *та* $j = 1,\dots,m$.

Доведення. Позначимо через $\mathbf{b}_{.\,i}$ - i-ий стовпець ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A} =: \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$. Розглянемо ермітову матрицю $\left(t\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{b}_{.i}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Ця матриця відрізняється від матриці $\left(t\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)$ елементом b_{ii}. Беручи до уваги Теорему

1.17, одержимо

$$\det\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{b}_{.i}\right)=d_1t^{n-1}+d_2t^{n-2}+\cdots+d_n, \tag{2.4}$$

де $d_k=\sum\limits_{\beta\in J_{k,n}\{i\}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta$ сума всіх головних мінорів порядку k, що містять елементи i-го стовпця і $d_n=\det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)$. Очевидно, що

$$\mathbf{b}_{.i}=\begin{bmatrix}\sum\limits_l a_{1l}^*a_{li}\\ \sum\limits_l a_{2l}^*a_{li}\\ \vdots\\ \sum\limits_l a_{nl}^*a_{li}\end{bmatrix}=\sum_l \mathbf{a}_{.l}^*a_{li},$$

де $\mathbf{a}_{.l}^*$ – l-й вектор-стовпець матриці $\mathbf{A}^*$ для всіх $l=1,\ldots,m$. Беручи до уваги Теореми 1.3 і Леми 1.3 та 1.6, з одного боку одержимо

$$\begin{gathered}\det\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{b}_{.i}\right)=\operatorname{cdet}_i\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{b}_{.i}\right)=\\ =\sum_l\operatorname{cdet}_i\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.l}\left(\mathbf{a}_{.l}^*a_{li}\right)=\sum_l\operatorname{cdet}_i\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.l}^*\right)\cdot a_{li}\end{gathered} \tag{2.5}$$

З іншого боку, змінивши порядок підсумовування,

$$\begin{gathered}d_k=\sum_{\beta\in J_{k,n}\{i\}}\det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_\beta^\beta=\sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_\beta^\beta=\\ \sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}}\sum_l\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.l}^*a_{l\,i}\right)\right)_\beta^\beta=\sum_l\sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.l}^*\right)\right)_\beta^\beta\cdot a_{li}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Підставивши (2.5) та (2.6) в (2.4), та прирівнявши коефіцієнти при $a_{l\,i}$ коли $l=j$, одержимо рівність (2.3). □

Наступна лема доводиться аналогічно.

Лема 2.6. *Якщо* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $t\in\mathbb{R}$, *тоді*

$$\operatorname{rdet}_j(t\mathbf{I}+\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{a}_{i.}^*)=r_1^{(ij)}t^{n-1}+r_2^{(ij)}t^{n-2}+\cdots+r_n^{(ij)},$$

де $r_n^{(ij)}=\operatorname{rdet}_j(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{a}_{i.}^*)$ *і* $r_k^{(ij)}=\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{a}_{i.}^*)\right)_\alpha^\alpha$ *для всіх* $k=1,\ldots,n-1$, $i=1,\ldots,n$ *та* $j=1,\ldots,m$.

Опираючись на розглянуті вище допоміжні леми маємо основну теорему.

Теорема 2.2. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, *тоді узагальнена обернена матриці Мура-Пенроуза* $\mathbf{A}^{\dagger} = \left(a_{ij}^{\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *має визначникові зображення*

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^*\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{2.7}$$

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{i\,.}^*\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{2.8}$$

Доведення. Спочатку доведемо формулу визначникового зображення (2.7). За Теоремою 2.1, маємо $\mathbf{A}^{\dagger} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*$. Матриця $\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовою матрицею повного рангу. За Теоремою 1.4 вона має обернену, яку ми подамо як ліву обернену матрицю

$$\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} & L_{2n} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix},$$

де L_{ij} - ліве ij-те алгебричне доповнення матриці $\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Тоді,

$$\begin{gathered} \left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^* = \\ = \frac{1}{\det\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)} \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k1}a_{k1}^* & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k1}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k1}a_{km}^* \\ \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k2}a_{k1}^* & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k2}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{k2}a_{km}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} L_{kn}a_{k1}^* & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{kn}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} L_{kn}a_{km}^* \end{bmatrix}. \end{gathered}$$

Використовуючи означення лівого алгебричного доповнення, отримаємо

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \lim_{\lambda\to 0} \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{cdet}_1(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}(\mathbf{a}_{.1}^*)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})} & \dots & \frac{\operatorname{cdet}_1(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}(\mathbf{a}_{.m}^*)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\operatorname{cdet}_n(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.n}(\mathbf{a}_{.1}^*)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})} & \dots & \frac{\operatorname{cdet}_n(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.n}(\mathbf{a}_{.m}^*)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

За Теоремою 1.17, $\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + d_2\lambda^{n-2} + \ldots + d_n$, де $d_k = \sum\limits_{\beta\in J_{k,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta$ – сума головних мінорів матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ порядку k для всіх $k = 1,\ldots,n-1$ і $d_n = \det\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Оскільки $\operatorname{rank}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A} = r$ і $d_n = d_{n-1} = \ldots = d_{r+1} = 0$, то $\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + d_2\lambda^{n-2} + \ldots + d_r\lambda^{n-r}$.

Аналогічно, використовуючи рівняння (2.3), одержимо

$$\operatorname{cdet}_i(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right) = c_1^{(ij)}\lambda^{n-1} + c_2^{(ij)}\lambda^{n-2} + \ldots + c_n^{(ij)},$$

де $c_k^{(ij)} = \sum\limits_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta$ для всіх $k = 1,\ldots,n-1$ та $c_n^{(ij)} = \operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$, для всіх $i = 1,\ldots,n$ та $j = 1,\ldots,m$.

Доведемо, що $c_k^{(ij)} = 0$ коли $k \geq r+1$ для всіх $i = 1,\ldots,n$ та $j = 1,\ldots,m$. За Лемою 2.3 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right) \leq r$, тоді матриця $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$ має не більше r право-лінійно незалежних стовпців.

Розглянемо $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta$, коли $\beta \in J_{k,n}\{i\}$, – головну підматрицю матриці $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)$ порядку $k \geq r+1$. Видаливши її i-тий рядок та стовпець, одержимо головну підматрицю матриці порядку $k-1$ матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Позначимо її через $\mathbf{M}$. Можливі наступні випадки.

1. Якщо $k = r+1$ і $\det\mathbf{M} \neq 0$. В цьому випадку всі стовпці матриці $\mathbf{M}$ право-лінійно незалежними. Доповнення всіх їх по одній координаті до стовпців матриці $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta$ збереже їх праву лінійну незалежність. Отже, вони є базисними для матриці $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta$ і i-й стовпець є правою лінійною комбінацією її базисних стовпців. За Лемою 1.11, з цього випливає, що $\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta = 0$, коли $\beta \in J_{k,n}\{i\}$ і $k \geq r+1$.

2. Якщо $k = r+1$ і $\det\mathbf{M} = 0$, тоді p, $(p < k)$, стовпців є базисними для матриці $\mathbf{M}$ і для матриці $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta$. Тоді за Теоремою 1.6 і Лемою 1.11, одержимо $\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta = 0$.

3. Якщо $k > r+1$, тоді з Теореми 1.5 випливає, що $\det\mathbf{M} = 0$ і p, $(p < k-1)$, стовпців є базисними в обох матрицях, $\mathbf{M}$ і $\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta$. Тоді за Теоремою 1.6 і Лемою 1.11, одержимо, що

$$\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)_\beta^\beta = 0.$$

Таким чином у всіх випадках ми маємо, що $\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}=0$, коли $\beta\in J_{k,n}\{i\}$ і $r+1\le k<n$. Звідси, якщо $r+1\le k<n$, тоді

$$c_k^{(ij)}=\sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}=0,\quad c_n^{(ij)}=\mathrm{cdet}_i\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)=0$$

для всіх $i=1,\ldots,n$ та $j=1,\ldots,m$. Отже,

$$\mathrm{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.\,j}\right)=c_1^{(ij)}\lambda^{n-1}+c_2^{(ij)}\lambda^{n-2}+\ldots+c_r^{(ij)}\lambda^{n-r}.$$

Підставивши ці значення в матрицю з (2.9), одержимо

$$\mathbf{A}^{\dagger}=\lim_{\lambda\to 0}\begin{bmatrix}\frac{c_1^{(11)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(11)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}} & \ldots & \frac{c_1^{(1m)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(1m)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{c_1^{(n1)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(n1)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}} & \ldots & \frac{c_1^{(nm)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(nm)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\alpha^{n-r}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{c_r^{(11)}}{d_r} & \ldots & \frac{c_r^{(1m)}}{d_r}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{c_r^{(n1)}}{d_r} & \ldots & \frac{c_r^{(nm)}}{d_r}\end{bmatrix}.$$

Тут $c_r^{(ij)}=\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$ і $d_r=\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}$. Таким чином, отримали визначникове зображення $\mathbf{A}^{\dagger}$ за формулою (2.7).

Аналогічно, використавши Леми 2.4 і 2.6 та Теореми2.1 і 1.17, можна довести визначникове зображення (2.8). □

Зауваження 2.1. *Визначникове зображення (2.7) доведено опираючись на Теореми 2.1 про граничне зображення узагальненої оберненої матриці* $\mathbf{A}^{\dagger}$ *та 1.17 – про характеристичний многочлен, Леми про аналог характеристичного многочлена 2.5 та 2.3 – про ранг матриці, аналогічно маємо для визначникового зображення (2.8). Таким чином розглянуті Леми та Теореми сформували метод побудови визначникового зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза, який назвемо гранично-ранговим. Для окремих випадків знаходження визначникового зображення інших узагальнених обернених матриць будуть використовуватися аналогічні методи.*

Зауваження 2.2. *Якщо* $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}=n$, *тоді за Наслідком 2.1,* $\mathbf{A}^{\dagger}=\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*$. *Розглядаючи* $\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}$ *як ліву обернену, одержимо*

$$\mathbf{A}^{\dagger}=\frac{1}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}\begin{bmatrix}\mathrm{cdet}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,1}\left(\mathbf{a}^*_{.1}\right) & \ldots & \mathrm{cdet}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,1}\left(\mathbf{a}^*_{.m}\right)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathrm{cdet}_{\mathrm{n}}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,\mathrm{n}}\left(\mathbf{a}^*_{.1}\right) & \ldots & \mathrm{cdet}_n(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,n}\left(\mathbf{a}^*_{.m}\right).\end{bmatrix}\qquad(2.10)$$

Якщо $m > n$, тоді за Теоремою 2.2 для $\mathbf{A}^{\dagger}$ маємо(2.8) так само.

Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, *тоді за Наслідком 2.1,* $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}$. *Розглядаючи* $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}$ *як праву обернену, маємо*

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \frac{1}{\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})}\begin{bmatrix} \operatorname{rdet}_1(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{1.}\left(\mathbf{a}^{*}_{1.}\right) & \ldots & \operatorname{rdet}_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{m.}\left(\mathbf{a}^{*}_{1.}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{rdet}_1(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{1.}\left(\mathbf{a}^{*}_{n.}\right) & \ldots & \operatorname{rdet}_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{m.}\left(\mathbf{a}^{*}_{n.}\right) \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Якщо $m < n$, тоді за Теоремою 2.2 для $\mathbf{A}^{\dagger}$ маємо (2.7).

Щоб уніфікувати ці два повнорангові випадки, для довільної повнорангової матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r}$, вектор-рядка $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^{1\times m}$, та вектор-стовпця $\mathbf{c} \in \mathbb{H}^{n\times 1}$, покладемо

– *коли $r = m$*

$$\operatorname{rdet}_i\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{i.}\left(\mathbf{b}\right)\right) = \sum_{\alpha\in I_{m,m}\{i\}} \operatorname{rdet}_i\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{i.}\left(\mathbf{b}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha},$$

$$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right) = \sum_{\alpha\in I_{m,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right|^{\alpha}_{\alpha}, \quad i = 1,\ldots,m;$$

– *коли $r = n$*

$$\operatorname{cdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)_{.j}\left(\mathbf{c}\right)\right) = \sum_{\beta\in J_{n,n}\{j\}} \operatorname{cdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)_{.j}\left(\mathbf{c}\right)\right)^{\beta}_{\beta},$$

$$\det\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right) = \sum_{\beta\in J_{n,n}} \left|\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

2.1.3. Визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза для деяких особливих матриць. В цьому пункті розглянемо визначникове зображення матриці Мура-Пенроуза для ермітово-спряженої, η-ермітово-спряженої та проективних матриць для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$.

Спочатку відмітимо, що $(\mathbf{A}^{*})^{\dagger} = (\mathbf{A}^{\dagger})^{*}$. Через символьну еквівалентність, будемо також використовувати позначення $\mathbf{A}^{\dagger,*} := (\mathbf{A}^{*})^{\dagger}$. За Лемою 1.9, очевидно, випливає наступна лемма про визначникове зображення для ермітово-спряженої матриці.

Лема 2.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$. *Тоді для її ермітово-спряженої* $\mathbf{A}^* \in \mathbb{H}_r^{n\times m}$ *визначниковими зображеннями її матриці Мура-Пенроуза* $(\mathbf{A}^*)^\dagger = \left((a_{ij}^*)^\dagger\right)$ *є*

$$(a_{ij}^*)^\dagger = \overline{(a_{ji})^\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}\left(\mathbf{a}_{i\,.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\alpha^\alpha} \tag{2.12}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.i}(\mathbf{a}_{.j})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\beta^\beta}. \tag{2.13}$$

Лема 2.8. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, *то для проективної матриці* $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} =: \mathbf{Q}_A = (q_{ij})_{n\times n}$ *маємо наступні визначникові зображення*

$$q_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\dot{\mathbf{a}}_{.j}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} = \tag{2.14}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}\left(\dot{\mathbf{a}}_{i.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\alpha^\alpha}, \tag{2.15}$$

де $\dot{\mathbf{a}}_{.j}$ – j*-й стовпець і* $\dot{\mathbf{a}}_{i.}$*-й рядок матриці* $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

Доведення. Використовуючи (2.7) для визначникового зображення $\mathbf{A}^\dagger = \left(a_{ij}^\dagger\right)$ і домноживши її справа на $\mathbf{A}$, одержимо

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}^\dagger \cdot a_{kj} = \sum_k \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.k}^*\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} \cdot a_{kj} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \sum\limits_k \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.k}^*\right)\right)_\beta^\beta \cdot a_{kj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta}$$

Звідси, в силу того, що $\sum\limits_k \mathbf{a}_{.j}^* \cdot a_{kj} = \dot{\mathbf{a}}_{.j}$, випливає (2.14).

Оскільки, проективна матриця $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} =: \mathbf{Q}_A = (q_{ij})$ - ермітова, то $q_{ij} = \overline{q_{ji}}$ для всіх $i \neq j$. Звідси, в силу того, що $\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta = \sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\alpha^\alpha$ та

$$\overline{\operatorname{cdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\dot{\mathbf{a}}_{.i}\right)\right)} = \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}\left(\dot{\mathbf{a}}_{i.}\right)\right),$$

слідує (2.15). $\square$

За аналогією можна довести наступну лему.

Лема 2.9. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, *то для проектора* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} =: \mathbf{P}_A = (p_{ij})_{m\times m}$ *маємо*

$$p_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{i.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}} = \tag{2.16}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.i}(\ddot{\mathbf{a}}_{.j}))_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\beta}^{\beta}}, \tag{2.17}$$

де $\ddot{\mathbf{a}}_{i.}$*-й рядок і* $\ddot{\mathbf{a}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{A}\mathbf{A}^* \in \mathbb{H}^{m\times m}$.

Якщо матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{n\times n}$ – ермітова, то, очевидно, що

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{*,\dagger}\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger})^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{P}_A.$$

У цьому випадку для проективної матриці $\mathbf{Q}_A = \mathbf{P}_A$, очевидно, є справедливим

Наслідок 2.2. *Якщо матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{n\times n}$ *– ермітова, то для проективної матриці* $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = (q_{ij})_{n\times n}$ *маємо наступні визначникові зображення*

$$q_{ij} = p_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^2|_{\beta}^{\beta}} = \tag{2.18}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{i.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}} |\mathbf{A}^2|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{2.19}$$

де $\mathbf{a}_{.j}^{(2)}$ *–* j*-й стовпець і* $\mathbf{a}_{i.}^{(2)}$*-й рядок матриці* $\mathbf{A}^2$.

Відмітимо, що $\mathbf{P}_A$ є ортогональним проектором на правий стовпцевий простір $\mathcal{C}_r(\mathbf{A})$, а $\mathbf{Q}_A$ – на правий стовпцевий простір $\mathcal{C}_r(\mathbf{A}^*)$. Надалі також будуть використовуватися ортогональні проектори $\mathbf{L}_A = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_A$ на правий нуль-простір $\mathcal{N}_r(\mathbf{A})$ та $\mathbf{R}_A = \mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{I}_m - \mathbf{P}_A$ на правий нуль-простір $\mathcal{N}_r(\mathbf{A}^*)$.

Зауваження 2.3. *Для довільної* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *за означенням, класичною приєднаною матрицею є матриця така, що виконується умова* $\mathrm{Adj}\,[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathrm{Adj}\,[\mathbf{A}] = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$.

Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. *Якщо* $\mathrm{rank}\,\mathbf{A} = n$, *тоді за Наслідком 2.1, маємо* $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. *За формулою (2.10)б* $\mathbf{A}^{\dagger} = \frac{\mathbf{L}}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}$, *де* $\mathbf{L} = \left[\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)\right]_{n\times m}$, *тоді* $\mathbf{LA} = \det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{I}_n$. *Це означає, що матриця* $\mathbf{L} =: \mathrm{Adj}\,_L[\mathbf{A}]$ *- ліва класична приєднана матриця для матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *тобто*

$$\mathrm{Adj}\,_L[\mathbf{A}] = \left[\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)\right]_{n\times m}.$$

Якщо $\mathrm{rank}\,\mathbf{A} = m$, *тоді, аналогічно, за Наслідком 2.1, правою класичною приєднаною матрицею для* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *покладемо,*

$$\mathrm{Adj}\,_R[\mathbf{A}] := \left[\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{a}^*_{i.})\right)\right]_{m\times n}.$$

Оскільки в цьому випадку, $\mathbf{A} \cdot \mathrm{Adj}\,_R[\mathbf{A}] = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{I}$.

Якщо $\mathrm{rank}\,\mathbf{A} = r < \min\{m, n\}$, *тоді аналогом лівої класичної приєднаної матриці для* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *використовуючи визначникове зображення (2.7), маємо*

$$\mathrm{Adj}\,_L[\mathbf{A}] := \left[\sum_{\alpha\in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right]_{n\times m}.$$

Оскільки, власні значення проективної матриці є тільки 1 and 0, тоді існує така унітарна матриця $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *що*

$$\mathrm{Adj}_L[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{A} = \left[\sum_{\alpha\in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}^*_{.j}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \cdot \mathbf{A} = \sum_{\alpha\in I_{r,\,n}} |(\mathbf{A}^*\mathbf{A})|^{\alpha}_{\alpha} \cdot \mathbf{Q}_A =$$
$$= \sum_{\alpha\in I_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\alpha}_{\alpha} \cdot \mathbf{U}\mathrm{diag}\,[1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]\,\mathbf{U}^*.$$

Якщо $\mathrm{rank}\,\mathbf{A} = r < \min\{m, n\}$, *тоді аналогом правої класичної приєднаної матриці для* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *використовуючи визначникове зображення (2.8), одержимо*

$$\mathrm{Adj}\,_R[\mathbf{A}] := \left[\sum_{\alpha\in I_{r,\,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}\,(\mathbf{a}^*_{i.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\right]_{n\times m}.$$

Аналогічно попередньому, існує така унітарна матриця $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, *що*

$$\mathbf{A}\cdot \mathrm{Adj}_{R}[\mathbf{A}] = \mathbf{A}\cdot \left[\sum_{\alpha\in I_{r,\,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}\left(\mathbf{a}^*_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] = \sum_{\alpha\in J_{r,\,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|^{\alpha}_{\alpha}\cdot \mathbf{P}_A =$$
$$= \sum_{\alpha\in J_{r,\,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|^{\alpha}_{\alpha}\cdot \mathbf{V}\,\mathrm{diag}(1,\ldots,1,0,\ldots,0)\,\mathbf{V}^*.$$

Останнім часом важливі застосування, зокрема, у лінійному моделюванні та аналізі конвергенції, у статистичній обробці сигналів (див. напр. [240, 242]), знаходять η-ермітові матриці.

Нехай $\eta \in \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ і покладемо, $\mathbf{A}^{\eta} = -\eta\mathbf{A}\eta$ і $\mathbf{A}^{\eta*} = -\eta\mathbf{A}^*\eta$. Оскільки для довільних матриць $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ і $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times q}$, маємо

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\eta*} = -\eta\left(\mathbf{A}^*\eta + \mathbf{B}^*\eta\right)^*\eta = \mathbf{A}^{\eta*} + \mathbf{B}^{\eta*}$,
2. $(\mathbf{A}\mathbf{D})^{\eta*} = -\eta\mathbf{D}^*\eta(-\eta)\mathbf{A}^*\eta = \mathbf{D}^{\eta*}\mathbf{A}^{\eta*}$,
3. $(\mathbf{A}^{\eta*})^{\eta*} = -\eta\left(\mathbf{A}^{\eta*}\right)^*\eta = -\eta\left(-\eta\mathbf{A}^*\eta\right)^*\eta = \mathbf{A}$.

Отже, матричне відображення $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^{\eta*}$ є інволюцією.

Означення 2.2. *[76, 242, 279] Матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається* η*-ермітовою та* η*-косо-ермітовою, якщо* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\eta*} = -\eta\mathbf{A}^*\eta$ *та* $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\eta*} = \eta\mathbf{A}^*\eta$, *відповідно, де* $\eta \in \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.

Зауваження 2.4. *Оскільки для довільної кватерніонової одиниці* $\eta_l \in \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, *де* $l = 1,2,3$, *та* $q = a_0 + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3$,

$$q^{\eta_1} := -\,\eta_1 q\eta_1 = a_0 + a_1\eta_1 - a_2\eta_2 - a_3\eta_3,$$
$$q^{-\eta_1} := \eta_1 q\eta_1 = -a_0 - a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3,$$

тоді елементи головної діагоналі η_1*-ермітової матриці* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\eta_1*} = \left(a^{\eta_1*}_{ij}\right)$ *виражаються як* $a^{\eta_1*}_{ii} = a_0 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3$, *а пара елементів симетричних відносно головної діагоналі є такою*

$$a^{\eta_1*}_{ij} = a_0 + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3,$$
$$a^{\eta_1*}_{ji} = a_0 - a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3.$$

Аналогічно, елементи головної діагоналі η_1-косо-ермітової матриці $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\eta_1 *} = \left(a_{ij}^{-\eta_1 *}\right)$ є $a_{ii}^{-\eta_1 *} = a_1\eta_1$, а пара елементів симетричних відносно головної діагоналі може бути виражена як

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^{-\eta_1 *} &= a_0 + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3, \\
a_{ji}^{-\eta_1 *} &= -a_0 + a_1\eta_1 - a_2\eta_2 - a_3\eta_3.
\end{aligned}
$$

де $a_l \in \mathbb{R}$ для всіх $l = 0, \ldots, 3$.

З Означень 1.6 та 1.7 для довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ випливає, що

$$\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}^{\eta} = \mathrm{rdet}_i\, (-\eta \mathbf{A} \eta) = -\eta (\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A})\eta, \tag{2.20}$$

$$\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}^{\eta} = \mathrm{cdet}_i\, (-\eta \mathbf{A} \eta) = -\eta (\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A})\eta, \tag{2.21}$$

$$\mathrm{rdet}_i\, (-\mathbf{A}^{\eta}) = \mathrm{rdet}_i\, (\eta \mathbf{A} \eta) = (-1)^{n-1}\eta (\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A})\eta, \tag{2.22}$$

$$\mathrm{cdet}_i\, (-\mathbf{A}^{\eta}) = \mathrm{cdet}_i\, (\eta \mathbf{A} \eta) = (-1)^{n-1}\eta (\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A})\eta \tag{2.23}$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$. Звідси, за Лемою 1.9, слідує

Лема 2.10. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Тоді*

$$
\begin{gathered}
\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}^{\eta *} = -\eta (\overline{\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}})\eta,\ \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}^{\eta *} = -\eta (\overline{\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}})\eta, \\
\mathrm{rdet}_i\, (-\mathbf{A}^{\eta *}) = (-1)^{n-1}\eta (\overline{\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}})\eta,\ \mathrm{cdet}_i\, (-\mathbf{A}^{\eta *}) = (-1)^{n-1}\eta (\overline{\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}})\eta,
\end{gathered}
$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$

Лемма 2.10 дає наступні властивості η-ермітової та η-косо-ермітової матриць.

Лема 2.11. *Якщо матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є η-ермітовою, тоді*

$$\mathrm{rdet}_i \mathbf{A} = -\eta (\overline{\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}})\eta, \qquad \mathrm{cdet}_i \mathbf{A} = -\eta (\overline{\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}})\eta.$$

Якщо матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є η-косо-ермітовою, тоді

$$\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A} = (-1)^{n-1}\eta (\overline{\mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}})\eta, \qquad \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A} = (-1)^{n-1}\eta (\overline{\mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A}})\eta$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$.

Лема 2.12. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, *тоді матриця Мура-Пенроуза* $(\mathbf{A}^\eta)^\dagger = \left(a_{ij}^{\eta\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *має наступні визначникові зображення,*

$$a_{ij}^{\eta\dagger} = -\,\eta \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{a}_{.j}^*\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} \eta = \tag{2.24}$$

$$= -\,\eta \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{a}_{i.}^*)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha} \eta. \tag{2.25}$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^\eta$. Дійсно, оскільки матриця $((\mathbf{A}^\eta)^*\mathbf{A}^\eta)$ є ермітовою, то за формулою (2.21) маємо

$$\begin{aligned}
&\det\left((\mathbf{A}^\eta)^*\mathbf{A}^\eta\right) = \det\left(-\eta\mathbf{A}^*\eta(-\eta)\mathbf{A}\eta\right) = \det\left(-\eta\mathbf{A}^*\mathbf{A}\eta\right)\\
&= \operatorname{cdet}_i\left(-\eta\mathbf{A}^*\mathbf{A}\eta\right) = -\eta\operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)\eta = -\eta\det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)\eta\\
&= \det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Отже, (визначникові) ранги матриць $((\mathbf{A}^\eta)^*\mathbf{A}^\eta)$ та $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ є однаковими. Звідси, застосовуючи формули (2.7), (2.21), та (2.26) до матриці Мура-Пенроуза $(\mathbf{A}^\eta)^\dagger$, одержимо

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{\eta\dagger} =& \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^{\eta*}\mathbf{A}^\eta)_{.i} \left(a_{.j}^{\eta*}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^{\eta*}\mathbf{A}^{\eta*}|_\beta^\beta}\\
=& \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((-\eta\mathbf{A}^*\mathbf{A}\eta)_{.i} \left(-\eta(\mathbf{a}_{.j}^*)\eta\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta}\\
=& -\,\eta \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{a}_{.j}^*\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} \eta,
\end{aligned}$$

Отже, ми довели (2.24). Визначникове зображення (2.25) може бути доведене подібним чином.

$\square$

Лема 2.13. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{n\times n}$, $\mathbf{A}^{\eta *} = \left((a_{ij}^{\eta *})\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *є її* η*-ермітово-спряжена матриця, та* $-\mathbf{A}^{\eta *} = \left((a_{ij}^{-\eta *})^{\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *– її* η*-косо-ермітово-спряжена матриця. Тоді визначникові зображення їх узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, відповідно,* $(\mathbf{A}^{\eta *})^{\dagger} = \left((a_{ij}^{\eta *})^{\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *та* $(-\mathbf{A}^{\eta *})^{\dagger} = \left((a_{ij}^{-\eta *})^{\dagger}\right)$ *є наступними*

$$(a_{ij}^{\eta *})^{\dagger} = -\eta\overline{(a_{ji})^{\dagger}}\eta = -\eta\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in I_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\alpha}^{\alpha}}\eta \tag{2.27}$$

$$= -\eta\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.i}(\mathbf{a}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\beta}^{\beta}}\eta, \tag{2.28}$$

$$(a_{ij}^{-\eta *})^{\dagger} = \eta\overline{(a_{ji})^{\dagger}}\eta = \eta\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in I_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\alpha}^{\alpha}}\eta =$$

$$= \eta\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.i}(\mathbf{a}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\beta}^{\beta}}\eta.$$

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з Лем 2.10 та 1.9. □

2.1.4. Визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза для комплексних матриць.

Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ є комплексною матрицею, то до її узагальненої оберненої Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}$, проективних матриць $\mathbf{Q}_A$ та $\mathbf{P}_A$, застосувавши визначникові зображення (2.7)-(2.8), (2.14)-(2.15) та (2.16)-(2.17) відповідно, та враховуючи те, що всі стовпцеві та рядкові визначники матриці з комутуючими елементами рівні між собою, одержимо,

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^*\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}} = \tag{2.29}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j\,.}\left(\mathbf{a}_{i.}^*\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}} \tag{2.30}$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$ та $j = 1, \ldots, m$;

$$q_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\dot{\mathbf{a}}_{.j}\right)\right|_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta} = \tag{2.31}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}\left(\dot{\mathbf{a}}_{i.}\right)\right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\alpha^\alpha}, \tag{2.32}$$

де $\dot{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-й стовпець і $\dot{\mathbf{a}}_{i.}$-й рядок матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$;

$$p_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{i.})\right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_\alpha^\alpha} = \tag{2.33}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,m}\{i\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.i}(\ddot{\mathbf{a}}_{.j})\right|_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_\beta^\beta}, \tag{2.34}$$

де $\ddot{\mathbf{a}}_{i.}$-й рядок і $\ddot{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{A}\mathbf{A}^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$ для всіх $i, j = 1, \ldots, m$.

Порівнюючи отримані визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза для комплексних матриць з визначниковим зображення (1.26) не важко відмітити їх простішу конструкцію та більшу аплікабельність. Новизна і актуальність отриманих визначникових зображень комплексної матриці Мура-Пенроуза підтверджується публікаціями [101, 110, 304].

2.1.5. Приклад знаходження узагальненої оберненої матриці Мура–Пенроуза.

Розглянемо матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & -\mathbf{k} & \mathbf{j} & 1 \\ 2\mathbf{i} & \mathbf{j} & 1 & \mathbf{k} \\ -1 & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

Оскільки,

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -2\mathbf{i} & -1 \\ \mathbf{k} & -\mathbf{j} & -\mathbf{j} \\ -\mathbf{j} & 1 & -\mathbf{k} \\ 1 & -\mathbf{k} & -i \end{bmatrix}, \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 4 & 2 - \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} & -4\mathbf{i} \\ 2 + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} & 7 & 1 - 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} \\ 4\mathbf{i} & 1 + 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} & 4 \end{bmatrix},$$

і $\det \mathbf{AA}^* = \mathrm{rdet}_1 \mathbf{AA}^* = 0$,

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbf{AA}^*\right)^{33} =& \mathrm{rdet}_1 \begin{bmatrix} 4 & 2-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k} \\ 2+\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} & 7 \end{bmatrix} = \\ =& 4\cdot 7 - (2-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(2+\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 21 \neq 0,\end{aligned}$$

тоді за Зауваженням 1.8, rank $\mathbf{A} = 2$. Подамо $\mathbf{A}^\dagger$ за формулою (2.8).

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in I_{2,\,3}} \left|\mathbf{AA}^*\right|_\alpha^\alpha =& \det\begin{bmatrix} 4 & 2-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k} \\ 2+\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} & 7 \end{bmatrix} + \\ &+\det\begin{bmatrix} 7 & 1-2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k} \\ 1+2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} & 4 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 4 & -4\mathbf{i} \\ 4\mathbf{i} & 4 \end{bmatrix} = 42.\end{aligned}$$

Будемо обчислювати $r_{ij} = \sum\limits_{\alpha\in I_{2,3}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{AA}^*\right)_{j\,.}(\mathbf{a}^*_{i.})\right)_\alpha^\alpha$ для всіх $i = 1,\ldots,4$ та $j = 1,\ldots,3$. Щоб знайти r_{11}, розглянемо матрицю

$$\left(\mathbf{AA}^*\right)_{1\,.}(\mathbf{a}^*_{1.}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -2\mathbf{i} & -1 \\ 2+\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} & 7 & 1-2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k} \\ 4\mathbf{i} & 1+2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} & 4 \end{bmatrix}.$$

Тоді, маємо

$$\begin{aligned}r_{11} =& \mathrm{rdet}_1\begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -2\mathbf{i} \\ 2+\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} & 7 \end{bmatrix} + \mathrm{rdet}_1\begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -1 \\ 4\mathbf{i} & 4 \end{bmatrix} = \\ =& -7\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot(2+\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) - 4\mathbf{i} + 4\mathbf{i} = -2-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$\mathbf{A}^\dagger = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} -2-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k} & 2-12\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k} & -3+2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k} \\ 1+\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k} & -2+2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-4\mathbf{k} & 1-\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k} \\ -2-\mathbf{i}-6\mathbf{j}-\mathbf{k} & 6-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k} & -1+2\mathbf{i}+\mathbf{j}-6\mathbf{k} \\ 6+\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k} & -4+2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k} & 1-6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

2.2. Кватерніонова зважена матриця Мура-Пенроуза та її визначникові зображення

2.2.1. Зважений сингулярний розклад кватерніонової матриці.

Позначимо $\mathbf{A}^{\sharp} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}$. Доведемо теорему про ЗСР кватерніонових матриць.

Теорема 2.3. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$*, та* $\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{N}$ *додатноозначені матриці порядку* m *і* n*, відповідно. Тоді існують матриці* $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n\times n}$*, що задовольняють умови* $\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I}_m$ *і* $\mathbf{V}^{*}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$*, і такі, що*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^{*}, \tag{2.35}$$

де $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r)$*,* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$ *і* σ_i^2 *- ненульові власні значення матриць* $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ *чи* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$*, які співпадають.*

Доведення. Спочатку розглянемо $\mathbf{L} := \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A}$. Оскільки, $\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A} = (\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})^{*}\mathbf{A}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$, то за Лемою 1.18, $\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A}$ – додатноозначена матриця, і за Лемою 1.19 всі власні значення $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ є невід'ємними. Позначимо їх σ_i^2, де $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_n \geq 0$. Оскільки, $\mathbf{L}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$ також ермітова і за умовою існує $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ така, що $\mathbf{V}^{*}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$, тоді за Лемою 1.20,

$$\mathbf{V}^{*}\mathbf{L}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}, \tag{2.36}$$

де $\mathbf{V}$ - унітарна з вагою $\mathbf{N}^{-1}$, і $\mathbf{\Lambda}$ - діагональна.

З того, що $(\mathbf{V}^{*})^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}$, а отже $\mathbf{L} = (\mathbf{V}^{*})^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{*}$, випливає, що $\mathbf{\Lambda} \equiv \mathbf{\Sigma}_1^2$, де $\mathbf{\Sigma}_1^2$ - діагональна з власними значеннями матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ на головній діагоналі, $\sigma_{ii}^2 = \sigma_i^2$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Оскільки, $\operatorname{rank}\mathbf{L} = \operatorname{rank}\mathbf{A} = r$, то кількість ненульових діагональних елементів матриці $\mathbf{\Sigma}_1^2$ дорівнює r. Відмітимо, що

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{*}\mathbf{L}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} =& \mathbf{V}^{*}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \\ =& \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{*}(\mathbf{U}^{*})^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{V}^{*})^{-1} = \mathbf{\Sigma}_1^2.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Розглянемо матрицю

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{m\times n}. \tag{2.38}$$

Враховуючи (2.36), маємо

$$\mathbf{P}^*\mathbf{P} = \left(\mathbf{V}^*\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\right)\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}_1^2. \tag{2.39}$$

Побудуємо $m \times n$-матрицю таку, що $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{m\times n}$,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.40}$$

де $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{H}^{r\times r}$ - діагональна матриця з елементами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$ на головній діагоналі. Тоді,

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{D}. \tag{2.41}$$

З рівнянь (2.38) та (2.41), випливає, що $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{D}$. Тоді з рівності $\left(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\right)^{-1} = \mathbf{V}^*$, маємо (2.35).

Тепер доведемо (2.35), де σ_i^2 - ненульові власні значення матриці $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp = \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$. Оскільки матриці $\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*$ і $\mathbf{M}$ є, відповідно, ермітовими напівдодатно-визначеними та додатно-визначеними, тоді за Лемою 1.19 всі власні значення матриці $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$ є невід'ємними. Позначимо їх τ_i^2, де $\tau_1 \geq ... \geq \tau_m \geq 0$, і нехай $\mathbf{Q} := \mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$. Оскільки, матриця $\mathbf{M}\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$ - ермітова і існує невироджена матриця $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ така, що $\mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I}_m$, тоді за Лемою 1.20,

$$\mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{\Omega}, \tag{2.42}$$

де $\mathbf{U}$- унітарна з вагою $\mathbf{M}$, і $\mathbf{\Omega}$ - діагональна матриця.

З того, що $\mathbf{U}^*\mathbf{M} = \mathbf{U}^{-1}$, а отже, $\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{\Omega}\mathbf{U}^{-1}$, випливає, що $\mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{\Sigma}_2^2$, де $\mathbf{\Sigma}_2^2$ - діагональна з власними значеннями матриці $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$ на головній діагоналі, $\tau_{ii}^2 = \tau_i^2$ для всіх $i = 1, \ldots, m$. Оскільки, $\operatorname{rank}\mathbf{Q} = \operatorname{rank}\mathbf{A} = r$, то кількість невід'ємних діагональних елементів матриці $\mathbf{\Sigma}_2^2$ дорівнює r. З іншого боку,

$$\mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{V}^*\right)^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^*\left(\mathbf{U}^*\right)^{-1} = \mathbf{\Sigma}_2^2. \tag{2.43}$$

Порівнюючи (2.37) та (2.43), і за Лемою 1.18, маємо, що r ненульових власних значень матриці $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$ співпадають з r ненульовими власними значеннями матриці $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$, тобто, $\sigma_i^2 = \tau_i^2$ для всіх $i = 1, \ldots, r$.

Далі, розглянемо матрицю

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{H}^{m\times n}. \tag{2.44}$$

Враховуючи рівність (2.42), одержимо

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{U}\right) = \mathbf{\Sigma}_2^2. \tag{2.45}$$

Розглянемо знову матрицю $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ з умови (2.40). Тоді,

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{V}^*\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.46}$$

З рівностей (2.44) та (2.46), випливає, що $\mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{D}\mathbf{V}^*\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}$. З цього, враховуючи $(\mathbf{U}^*\mathbf{M})^{-1} = \mathbf{U}$, кінцево випливає (2.35).

□

Дамо означення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза для кватерніонової матриці.

Означення 2.3. *Нехай $\mathbf{M} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ і $\mathbf{N} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ додатноозначені матриці. Для матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, зваженою узагальненою оберненою матрицею Мура-Пенроуза з вагами $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ (позначається як $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$) є єдина матриця $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, що задовольняє рівняння:*

$$\begin{gathered}(1)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A};\ (2)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X};\\ (3M)\ (\mathbf{MAX})^* = \mathbf{MAX};\ (4N)\ (\mathbf{NXA})^* = \mathbf{NXA}.\end{gathered} \tag{2.47}$$

Тепер доведемо теорему про подання зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ через зважений сингулярний розклад матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$ з вагами $\mathbf{M}$ та $\mathbf{N}$.

Теорема 2.4. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ - додатно-визначені матриці порядків m та n, відповідно. Тоді існують матриці $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ що задовольняють умови $\mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I}_m$ and $\mathbf{V}^*\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$ і такі, що $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^*$, де $\mathbf{D} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$. Тоді зважена узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза*

$\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ *може бути представлена як*

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}, \tag{2.48}$$

де $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$*,* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$ *і* σ_i^2 *– ненульові власні значення матриць* $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$*, які співпадають.*

Доведення. Для доведення теореми покажемо, що матриця $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ виражена умовою (2.48) задовольняє рівняння (2.47).

$$(1)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{*}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{*} = \mathbf{A},$$

$$(2)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{*}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M} = \mathbf{X},$$

$$\begin{aligned}(3M)\ (\mathbf{MAX})^{*} &= \left(\mathbf{M}\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{*}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}\right)^{*} = \\ &= \mathbf{M}\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m\times m}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{*}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M} = \\ &= \mathbf{MAX},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4N)\ (\mathbf{NXA})^{*} &= \left(\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{*}\right)^{*} = \\ &= \mathbf{N}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{n\times n}\mathbf{V}^{*} = \mathbf{N}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{*} = \\ &= \mathbf{NXA}.\end{aligned}$$

Що й доводить теорему. □

2.2.2. Граничні зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза над тілом кватерніонів. Граничні зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза розглядалися для комплексних (дійсних) матриць [210, 266]. У наступній теоремі, доведення теореми про граничні зображення кватеніонової зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза базується на зваженому сингулярному розкладі кватерніонових матриць.

Теорема 2.5. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, $\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{N}$ *- додатноозначені матриці порядків* m *та* n, *відповідно. Позначимо* $\mathbf{A}^\sharp = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$. *Тоді*

$$\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger} = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\sharp. \tag{2.49}$$

де $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *і* $\mathbb{R}_+$ *- множина додатних дійсних чисел.*

Доведення. За Теоремами 2.3 і 2.4, відповідно, маємо

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{V}^*,\ \mathbf{A}_{M,N}^{\dagger} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{U}^*\mathbf{M},$$

де $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$ і $\sigma_i^2 \in \mathbb{R}$ - невід'ємні власні значення матриці $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}$. Розглянемо матрицю

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

де матриця $\mathbf{D} = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$ така, що $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \ldots \geq \sigma_{rr} > \sigma_{r+1\,r+1} = \ldots = \sigma_{qq} = 0$, $q = \min\{n, m\}$. Тоді

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}^* & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},\ \mathbf{D}^{\dagger} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

і $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^*$, $\mathbf{A}^\sharp = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}^*\mathbf{U}^*\mathbf{M}$, $\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}^{\dagger}\mathbf{U}^*\mathbf{M}$. Оскільки, $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = (\mathbf{V}^*)^{-1}$, тоді маємо

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^\sharp\mathbf{A} =& \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}^*\mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^* = \lambda\mathbf{I} + (\mathbf{V}^*)^{-1}\mathbf{D}^*\mathbf{D}\mathbf{V}^* =\\ =&(\mathbf{V}^*)^{-1}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{D}^2)\mathbf{V}^*.\end{aligned}$$

Отже,

$$(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\sharp} = (\mathbf{V}^{*})^{-1}(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{D}^{2})^{-1}\mathbf{V}^{*}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}^{*}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M} = \\ = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{D}^{2})^{-1}\mathbf{D}^{*}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M}.$$

Розглянемо матрицю

$$\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{D}^{2}\right)^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2+\lambda} & \dots & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & \frac{\sigma_r}{\sigma_r^2+\lambda} & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{D}^{2}\right)^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\dagger}$. Тоді,

$$\lim_{\lambda\to 0}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{D}^{2})^{-1}\mathbf{D}^{*}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}^{\dagger}\mathbf{U}^{*}\mathbf{M} = \mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}.$$

Теорема доведена. □

Наступна теорема дає інше граничне зображення матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$.

Теорема 2.6. *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}_{r}$, *і* $\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{N}$ *- додатноозначені матриці порядків* m *та* n, *відповідно. Тоді*

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \lim_{\lambda\to 0}\mathbf{A}^{\sharp}(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})^{-1}, \tag{2.50}$$

де $\lambda\in\mathbb{R}_{+}$.

Доведення. Доведення аналогічне доведенню Теореми 2.5, виходячи з того, що за Теоремою 2.3 ненульові власні значення матриць $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ співпадають. □

Очевидним є наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$. *Наступні твердження є справедливими.*

i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$, *тоді* $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\sharp}$.

ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A}=m$, *тоді* $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \mathbf{A}^{\sharp}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}\right)^{-1}$.

iii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n=m$, *тоді* $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \mathbf{A}^{-1}$.

2.2.3. Визначникові зображення зваженої кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. Незважаючи на те, що власні значення матриць $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ є дійсними і невід'ємними, ці матриці, в загальному, не є ермітовими. Тому розглянемо два випадки, коли матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ обидві або одна з них є ермітовими, і коли вони обидві не є ермітовими.

Випадок ермітових матриць $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ чи $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$. Нехай $(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовою, тобто, $(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})^* = (\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})$. Оскільки $\mathbf{N}^{-1}$ та $\mathbf{M}$ - ермітові, тоді

$$(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}.$$

Отже, матриця $(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})$ буде ермітовою, коли матриці $\mathbf{N}^{-1}$ і $(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})$ будуть комутативними. Аналогічно, матриця $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})$ буде ермітовою, коли матриці $\mathbf{M}$ and $(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*)$ будуть комутативними.

Позначимо через $\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}$ і $\mathbf{a}^{\sharp}_{i.}$ – j-й стовпець та i-й рядок матриці $\mathbf{A}^{\sharp}$, відповідно.

Лема 2.14. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, *то* $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right) \le r$.

Доведення. Так само як в доведенні Леми 2.3, розглянемо матрицю елементарних перетворень $\mathbf{P}_{i\,k}\left(-a_{jk}\right)$, котра має (i,k)-им елементом $-a_{j\,k}$, одиниці на головній діагоналі, інші елементи є нулями. Домноживши довільну матрицю справа на матрицю $\mathbf{P}_{i\,k}\left(-a_{jk}\right)$, коли $k \ne j$, одержимо додавання до її k-го стовпця i-й стовпець домножений справа на $-a_{jk}$. Таким чином,

$$\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\cdot\prod_{k\ne i}\mathbf{P}_{i\,k}\left(-a_{j\,k}\right) = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k\ne j} a^{\sharp}_{1k}a_{k1} & \dots & a^{\sharp}_{1j} & \dots & \sum\limits_{k\ne j} a^{\sharp}_{1k}a_{kn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum\limits_{k\ne j} a^{\sharp}_{nk}a_{k1} & \dots & a^{\sharp}_{nj} & \dots & \sum\limits_{k\ne j} a^{\sharp}_{nk}a_{kn}\end{bmatrix}\\ i-\text{ий}\end{array}.$$

Ця матриця має наступну факторизацію,

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k\ne j} a^{\sharp}_{1k}a_{k1} & \dots & a^{\sharp}_{1j} & \dots & \sum\limits_{k\ne j} a^{\sharp}_{1k}a_{kn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum\limits_{k\ne j} a^{\sharp}_{nk}a_{k1} & \dots & a^{\sharp}_{nj} & \dots & \sum\limits_{k\ne j} a^{\sharp}_{nk}a_{kn}\end{bmatrix}\\ i-\text{й}\end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^{\sharp}_{11} & a^{\sharp}_{12} & \dots & a^{\sharp}_{1m} \\ a^{\sharp}_{21} & a^{\sharp}_{22} & \dots & a^{\sharp}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{\sharp}_{n1} & a^{\sharp}_{n2} & \dots & a^{\sharp}_{nm} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} j-\text{й}. \\ \quad i-\text{й} \end{array}$$

Позначимо

$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} j-\text{й}. \\ i-\text{й} \end{array}$$

Матриця $\tilde{\mathbf{A}}$ отримується з матриці $\mathbf{A}$ заміною всіх елементів її j-го рядка та i-го стовпця нулями за виключенням (j,i)-го елемента, котрий є 1. Оскільки, елементарні перетворення матриці не змінюють її ранг і ранг матричного добутку не перевищує рангу кожного множника, то $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right) \leq \min\left\{\operatorname{rank}\mathbf{A}^{\sharp}, \operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}}\right\}$.

Очевидно, що $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}} \geq \operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{\sharp}$. Лема доведена.

□

Аналогічно доводиться наступна лема.

Лема 2.15. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r}$, *тоді* $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right) \leq r$.

Аналоги характеристичного полінома розглядаються в наступних лемах.

Лема 2.16. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $t \in \mathbb{R}$ *і* $(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})$ *– ермітова, тоді*

$$\operatorname{cdet}_i\left(t\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right) = c_1^{(ij)}t^{n-1} + c_2^{(ij)}t^{n-2} + \ldots + c_n^{(ij)}, \tag{2.51}$$

де $c_n^{(ij)} = \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)$ *і* $c_k^{(ij)} = \sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$ *для всіх* $k = 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, n$ *та* $j = 1, \ldots, m$.

Доведення. Позначимо через $\mathbf{b}_{.i}$ – i-ий стовпець матриці $\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right) =: (b_{ij})_{n\times n}$, яка є ермітовою. Розглянемо ермітову матрицю $\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}(\mathbf{b}_{.i}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, яка відрізняється від матриці $\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)$ елементом b_{ii}. Беручи до уваги Теорему 1.17, одержимо

$$\det\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}(\mathbf{b}_{.i}) = d_1 t^{n-1} + d_2 t^{n-2} + \ldots + d_n, \tag{2.52}$$

де $d_k = \sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \det\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{\beta}^{\beta}$ сума всіх головних мінорів порядку k, що містять елементи i-го стовпця і $d_n = \det\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)$. Очевидно, що

$$\mathbf{b}_{.i} = \begin{bmatrix} \sum\limits_l a^{\sharp}_{1l} a_{li} \\ \sum\limits_l a^{\sharp}_{2l} a_{li} \\ \vdots \\ \sum\limits_l a^{\sharp}_{nl} a_{li} \end{bmatrix} = \sum_l \mathbf{a}^{\sharp}_{.l} a_{li},$$

де $\mathbf{a}^{\sharp}_{.l}$ – l-й вектор-стовпець матриці $\mathbf{A}^{\sharp}$ for all $l = 1,\ldots,m$. Беручи до уваги Теореми 1.3 і Леми 1.3 та 1.6, з одного боку одержимо

$$\begin{gathered}\det\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}(\mathbf{b}_{.i}) = \operatorname{cdet}_i\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}(\mathbf{b}_{.i}) = \\ \sum_l \operatorname{cdet}_i\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.l}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.l} a_{l\,i}\right) = \sum_l \operatorname{cdet}_i\left(t\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.l}\right)\cdot a_{li}\end{gathered} \tag{2.53}$$

З іншого боку, змінивши порядок підсумовування,

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \det\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{\beta}^{\beta} = \\ &= \sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \sum_l \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.l} a_{l\,i}\right)\right)_{\beta}^{\beta} = \\ &= \sum_l \sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.l}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\cdot a_{l\,i}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Підставивши (2.53) та (2.54) в (2.52), та прирівнявши коефіцієнти при $a_{l\,i}$, коли $l = j$, одержимо рівність (2.51). □

Наступна лема доводиться аналогічно.

Лема 2.17. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $t \in \mathbb{R}$ *і* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ *– ермітова, тоді*

$$\mathrm{rdet}_j(t\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.}) = r_1^{(ij)}t^{n-1} + r_2^{(ij)}t^{n-2} + \ldots + r_n^{(ij)},$$

де $r_n^{(ij)} = \mathrm{rdet}_j(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.})$ *і* $r_k^{(ij)} = \sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}$ *для всіх* $k = 1,\ldots,n-1$, $i = 1,\ldots,n$ *та* $j = 1,\ldots,m$.

Наступна теорема дає визначникові зображення зваженої кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза.

Теорема 2.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$. *Якщо* $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ *або* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ *є ермітовими, тоді її зважена узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза* $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \left(a^{\ddagger}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *має наступні визначникові зображення, відповідно,*

$$a^{\ddagger}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} = \tag{2.55}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{2.56}$$

Доведення. Спочатку, доведемо (2.55). За Лемою 2.5, $\mathbf{A}^{\dagger} = \lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\sharp}$. Нехай матриця $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ буде ермітова. Тоді матриця $\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовою повноранговою матрицею. Беручи до уваги Теорему 1.4, вона має обернену, котру подамо як ліву оберену

$$\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)}\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & \ldots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \ldots & L_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{1n} & L_{2n} & \ldots & L_{nn} \end{bmatrix},$$

де L_{ij} – ліве ij-те алгебричне доповнення матриці $\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$. Тоді, маємо

$$\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\sharp}=$$
$$=\frac{1}{\det\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}L_{k1}a_{k1}^{\sharp} & \sum\limits_{k=1}^{n}L_{k1}a_{k2}^{\sharp} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n}L_{k1}a_{km}^{\sharp}\\ \sum\limits_{k=1}^{n}L_{k2}a_{k1}^{\sharp} & \sum\limits_{k=1}^{n}L_{k2}a_{k2}^{\sharp} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n}L_{k2}a_{km}^{\sharp}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \sum\limits_{k=1}^{n}L_{kn}a_{k1}^{\sharp} & \sum\limits_{k=1}^{n}L_{kn}a_{k2}^{\sharp} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n}L_{kn}a_{km}^{\sharp}\end{bmatrix}.$$

Використовуючи означення лівого алгебричного доповнення, одержимо

$$\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}=\lim_{\lambda\to 0}\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{cdet}_1\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.1}\left(\mathbf{a}_{.1}^{\sharp}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})} & \ldots & \frac{\mathrm{cdet}_1\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.1}\left(\mathbf{a}_{.m}^{\sharp}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\mathrm{cdet}_n\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.n}\left(\mathbf{a}_{.1}^{\sharp}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})} & \ldots & \frac{\mathrm{cdet}_n\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.n}\left(\mathbf{a}_{.m}^{\sharp}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})}\end{bmatrix}. \tag{2.57}$$

За Теоремою 1.17, $\det\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)=\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+d_2\lambda^{n-2}+\ldots+d_n$, де $d_k=\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}}\left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}$– сума головних мінорів матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ порядку k для всіх $k=1,\ldots,n-1$ і $d_n=\det\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$. Оскільки, $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}=\mathrm{rank}\,\mathbf{A}=r$ і $d_n=d_{n-1}=\ldots=d_{r+1}=0$, звідси випливає, що

$$\det\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)=\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+d_2\lambda^{n-2}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}.$$

За Лемою 2.16, маємо

$$\mathrm{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{\sharp}\right)=c_1^{(ij)}\lambda^{n-1}+c_2^{(ij)}\lambda^{n-2}+\ldots+c_n^{(ij)}$$

для всіх $i=1,\ldots,n$ і $j=1,\ldots,m$, де

$$c_k^{(ij)}=\sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{\sharp}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

для всіх $k=1,\ldots,n-1$ і $c_n^{(ij)}=\mathrm{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{\sharp}\right)$.

Тепер доведемо, що $c_k^{(ij)}=0$, коли $k\geq r+1$ для всіх $i=1,\ldots,n$ і $j=1,\ldots,m$. За Лемою 2.14, $\mathrm{rank}\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{\sharp}\right)\leq r$, тоді матриця $\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{\sharp}\right)$ має не більше r лінійно незалежних справа стовпців.

Розглянемо матрицю $\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{\sharp}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$, коли $\beta\in J_{k,n}\{i\}$. Вона є головною підматрицею матриці $\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{\sharp}\right)$ порядку $k\geq r+1$. Викресливши обидва її i-ий рядок і стовпець, одержимо головну підматрицю порядку $k-1$ матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$. Позначимо її $\mathbf{M}$. Можливі наступні випадки.

1. Нехай $k=r+1$ і $\det\mathbf{M}\neq 0$. У цьому випадку всі стовпці матриці $\mathbf{M}$ є лінійно незалежними справа. Доповнення їх по одній координаті до стовпців матриці $\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$ зберігає їх лінійну незалежність справа. Отже, вони є базисом правого стовпцевого простору матриці $\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$, а її i-ий стовпець є правою лінійною комбінацією базисних стовпців. За Лемою 1.11 з цього випливає, що $\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}=0$, коли $\beta\in J_{k,n}\{i\}$ і $k\geq r+1$.

2. Якщо $k=r+1$ і $\det\mathbf{M}=0$, тоді p, $(p<k)$, стовпців є базисними у матрицях $\mathbf{M}$ і $\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$. Тоді за Лемою 1.11, так само одержимо $\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}=0$.

3. Якщо $k>r+1$, тоді згідно Зауваження 1.8 та за Теоремою 1.5 випливає, що $\det\mathbf{M}=0$ і p, $(p<k-1)$, стовпців є базисними для матриць $\mathbf{M}$ і $\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$. Звідси за Лемою 1.11, $\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}=0$.

Таким чином, у всіх випадках, $\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}=0$, і коли $\beta\in J_{k,n}\{i\}$ і $r+1\leq k<n$ для всіх $i=1,\ldots,n$ і $j=1,\ldots,m$, то

$$\begin{aligned}
c_k^{(ij)}&=\sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}=0,\\
c_n^{(ij)}&=\mathrm{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)=0.
\end{aligned}$$

Отже, $\mathrm{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)=c_1^{(ij)}\lambda^{n-1}+c_2^{(ij)}\lambda^{n-2}+\ldots+c_r^{(ij)}\lambda^{n-r}$ для всіх $i=1,\ldots,n$ і $j=1,\ldots,m$. Підставивши ці значення в матрицю (2.57), одержимо

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}=\lim_{\lambda\to 0}\begin{bmatrix}
\frac{c_1^{(11)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(11)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}} & \ldots & \frac{c_1^{(1m)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(1m)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}}\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{c_1^{(n1)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(n1)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}} & \ldots & \frac{c_1^{(nm)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(nm)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}}
\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
\frac{c_r^{(11)}}{d_r} & \ldots & \frac{c_r^{(1m)}}{d_r}\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{c_r^{(n1)}}{d_r} & \ldots & \frac{c_r^{(nm)}}{d_r}
\end{bmatrix},$$

де $c_r^{(ij)}=\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$ і $d_r=\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}$.

Таким чином, ми отримали визначникове зображення $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ за формулою (2.55). Аналогічно можна довести визначникове зображення (2.56). $\square$

Зауваження 2.5. *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *і матриця* $(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})$ *– ермітова, то за Наслідком 2.3,* $\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = \left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\sharp$. *Розглядаючи* $\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)^{-1}$ *як ліву обернену, одержимо наступне визначникове зображення зваженої узагальненої оберненої матриці,*

$$\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp\right)}\begin{bmatrix} \operatorname{cdet}_1(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})_{.1}\left(\mathbf{a}^\sharp_{.1}\right) & \ldots & \operatorname{cdet}_1(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})_{.1}\left(\mathbf{a}^\sharp_{.m}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{cdet}_n(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})_{.n}\left(\mathbf{a}^\sharp_{.1}\right) & \ldots & \operatorname{cdet}_n(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})_{.n}\left(\mathbf{a}^\sharp_{.m}\right). \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Якщо $m > n$, *тоді за Теоремою 2.7 для* $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$ *має місце і формула (2.55).*

Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$ *і* $(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp)$ *– ермітова, тоді за Наслідком 2.3,* $\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = \mathbf{A}^\sharp\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp\right)^{-1}$. *Розглядаючи* $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp\right)^{-1}$ *як праву обернену, одержимо наступне визначникове зображення* $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$,

$$\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)}\begin{bmatrix} \operatorname{rdet}_1(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp)_{1.}\left(\mathbf{a}^\sharp_{1.}\right) & \ldots & \operatorname{rdet}_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp)_{m.}\left(\mathbf{a}^\sharp_{1.}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{rdet}_1(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp)_{1.}\left(\mathbf{a}^\sharp_{n.}\right) & \ldots & \operatorname{rdet}_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp)_{m.}\left(\mathbf{a}^\sharp_{n.}\right) \end{bmatrix}. \tag{2.59}$$

Якщо $m < n$, *тоді за Теоремою 2.7 для* $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$ *маємо так само (2.56).*

Щоб уніфікувати ці два повнорангові випадки з випадками розглянутими в Теоремі 2.7, для довільної повнорангової матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, *вектор-рядка* $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^{1\times m}$, *та вектор-стовпця* $\mathbf{c} \in \mathbb{H}^{n\times 1}$, *покладемо*

– *коли* $r = m$

$$\operatorname{rdet}_i\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp)_{i.}(\mathbf{b})\right) = \sum_{\alpha\in I_{m,m}\{i\}} \operatorname{rdet}_i\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp)_{i.}(\mathbf{b})\right)^{\alpha}_{\alpha},$$
$$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp\right) = \sum_{\alpha\in I_{m,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp\right|^{\alpha}_{\alpha}, \qquad i = 1,\ldots,m;$$

– *коли* $r = n$

$$\operatorname{cdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.j}(\mathbf{c})\right) = \sum_{\beta\in J_{n,n}\{j\}} \operatorname{cdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.j}(\mathbf{c})\right)^{\beta}_{\beta},$$
$$\det\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right) = \sum_{\beta\in J_{n,n}} \left|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

В силу умов (1) та (2) Означення 2.47 матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ є ідемпотентними, а у випадку, коли матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ будуть ермітовими, то – проективними. Маємо наступні наслідки.

Наслідок 2.4. *Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$ і $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ - ермітова, тоді матриця $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}\mathbf{A} =: \mathbf{Q}_{M,N} = (q_{ij})_{n\times n}$ має визначникові зображення,*

$$q_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\dot{\mathbf{a}}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}} = \tag{2.60}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\dot{\mathbf{a}}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{2.61}$$

де $\dot{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-й стовпець і $\dot{\mathbf{a}}_{i.}$-й рядок матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

Доведення. Використовуючи (2.55) для визначникового зображення $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ і домножуючи її справа на $\mathbf{A}$, одержимо наступне представлення довільного елемента q_{ij} матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}\mathbf{A} =: \mathbf{Q}_{M,N} = (q_{ij})_{n\times n}$.

$$q_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \sum\limits_{k} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.k}\right)\right)^{\beta}_{\beta} \cdot a_{kj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}}.$$

Звідси, в силу того, що $\sum\limits_{k} \mathbf{a}^{\sharp}_{.j} \cdot a_{kj} = \dot{\mathbf{a}}_{.j}$, випливає (2.14).

Оскільки, матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ і, для довільного $\lambda \in \mathbb{R}_{+}$, $\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ - ермітові, то в силу граничного зображення матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$, матриця $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}\mathbf{A} = \mathbf{Q}_{M,N}$ також ермітова. Тоді $q_{ij} = \overline{q_{ji}}$ для всіх $i \neq j$. Звідси, в силу того, що

$$\sum_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta} = \sum_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\alpha}_{\alpha}$$

і за Лемою 1.9

$$\overline{\operatorname{cdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.j}\left(\dot{\mathbf{a}}_{.i}\right)\right)} = \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\dot{\mathbf{a}}_{i.}\right)\right),$$

слідує (2.61). □

За аналогією можна довести наступний наслідок.

Наслідок 2.5. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$ *і* $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *– ермітова, то для проективної матриці* $\mathbf{A}\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger} =: \mathbf{P}_{M,N} = (p_{ij})_{m\times m}$,

$$p_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\big((\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}\,(\ddot{\mathbf{a}}_{i.}\,)\big)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}|_{\alpha}^{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i((\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{.\,i}(\ddot{\mathbf{a}}_{.j}))_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\ddot{\mathbf{a}}_{i.}$*-ий рядок і* $\ddot{\mathbf{a}}_{.j}$ *–* j*-ий стовпець матриці* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp} \in \mathbb{H}^{m\times m}$.

Випадок не-ермітових матриць $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$. В цьому підрозділі отримаємо визначникові зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза для матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, коли матриці $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ та $(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ не є ермітовими.

Нехай $(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ буде не-ермітовою і $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}) < n$. Розглянемо $(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\sharp}$. Маємо

$$\begin{aligned}&(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\sharp} = (\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\sharp} = (\mathbf{N}^{-1}(\lambda\mathbf{N} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A}))^{-1}\mathbf{A}^{\sharp} = \\ &(\lambda\mathbf{N} + \mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}(\lambda + \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}})^{-1}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M} = \\ &= \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\left(\lambda + \left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^{*}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\right)\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Оскільки, за Теоремою 2.1

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\lambda + \left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^{*}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^{\dagger},$$

тоді об'єднуючи (2.49) та (2.62), одержимо

$$\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger} = \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^{\dagger}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.63}$$

Позначимо $\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}$, (ik)-ий елемент матриці $\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}$ як $n_{ik}^{(-\frac{1}{2})}$ для всіх $i,k = 1,\ldots,n$, та (lj)-ий елемент матриці $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$ як $m_{lj}^{(\frac{1}{2})}$ для всіх $l,j = 1,\ldots,m$, відповідно. Застосовуючи визначникове зображення (2.7) для матриці Мура-Пенроуза $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$, одержимо

$$\widetilde{a}_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^{*}\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.\,i}\left(\widetilde{\mathbf{a}}_{.j}^{*}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\widetilde{\mathbf{A}}^{*}\widetilde{\mathbf{A}}\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\widetilde{\mathbf{a}}^*_{.j}$ – j-ий стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{A}}^* = \left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^* = \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$.

Позначимо $\widetilde{\mathbf{M}} := \left(\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)$ та $\hat{\mathbf{M}} := \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$. Оскільки,

$$\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^*\left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \sum_l \hat{\mathbf{a}}^*_{.l} m^{(\frac{1}{2})}_{lj} = \hat{\mathbf{m}}_{.j}$$

де $\hat{\mathbf{m}}_{.j}$ – j-ий стовпець матриці $\hat{\mathbf{M}}$, то для зваженої узагальненої оберненої матриці $\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = \left(a^\ddagger_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$, маємо

$$a^\ddagger_{ij} = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m n^{(-\frac{1}{2})}_{ik}\widetilde{a}^\dagger_{kl} m^{(\frac{1}{2})}_{lj} = \frac{\sum\limits_k n^{(-\frac{1}{2})}_{ik} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{k\}} \mathrm{cdet}_k\left(\left(\widetilde{\mathbf{M}}\right)_{.\,k}(\hat{\mathbf{m}}_{.j})\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\widetilde{\mathbf{M}}\right|^\beta_\beta}, \tag{2.64}$$

для всіх $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.

Якщо $\mathrm{rank}(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}) = n$, тоді за Наслідком 2.3, $\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = (\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\sharp$. Отже,

$$\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = \left(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}. \tag{2.65}$$

Оскільки, матриця $\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}$ – ермітова і повного рангу, то можемо використати визначникове зображення матриці оберненої до ермітової (1.13). Позначимо $\mathbf{A}^*\mathbf{M} =: \widehat{\mathbf{A}} = (\widehat{a}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$. Тоді

$$a^\ddagger_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n L_{ki}\hat{a}_{kj}}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})} = \frac{\mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.i}\left(\widehat{\mathbf{a}}_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})}. \tag{2.66}$$

де $\widehat{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{M}$ для всіх $j = 1,\ldots,m$.

Тепер, нехай матриця $(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ буде неермітовою і $\mathrm{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp) < m$. Використовуючи (2.8) для визначникового зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$, одержимо

$$\widetilde{a}^\dagger_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{A}}^*\right)_{j.}(\widetilde{\mathbf{a}}^*_{i.})\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{A}}^*\right|^\alpha_\alpha},$$

де $\widetilde{\mathbf{a}}^*_{i.}$ – i-ий рядок матриці $\widetilde{\mathbf{A}}^*$ для всіх $i = 1,\ldots,n$.

Позначимо $\widetilde{\mathbf{N}} := \left(\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\right)$ та $\hat{\mathbf{N}} := \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$. Оскільки,

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{A}}^* = \left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)^* = \left(\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{N}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \sum_k n^{(-\frac{1}{2})}_{ik}\hat{\mathbf{a}}^*_{k.} = \hat{\mathbf{n}}_{i.}$$

де $\hat{\mathbf{n}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\hat{\mathbf{N}}$, то для зваженої узагальненої оберненої матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \left(a^{\ddagger}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$, маємо

$$a^{\ddagger}_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} n_{ik}^{(-\frac{1}{2})}\tilde{a}^{\dagger}_{kl} m_{lj}^{(\frac{1}{2})} = \frac{\sum\limits_{l}\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{l\}} \mathrm{rdet}_l\left(\left(\widetilde{\mathbf{N}}\right)_{l.}\left(\hat{\mathbf{n}}\right)_{i.}\right)^{\alpha}_{\alpha} m_{lj}^{(\frac{1}{2})}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}}\left|\widetilde{\mathbf{N}}\right|^{\alpha}_{\alpha}}, \qquad (2.67)$$

для всіх $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.

Якщо $\mathrm{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}) = m$, тоді за Наслідком 2.3, $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \mathbf{A}^{\sharp}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})^{-1}$. Отже,

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\left(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}\right)^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}. \qquad (2.68)$$

Оскільки матриця $\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}$ є ермітовою і повного рангу, то для неї використаємо визначникове зображення (1.12) як матриці оберненої до ермітової. Позначимо $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*} =: \check{\mathbf{A}} = (\check{a})_{ij} \in \mathbb{H}^{n\times m}$. Таким чином, одержимо

$$a^{\ddagger}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\check{a}_{ik}R_{jk}}{\det(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*})} = \frac{\mathrm{rdet}_j(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*})_{j.}\left(\check{\mathbf{a}}\right)_{i.}}{\det(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*})}, \qquad (2.69)$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i.}$ – i-ий рядок матриці $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}$ для всіх $i = 1,\ldots,n$.

Отже, ми довели теорему.

Теорема 2.8. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r}$. Якщо матриця $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ не є ермітовою, тоді зважена узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \left(a^{\ddagger}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ має визначникові зображення:*

- *(2.64), коли $r < n$,*
- *(2.66), коли $r = n$.*

Якщо $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ – неермітова, тоді $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \left(a^{\ddagger}_{ij}\right)$ має визначникові зображення:

- *(2.67), коли $r < m$,*
- *(2.69), коли $r = m$.*

2.2.4. Визначникові зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза над полем комплексних чисел. Для зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}_{r}$ над полем комплексних чисел з вагами $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$, які є додатноозначеними матрицями порядків m та n, відповідно, маємо наступні граничні зображення.

Лема 2.18. *([266], Наслідок 3.4.) Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{A}^{\sharp} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}$. *Тоді*

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\sharp} = \lim_{\lambda\to 0}\mathbf{A}^{\sharp}(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})^{-1}. \tag{2.70}$$

У цьому випадку є очевидним виконання Лем 2.14 та 2.15 про ранги матриць. В Лемах 2.16 та 2.17 про аналоги характеристичного полінома, покладемо

$$c_n^{(ij)} = \left|\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right|, \;\; c_k^{(ij)} = \sum_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right|_{\beta}^{\beta},$$
$$r_m^{(ij)} = \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.})\right|, \;\; r_l^{(ij)} = \sum_{\alpha\in I_{l,m}\{j\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.})\right|_{\alpha}^{\alpha}$$

для всіх $k = 1,\dots,n-1$, $l = 1,\dots,m-1$, $i = 1,\dots,n$ та $j = 1,\dots,m$ і одержимо наступну лему.

Лема 2.19. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *і* $\lambda \in \mathbb{R}$, *тоді*

$$\det\left(\left(\lambda\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right) = c_1^{(ij)}\lambda^{n-1} + c_2^{(ij)}\lambda^{n-2} + \dots + c_n^{(ij)},$$
$$\det\left((\lambda\mathbf{I}_m + \mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.})\right) = r_1^{(ij)}\lambda^{m-1} + r_2^{(ij)}\lambda^{m-2} + \dots + r_m^{(ij)}.$$

Опираючись на граничні зображення (2.70), Леми 2.14, 2.15 та 2.19 одержимо теорему про визначникові зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза над полем комплексних чисел.

Теорема 2.9. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}_{r}$, *тоді її зважена узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза* $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \left(a^{\ddagger}_{ij}\right) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *має наступні визначникові зображення*

$$a^{\ddagger}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^{\sharp}_{.j}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.}(\mathbf{a}^{\sharp}_{i.})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}}\left|\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

2.2.5. Приклад визначникового зображення кватерніонової зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. Розглянемо матриці

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} & \mathbf{j}\\ -\mathbf{k} & \mathbf{i} & 1\\ \mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{i}\\ \mathbf{j} & -1 & \mathbf{i}\end{bmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{k} & \mathbf{i} & 0\\ -\mathbf{k} & 2 & 0 & \mathbf{j}\\ -\mathbf{i} & 0 & 2 & \mathbf{k}\\ 0 & -\mathbf{j} & -\mathbf{k} & 2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}^{-1}=\begin{bmatrix} 23 & 16-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+10\mathbf{k} & -16+10\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}\\ 16+2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-10\mathbf{k} & 29 & -19-\mathbf{i}-13\mathbf{j}-\mathbf{k}\\ -16-10\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k} & -19+\mathbf{i}+13\mathbf{j}+\mathbf{k} & 29\end{bmatrix}.$$

Прямим обчисленням знайдемо, що всі головні мінори ермітових матриць $\mathbf{M}$ та $\mathbf{N}^{-1}$ є додатними. Отже, матриці $\mathbf{M}$ та $\mathbf{N}^{-1}$ – додатноозначені. Знайшовши головні мінори ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, одержимо $\operatorname{rank}\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\operatorname{rank}\mathbf{A}=2$. Дальше маємо

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\sharp=&\mathbf{M}\mathbf{A}^*\mathbf{N}^{-1}=\\ =&\begin{bmatrix} 51-12\mathbf{i}+25\mathbf{j}-24\mathbf{k} & -43-18\mathbf{i}+39\mathbf{k} & -18+26\mathbf{i}-30\mathbf{j}-38\mathbf{k} & 19-\mathbf{i}-50\mathbf{j}-42\mathbf{k}\\ -32\mathbf{i}+17\mathbf{j}-37\mathbf{k} & -24-50\mathbf{i}+26\mathbf{j}+24\mathbf{k} & -5-24\mathbf{i}-56\mathbf{j}+\mathbf{k} & -38-25\mathbf{i}-18\mathbf{j}-67\mathbf{k}\\ 5-6\mathbf{i}-50\mathbf{j}+11\mathbf{k} & 44+23\mathbf{i}-12\mathbf{j}+7\mathbf{k} & 30+38\mathbf{i}+5\mathbf{j}+37\mathbf{k} & 18-44\mathbf{i}+6\mathbf{j}+54\mathbf{k}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Оскільки, матриця

$$\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 178 & 41+47\mathbf{i}+47\mathbf{j}+43\mathbf{k} & -41+43\mathbf{i}+47\mathbf{j}+47\mathbf{k}\\ 41-47\mathbf{i}-47\mathbf{j}-43\mathbf{k} & 176 & -40-46\mathbf{i}-42\mathbf{j}-46\mathbf{k}\\ -41-43\mathbf{i}-47\mathbf{j}-47\mathbf{k} & -40+46\mathbf{i}+42\mathbf{j}+46\mathbf{k} & 176\end{bmatrix}$$

є ермітовою, то будемо шукати визначникове зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}=\left(\tilde{a}^\dagger_{ij}\right)\in\mathbb{H}^{3\times 4}$ за Теоремою 2.7, використовуючи рівняння (2.55).

Маємо,

$$\sum_{\beta\in J_{2,\,3}}\left|\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)^{\beta}_{\beta}\right|=23380+23380+23380=70140,$$

$$\sum_{\beta\in J_{2,\,3}\{1\}}\operatorname{cdet}_1\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.1}\left(\mathbf{a}^\sharp_{.1}\right)\right)^{\beta}_{\beta}=13360-3340\mathbf{i}+6680\mathbf{j}-6680\mathbf{k}.$$

Тоді,

$$a^\ddagger_{11}=\frac{8-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-4\mathbf{k}}{42}.$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 8-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-4\mathbf{k} & -7-3\mathbf{i}+6\mathbf{k} & -3+4\mathbf{i}-5\mathbf{j}-6\mathbf{k} & 3-8\mathbf{j}-7\mathbf{k} \\ -5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k} & -4-8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k} & -1-4\mathbf{i}-9\mathbf{j} & -6-4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-11\mathbf{k} \\ -1-\mathbf{i}-8\mathbf{j}+2\mathbf{k} & 7+4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k} & 5+6\mathbf{i}+\mathbf{j}+6\mathbf{k} & 3-7\mathbf{i}+\mathbf{j}+9\mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

2.3. Кватерніонова матриця Дразіна та її визначникові зображення

2.3.1. Означення кватерніонової матриці Дразіна.

За Теоремою 1.16 кватерніонові квадратні матриці зводяться до жорданової нормальної форми. Тоді довільну кватерніонову матрицю $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ з $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ можна подати у вигляді (1.28) та існує відповідна матриця $\mathbf{X}$, яка задається формулою (1.29) і, очевидно, задовольняє рівняння (1.27). Отже, можемо ввести поняття кватерніонової узагальненої оберненої матриці Дразіна.

Означення 2.4. *Нехай для* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з індексом* $k = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$

$$(2)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X};\ \ (5)\ \mathbf{AX} = \mathbf{XA};\ \ (6a)\ \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{k};\ \ (6b)\ \mathbf{XA}^{k+1} = \mathbf{A}^{k}. \quad (2.71)$$

Тоді єдина матриця $\mathbf{X}$*, що задовольняє рівняння (2), (5) і (6a) або (6b) називається її узагальненою оберненою матрицею Дразіна і позначається як* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{d}$*. Зокрема, якщо* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$*, то* $\mathbf{X}$ *називається груповою оберненою і позначається* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\#}$*.*

Очевидно, що за виконання умови (5), рівняння (6a) та (6b) є рівносильними. Але, нижче ми будемо розглядати матриці, що задовольняють одну з умов (6a) або (6b) при не обов’язковому виконанні рівняння (5).

2.3.2. Визначникові зображення матриці Дразіна для ермітової кватерніонової матриці.

Для визначникового зображення ермітової кватерніонової матриці, ми застосуємо гранично-ранговий метод, який складається з лем про граничне зображення матриці Дразіна, про ранг матриць, характеристичний многочлен та його аналоги.

Аналогічно до [175], доводиться лема про граничне зображення матриці Дразіна для кватерніонової матриці.

Лема 2.20. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$, *тоді*

$$\mathbf{A}^d = \lim_{\lambda\to 0}\left(\lambda\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^{k+1}\right)^{-1}\mathbf{A}^k = \lim_{\lambda\to 0}\mathbf{A}^k\left(\lambda\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^{k+1}\right)^{-1},$$

де $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *і* $\mathbb{R}_+$ *– множина дійсних додатних чисел.*

Позначимо $\mathbf{a}_{.j}^{(m)}$ та $\mathbf{a}_{i.}^{(m)}$ – j-й стовпець та i-й рядок матриці $\mathbf{A}^m$, відповідно.

Лема 2.21. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}\left(n, \mathbb{H}\right)$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$, *тоді*

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) \leq \operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right). \tag{2.72}$$

Доведення. Матрицю $\mathbf{A}_{i\,.}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{j\,.}^{(k)}\right)$ можна подати як

$$\mathbf{A}_{i\,.}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{j\,.}^{(k)}\right) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} \sum\limits_{s=1}^{n} a_{1s}a_{s1}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s=1}^{n} a_{1s}a_{sn}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1}^{(k)} & \ldots & a_{j\,n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} a_{ns}a_{s1}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s=1}^{n} a_{ns}a_{sn}^{(k)} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i-\text{й}. \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Нехай $\mathbf{P}_{l\,i}\left(-a_{l\,j}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $(l \neq i)$ – матриця елементарних перетворень. Тоді

$$\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}_{i\,.}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{j\,.}^{(k)}\right)\cdot\prod_{l\neq i}\mathbf{P}_{l\,i}\left(-a_{l\,j}\right) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} \sum\limits_{s\neq j} a_{1s}a_{s1}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s\neq j} a_{1s}a_{sn}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1}^{(k)} & \ldots & a_{j\,n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{s\neq j} a_{ns}a_{s1}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s\neq j} a_{ns}a_{sn}^{(k)} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i-\text{й}. \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Отримана матриця $\tilde{\mathbf{A}}$ має наступну факторизацію.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \ldots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \ldots & a_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^{(k)} & a_{n2}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Позначимо першу матрицю як

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 := \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i-\text{й}. \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad\quad j-\text{й} \qquad\qquad \end{matrix} & \end{array}$$

Матриця $\tilde{\mathbf{A}}_1$ отримується з матриці $\mathbf{A}$ заміною всіх елементів її i-го рядка і j-го стовпця нулями за виключенням (i, j)-го елемента, котрий дорівнює 1. Оскільки, елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, то

$$\operatorname{rank} \mathbf{A}_{i\,.}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{j\,.}^{(k)}\right) \leq \min\left\{\operatorname{rank} \mathbf{A}^k, \operatorname{rank} \tilde{\mathbf{A}}\right\}.$$

Так як $\operatorname{rank} \tilde{\mathbf{A}}_1 \geq \operatorname{rank} \mathbf{A}^k$, то це завершує доведення леми. □

Наступна лема доводиться аналогічно.

Лема 2.22. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *з індексом* $\operatorname{Ind} \mathbf{A} = k$*, тоді*

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{i\,.}\left(\mathbf{a}_{j\,.}^{(k)}\right) \leq \operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right).$$

Аналоги характеристичного многочлена розглядаються в наступних лемах.

Лема 2.23. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *– ермітова з індексом* $\operatorname{Ind} \mathbf{A} = k$ *і* $\lambda \in \mathbb{R}$*, тоді*

$$\operatorname{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) = c_1^{(ij)}\lambda^{n-1} + c_2^{(ij)}\lambda^{n-2} + \ldots + c_n^{(ij)}, \tag{2.73}$$

де $c_n^{(ij)} = \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)$ *і* $c_s^{(ij)} = \sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{k}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$ *для всіх* $s = 1, \ldots, n-1$*,* $i, j = 1, \ldots, n$*.*

Доведення. Позначимо $\mathbf{b}_{.i}$ – i-ий стовпець ермітової матриці $\mathbf{A}^{k+1} =: (b_{ij})_{n\times n}$. Розглянемо ермітову матрицю $\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\mathbf{b}_{.i}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Вона відрізняється від матриці $\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)$ елементом b_{ii}. Беручи до уваги Теорему 1.17, одержимо

$$\det\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\mathbf{b}_{.i}) = d_1\lambda^{n-1} + d_2\lambda^{n-2} + \ldots + d_n, \tag{2.74}$$

де $d_s = \sum\limits_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}$ — сума головних мінорів порядку s, що містять елементи i-го стовпця для всіх $s = 1, \ldots, n-1$ і $d_n = \det\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)$. Оскільки,

$$\mathbf{b}_{.i} = \begin{bmatrix} \sum\limits_l a_{1l}^{(k)} a_{li} \\ \sum\limits_l a_{2l}^{(k)} a_{li} \\ \vdots \\ \sum\limits_l a_{nl}^{(k)} a_{li} \end{bmatrix} = \sum_l \mathbf{a}_{.l}^{(k)} a_{li},$$

де $\mathbf{a}_{.l}^{(k)}$ – l-й стовпець матриці $\mathbf{A}^k$ для всіх $l = 1, \ldots, n$. Враховуючи Теорему 1.3, Леми 1.4 та 1.6, з одного боку маємо

$$\begin{gathered} \det\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\mathbf{b}_{.i}) = \operatorname{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\mathbf{b}_{.i}) = \\ = \sum_l \operatorname{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.l}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(k)} a_{li}\right) = \sum_l \operatorname{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(k)}\right) \cdot a_{li} \end{gathered} \tag{2.75}$$

З іншого боку, змінивши порядок підсумовування, одержимо,

$$\begin{gathered} d_s = \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \det\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{\beta}^{\beta} = \\ = \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \sum_l \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(k)} a_{l\,i}\right)\right)_{\beta}^{\beta} = \\ = \sum_l \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta} \cdot a_{l\,i}, \qquad s = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{2.76}$$

Підставивши вирази (2.75) та (2.76) в (2.74), і прирівнюючи коефіцієнти при $a_{l\,i}$, коли $l = j$, одержимо (2.73). $\square$

Наступна лема доводиться аналогічно.

Лема 2.24. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *– ермітова з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *з* $\lambda \in \mathbb{R}$, *тоді*

$$\operatorname{rdet}_j(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1})_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^{(k)}) = r_1^{(ij)}\lambda^{n-1} + r_2^{(ij)}\lambda^{n-2} + \ldots + r_n^{(ij)},$$

де $r_n^{(ij)} = \operatorname{rdet}_j(\mathbf{A}^{k+1})_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^{(k)})$ *і* $r_s^{(ij)} = \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^{k+1})_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^{(k)})\right)_{\alpha}^{\alpha}$ *для всіх* $s = 1, \ldots, n-1$ *та* $i, j = 1, \ldots, n$.

Опираючись на розглянуті допоміжні леми, доведемо основну теорему.

Теорема 2.10. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *– ермітова з індексом* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k} = r$*, тоді узагальнена обернена матриця Дразіна* $\mathbf{A}^{d} = \left(a_{ij}^{d}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *має визначникові зображення:*

$$a_{ij}^{d} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i} \left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} = \tag{2.77}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^{k+1})_{j\,.} (\mathbf{a}_{i.}^{(k)})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{2.78}$$

Доведення. Спочатку доведемо визначникове зображення (2.77). За Лемою 2.20, $\mathbf{A}^{d} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \left(\lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{A}^{k+1}\right)^{-1} \mathbf{A}^{k}$. Матриця $\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовою і повноранговою. За Теоремою 1.4, її обернену матрицю подамо як ліву обернену,

$$\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} & L_{2n} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix},$$

де L_{ij} – ліве ij-е алгебричне доповнення матриця $\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}$. Тоді,

$$\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)^{-1} \mathbf{A}^{k} =$$

$$= \frac{1}{\det\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)} \begin{bmatrix} \sum\limits_{s=1}^{n} L_{s1} a_{s1}^{(k)} & \sum\limits_{s=1}^{n} L_{s1} a_{s2}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} L_{s1} a_{sn}^{(k)} \\ \sum\limits_{s=1}^{n} L_{s2} a_{s1}^{(k)} & \sum\limits_{s=1}^{n} L_{s2} a_{s2}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} L_{s2} a_{sn}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} L_{sn} a_{s1}^{(k)} & \sum\limits_{s=1}^{n} L_{sn} a_{s2}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n} L_{sn} a_{sn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

За означенням лівого алгебричного доповнення, маємо

$$\mathbf{A}^{d} = \lim_{\lambda\to 0} \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{cdet}_1\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.1}\left(\mathbf{a}_{.1}^{(k)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1})} & \dots & \frac{\operatorname{cdet}_1\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.1}\left(\mathbf{a}_{.n}^{(k)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\operatorname{cdet}_n\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.n}\left(\mathbf{a}_{.1}^{(k)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1})} & \dots & \frac{\operatorname{cdet}_n\left(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.n}\left(\mathbf{a}_{.n}^{(k)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1})} \end{bmatrix}. \tag{2.79}$$

За Теоремою 1.17,

$$\det\left(\lambda \mathbf{I}+\mathbf{A}^{m+1}\right)=\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+d_2\lambda^{n-2}+\ldots+d_n,$$

де $d_s=\sum\limits_{\beta\in J_{s,\,n}}\left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_\beta^\beta$ - сума головних мінорів матриці $\mathbf{A}^{k+1}$ порядку s для всіх $s=1,\ldots,n-1$ і $d_n=\det\mathbf{A}^{k+1}$.

Оскільки, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1}=\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k}=r$, тоді $d_n=d_{n-1}=\ldots=d_{r+1}=0$. Звідси випливає, що $\det\left(\lambda \mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)=\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+d_2\lambda^{n-2}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}$.

Використовуючи (2.73), одержимо

$$\operatorname{cdet}_i\left(\lambda \mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)=c_1^{(ij)}\lambda^{n-1}+c_2^{(ij)}\lambda^{n-2}+\ldots+c_n^{(ij)}$$

для всіх $i,j=1,\ldots,n$. Тут

$$c_s^{(ij)}=\sum_{\beta\in J_{s,\,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^{k+1})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta,\ c_n^{(ij)}=\operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)$$

для всіх $s=1,\ldots,n-1$.

Доведемо, що $c_k^{(ij)}=0$, коли $k\geq r+1$ для всіх $i,j=1,\ldots,n$.

За Лемою 2.21 маємо $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\leq r$, тоді матриця $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)$ має не більше r лінійно незалежних справа стовпців. Розглянемо $\left((\mathbf{A}^{k+1})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta$, коли $\beta\in J_{s,n}\{i\}$. Це є головна підматриця матриці $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)$ порядку $s\geq r+1$. Викресливши її i-і рядки та стовпці, одержимо головну підматрицю порядку $s-1$ матриці $\mathbf{A}^{k+1}$. Позначимо її $\mathbf{M}$.

Можливі наступні випадки.

1. Нехай $s=r+1$ і $\det\mathbf{M}\neq 0$. У цьому випадку стовпці матриці $\mathbf{M}$ є лінійно незалежними справа. Доповнення їх по одній координаті до векторів матриці $\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta$ збереже їх лінійну незалежність справа. Отже, вони є базисом правого векторного простору стовпців матриці $\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta$ та i-ий стовпець є правою лінійною комбінацією його базисних стовпців. За Лемою 1.11 з цього маємо, що $\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta=0$, коли $\beta\in J_{s,n}\{i\}$ та $s=r+1$.

2. Якщо $s=r+1$ та $\det\mathbf{M}=0$, тоді p, $(p<s)$, є базисними для правого стовпцевого простору $\mathcal{R}_M$ та простору матриці $\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta$. Отже, за Зауваженням 1.8 та Лемою 1.11, одержимо $\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta=0$.

Якщо $s > r+1$, тоді за Зауваженням 1.8 випливає, що $\det \mathbf{M} = 0$ і p, $(p < r)$, стовпців є базисними для обох матриць $\mathbf{M}$ і $\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$. Отже, за Лемою 1.11, маємо $\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta} = 0$.

Таким чином, у всіх випадках

$$\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta} = 0,$$

коли $\beta \in J_{s,n}\{i\}$ і $r+1 \leq s < n$. З цього випливає, якщо $r+1 \leq s < n$, тоді

$$\begin{aligned} c_s^{(ij)} &= \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta} = 0, \\ c_n^{(ij)} &= \mathrm{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) = 0, \quad i,j = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Отже, $\mathrm{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) = c_1^{(ij)}\lambda^{n-1} + c_2^{(ij)}\lambda^{n-2} + \ldots + c_r^{(ij)}\lambda^{n-r}$ для всіх $i,j = 1,\ldots,n$. Замінивши ці значення в матриці (2.79), одержимо

$$\mathbf{A}^d = \lim_{\lambda\to 0}\begin{bmatrix} \frac{c_1^{(11)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(11)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}} & \ldots & \frac{c_1^{(1n)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(1n)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{c_1^{(n1)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(n1)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}} & \ldots & \frac{c_1^{(nn)}\lambda^{n-1}+\ldots+c_r^{(nn)}\lambda^{n-r}}{\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_r\lambda^{n-r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_r^{(11)}}{d_r} & \ldots & \frac{c_r^{(1n)}}{d_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{c_r^{(n1)}}{d_r} & \ldots & \frac{c_r^{(nn)}}{d_r} \end{bmatrix}.$$

Тут $c_r^{(ij)} = \sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$ і $d_r = \sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}$. Таким чином, ми отримали визначникове зображення матриці $\mathbf{A}^d$ за формулою (2.77).

Визначникове зображення (2.78) доводиться аналогічно. $\square$

Наступні наслідки дають визначникові зображення групової оберненої $\mathbf{A}^{\#}$ та проективних матриць $\mathbf{A}^d\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^d$, відповідно.

Наслідок 2.6. *Якщо* $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = 1$ *і* $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^2 = \mathrm{rank}\,\mathbf{A} = r \leq n$ *для ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *тоді групова обернена* $\mathbf{A}^{\#} = \left(a_{ij}^{\#}\right)_{n\times n}$ *має визначникові зображення:*

$$a_{ij}^{\#} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^2\right|_{\beta}^{\beta}} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j\,.}\left(\mathbf{a}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^2\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Доведення. Доведення очевидно випливає з Теореми 2.10, поклавши $k = 1$. $\square$

Наслідок 2.7. *Якщо* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k} = r \leq n$ *для ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$*, тоді*

$$\mathbf{A}^d\mathbf{A} = \left[\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k+1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}\right]_{n\times n}, \tag{2.80}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^d = \left[\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^{k+1})_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^{(k+1)})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\alpha}^{\alpha}}\right]_{n\times n}. \tag{2.81}$$

Доведення. Спочатку доведемо (2.80). Нехай $\mathbf{A}^d\mathbf{A} =: (v_{ij})_{n\times n}$. Використовуючи визначникове зображення (2.77) для $\mathbf{A}^d$, одержимо

$$v_{ij} = \sum_s a_{is}^d a_{sj} = \sum_s \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.s}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} \cdot a_{sj}.$$

Оскільки, $\sum\limits_s \mathbf{a}_{.s}^{(k)} a_{sj} = \mathbf{a}_{.j}^{(k+1)}$, то звідси слідує(2.80).

Аналогічно доведемо (2.81), використовуючи визначникове зображення (2.78) для $\mathbf{A}^d$. □

2.3.3. Визначникові зображення матриці Дразіна для довільної кватерніонової матриці. Для довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ з $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ та $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k} = r$, ми не можемо застосувати метод, який використали для ермітових матриць тому, що лема про аналоги характеристичного многочлена для довільних кватерніонових матриць, в загальному, не виконується. Має місце наступне представлення оберненої матриці Дразіна, яке можна узагальнити з множини комплексних матриць (див. [22]) до кватерніонових наступним чином.

Лема 2.25. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$*, тоді*

$$\mathbf{A}^d = \mathbf{A}^k(\mathbf{A}^{2k+1})^{\dagger}\mathbf{A}^k. \tag{2.82}$$

Застосовуючи представлення (2.82) до узагальненої оберненої матриці Дразіна $\mathbf{A} = \left(a_{ij}^{d}\right)$, одержимо

$$a_{ij}^{d} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \left(a_{ts}^{(2k+1)}\right)^{\dagger} a_{sj}^{(k)} \qquad (2.83)$$

для всіх $i, j = 1, \ldots, n$. Позначимо $\hat{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $(\mathbf{A}^{2k+1})^{*}\mathbf{A}^{k} =: \hat{\mathbf{A}} = (\hat{a}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для всіх $s = 1, \ldots, n$. З того, що $\sum\limits_{s}\left(\mathbf{a}_{.s}^{(2k+1)}\right)^{*} a_{sj}^{(k)} = \hat{\mathbf{a}}_{.j}$, та використавши (2.7) для визначникового зображення узагальненої оберненої Мура-Пенроуза $(\mathbf{A}^{2k+1})^{\dagger}$, одержимо

$$\sum_{s=1}^{n}\left(a_{ts}^{(2k+1)}\right)^{\dagger} a_{sj}^{(k)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_{t}\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,t}\left(\mathbf{a}_{.s}^{(2k+1)}\right)^{*}\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} \cdot a_{sj}^{(k)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_{t}\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,t}(\hat{\mathbf{a}}_{.\,j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}.$$

Отже, узагальнена обернена матриця Дразіна $\mathbf{A}^{d}$ має визначникове зображення

$$a_{ij}^{d} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_{t}\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,t}(\hat{\mathbf{a}}_{.\,j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}, \qquad (2.84)$$

для всіх $i, j = 1, \ldots, n$.

Позначимо $\check{\mathbf{a}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{A}^{k}(\mathbf{A}^{2k+1})^{*} =: \check{\mathbf{A}} = (\check{a}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для всіх $t = 1, \ldots, n$. З того, що $a_{it}^{(k)}\sum\limits_{t}\left(\mathbf{a}_{t.}^{(2k+1)}\right)^{*} = \check{\mathbf{a}}_{i\,.}$ та використавши (2.8) для визначникового зображення узагальненої оберненої Мура-Пенроуза $(\mathbf{A}^{2k+1})^{\dagger}$, одержимо

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)}\left(a_{ts}^{(2k+1)}\right)^{\dagger} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \cdot \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_{s}\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\right)_{s\,.}\left(\mathbf{a}_{t.}^{(2k+1)}\right)^{*}\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_{s}\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\right)_{s.}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}}$$

Таким чином, узагальнена обернена матриця Дразіна $\mathbf{A}^d$ володіє також наступним визначниковим зображенням,

$$a_{ij}^d = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}\{s\}} \mathrm{rdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1} \left(\mathbf{A}^{2k+1} \right)^* \right)_{s\,.} (\check{\mathbf{a}}_{i\,.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right) a_{sj}^{(k)}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}} \left| \mathbf{A}^{2k+1} \left(\mathbf{A}^{2k+1} \right)^* \right|_{\alpha}^{\alpha}} \tag{2.85}$$

для всіх $i, j = 1, \ldots, n$.

Ми довели

Теорема 2.11. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *з* $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = k$ *і* $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{k+1} = \mathrm{rank}\,\mathbf{A}^k = r$*, тоді її узагальнена обернена матриця Дразіна* $\mathbf{A}^d$ *має визначникові зображення (2.84) та (2.85).*

З Теореми 2.11 очевидно слідує наслідок про визначникові зображення групової оберненої $\mathbf{A}^{\#}$ для довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$.

Наслідок 2.8. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *з* $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = 1$ *і* $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^2 = \mathrm{rank}\,\mathbf{A} = r$*, тоді її групова обернена матриця* $\mathbf{A}^{\#} = (a_{ij}^{\#})$ *має визначникові зображення*

$$a_{ij}^{\#} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it} \sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left(\left(\left(\mathbf{A}^3 \right)^* \mathbf{A}^3 \right)_{.\,t} (\hat{\mathbf{a}}_{.\,j}) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^3 \right)^* \mathbf{A}^3 \right|_{\beta}^{\beta}} = \tag{2.86}$$

$$= \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}\{s\}} \mathrm{rdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^3 \left(\mathbf{A}^3 \right)^* \right)_{.\,s} (\check{\mathbf{a}}_{i\,.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right) a_{sj}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}} \left| \mathbf{A}^3 \left(\mathbf{A}^3 \right)^* \right|_{\alpha}^{\alpha}} \tag{2.87}$$

для всіх $i, j = 1, \ldots, n$.

2.3.4. Визначникові зображення матриці Дразіна над полем комплексних чисел. Для узагальненої оберненої матриці Дразіна $\mathbf{A}^d$ довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ над полем комплексних чисел мають місце Лема 2.20 про граничні зображення, Леми 2.72 та 2.22 про ранги матриць. В Лемах 2.23 та

2.24 про аналоги характеристичного полінома, покладемо, відповідно,

$$c_n^{(ij)} = \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right|,\;\; c_l^{(ij)} = \sum_{\beta\in J_{l,\,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{k}\right)\right|_{\beta}^{\beta},$$
$$r_n^{(ij)} = \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{j\,.}\left(\mathbf{a}_{i.}^{(k)}\right)\right|,\;\; r_l^{(ij)} = \sum_{\alpha\in I_{l,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{j\,.}\left(\mathbf{a}_{i.}^{(k)}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}$$

для всіх $l = 1, \dots, n-1$ та $i, j = 1, \dots, n$, і одержимо наступну лему.

Лема 2.26. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *і* $\lambda \in \mathbb{R}$, *тоді*

$$\det\left(\left(\lambda\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right) = c_1^{(ij)}\lambda^{n-1} + c_2^{(ij)}\lambda^{n-2} + \cdots + c_n^{(ij)},$$
$$\det\left((\lambda\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^{k+1})_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^{(k)})\right) = r_1^{(ij)}\lambda^{n-1} + r_2^{(ij)}\lambda^{n-2} + \cdots + r_n^{(ij)}.$$

Опираючись на граничні зображення Леми 2.20, 2.72, 2.22 та 2.26 одержимо теорему про визначникові зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна над полем комплексних чисел.

Теорема 2.12. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k} = r$, *тоді її узагальнена обернена матриця Дразіна* $\mathbf{A}^{d} = \left(a_{ij}^{d}\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *має наступні визначникові зображення*

$$a_{ij}^{d} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} = \tag{2.88}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}^{k+1})_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^{(k)})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{2.89}$$

Лема 2.27. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{2} = \operatorname{rank}\mathbf{A} = r$, *тоді її групова обернена* $\mathbf{A}^{\#} = \left(a_{ij}^{\#}\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *має наступні визначникові зображення*

$$a_{ij}^{\#} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^{2}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{2}\right|_{\beta}^{\beta}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}^{2})_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{2}\right|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{2.90}$$

Порівнюючи отримані визначникові зображення матриці Дразіна для комплексних матриць з визначниковим зображення (1.30) не важко відмітити їх простішу конструкцію та більшу аплікабельність. Новизна і актуальність отриманих визначникових зображень комплексної матриці Дразіна підтверджується публікаціями [101, 110].

2.3.5. Приклад визначникового зображення матриці Дразіна. Розглянемо матрицю

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -\mathbf{k} & \mathbf{j}\\ 1 & 0 & \mathbf{i}\end{bmatrix}. \tag{2.91}$$

Оскільки,

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -2\mathbf{k} & \mathbf{i}+2\mathbf{j}\\ 2\mathbf{k} & 2 & -2\mathbf{i}\\ -\mathbf{i}+2\mathbf{j} & 2\mathbf{i} & 3\end{bmatrix},\ \mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}-1+\mathbf{j}+\mathbf{k} & -\mathbf{i}+\mathbf{k} & -1\\ \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k} & -1+\mathbf{j} & \mathbf{i}\\ 2\mathbf{i} & \mathbf{j} & -1+\mathbf{k}\end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}^2)^*\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}10 & 2+2\mathbf{j}-6\mathbf{k} & 2+2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\ 2-2\mathbf{j}+6\mathbf{k} & 5 & -3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\ 2-2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-2\mathbf{k} & 3-\mathbf{j}-2\mathbf{k} & 4\end{bmatrix},$$

$$\det\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\det(\mathbf{A}^2)^*\mathbf{A}^2=0,\quad |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_2^2=\det\begin{bmatrix}3 & -2\mathbf{k}\\ 2\mathbf{k} & 2\end{bmatrix}=2,$$

$$\left|(\mathbf{A}^*)^2\,\mathbf{A}^2\right|_2^2=\det\begin{bmatrix}10 & 2+2\mathbf{j}-6\mathbf{k}\\ 2-2\mathbf{j}+6\mathbf{k} & 5\end{bmatrix}=6,$$

тоді згідно із Зауваженням 1.8, $r=\operatorname{rank}\mathbf{A}=2$ і, за Означенням 2.4, Ind $\mathbf{A}=1$. Так як задана матриця $\mathbf{A}$ не є ермітовою, то будемо шукати її узагальнену обернену матрицю Дразіна за формулою (2.84). Звідси,

$$(\mathbf{A}^3)^*\mathbf{A}^3=\begin{bmatrix}23 & 2+3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-17\mathbf{k} & 8+4\mathbf{i}+15\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\ 2-3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+17\mathbf{k} & 15 & 3-13\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}\\ 8-4\mathbf{i}-15\mathbf{j}-2\mathbf{k} & 3+13\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k} & 15\end{bmatrix},$$

$$\sum_{\beta\in J_{2,3}} \left|(\mathbf{A}^3)^*\mathbf{A}^3\right|_{\beta}^{\beta} = \det\begin{bmatrix} 23 & 2+3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-17\mathbf{k} \\ 2-3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+17\mathbf{k} & 15 \end{bmatrix} + \\ +\det\begin{bmatrix} 15 & 3-13\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k} \\ 3+13\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k} & 15 \end{bmatrix} + \\ +\det\begin{bmatrix} 23 & 8+4\mathbf{i}+15\mathbf{j}+2\mathbf{k} \\ 8-4\mathbf{i}-15\mathbf{j}-2\mathbf{k} & 15 \end{bmatrix} = 72.$$

Оскільки,

$$\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^3)^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} & 2-2\mathbf{j}+4\mathbf{k} & -5\mathbf{i}-5\mathbf{j}-\mathbf{k} \\ -2+\mathbf{i}-6\mathbf{k} & -4+2\mathbf{k} & -1+4\mathbf{i}-4\mathbf{j} \\ -3-\mathbf{i}+5\mathbf{j} & -4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k} & -5-\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k} \end{bmatrix},$$

$$\left((\mathbf{A}^3)^*\mathbf{A}^3\right)_{.1}(\hat{\mathbf{a}}_{.1}) = \begin{bmatrix} -7-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} & 2+3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-17\mathbf{k} & 8+4\mathbf{i}+15\mathbf{j}+2\mathbf{k} \\ -2+\mathbf{i}-6\mathbf{k} & 15 & 3-13\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k} \\ -3-\mathbf{i}+5\mathbf{j} & 3+13\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k} & 15 \end{bmatrix},$$

тоді одержимо

$$a_{11}^d = \frac{\sum\limits_{t=1}^{3} a_{1t} \sum\limits_{\beta\in J_{2,3}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left((\mathbf{A}^3)^*\,\mathbf{A}^3\right)_{.\,t}\left(\hat{\mathbf{d}}_{.1}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}} \left|(\mathbf{A}^3)^*\mathbf{A}^3\right|_{\beta}^{\beta}} = \\ = \frac{\mathbf{i}}{72}\operatorname{cdet}_1\begin{bmatrix} -7-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} & 2+3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-17\mathbf{k} \\ -2+\mathbf{i}-6\mathbf{k} & 15 \end{bmatrix} + \\ + \frac{\mathbf{i}}{72}\operatorname{cdet}_1\begin{bmatrix} -7-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} & 8+4\mathbf{i}+15\mathbf{j}+2\mathbf{k} \\ -3-\mathbf{i}+5\mathbf{j} & 15 \end{bmatrix} + \\ + \frac{\mathbf{j}}{72}\operatorname{cdet}_1\begin{bmatrix} 23 & -7-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} \\ 2-3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+17\mathbf{k} & -2+\mathbf{i}-6\mathbf{k} \end{bmatrix} + \\ + \frac{\mathbf{j}}{72}\operatorname{cdet}_1\begin{bmatrix} -2+\mathbf{i}-6\mathbf{k} & 3-13\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k} \\ -3-\mathbf{i}+5\mathbf{j} & 15 \end{bmatrix} + \\ + \frac{\mathbf{k}}{72}\operatorname{cdet}_2\begin{bmatrix} 23 & -7-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} \\ 8-4\mathbf{i}-15\mathbf{j}-2\mathbf{k} & -3-\mathbf{i}+5\mathbf{j} \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{\mathbf{k}}{72}\mathrm{cdet}_2\begin{bmatrix} 15 & -2+\mathbf{i}-6\mathbf{k} \\ 3+13\mathbf{i}-2\mathbf{j}-5\mathbf{k} & -3-\mathbf{i}+5\mathbf{j} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}(-1-5\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$\mathbf{A}^d = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1-5\mathbf{i}-\mathbf{j} & -2+i-3j-2k & 3+3\mathbf{i}-3\mathbf{k} \\ -5+\mathbf{i}+\mathbf{k} & 1+2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k} & 3-3\mathbf{i}-3\mathbf{j} \\ 2+2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k} & 2+\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k} & -3-6\mathbf{i}+3\mathbf{j} \end{bmatrix}.$$

2.4. Кватерніонова зважена матриця Дразіна та її визначникові зображення

2.4.1. Означення та властивості кватерніонової W-зваженої матриці Дразіна.

Клайн і Гревілл [34] розширили поняття узагальненої оберненої комплексної матриці Дразіна для квадратної матриці до матриці Дразіна для прямокутної матриці, яке можна узагальнити для кватерніонової алгебри наступним чином.

Означення 2.5. *Для* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$*, W-зважена обернена Дразіна до* $\mathbf{A}$ *з вагою* $\mathbf{W}$ *є единим розв'язком рівнянь,*

$$(\mathbf{AW})^{k+1}\mathbf{XW} = (\mathbf{AW})^k,\ \mathbf{XWAWX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AWX} = \mathbf{XWA},$$

де $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$. *Позначаеться як* $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}}$.

Властивості комплексної W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна були досліджені, зокрема, у роботах [34, 183, 261–263, 281]. Більшість з них можуть без додаткових умов бути узагальнені для матриць над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$. Відмітимо ті з них, які будуть використовуватися в подальшому.

Лема 2.28. *[34] Нехай матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *з індексом* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$, *тоді*

$$\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = \mathbf{A}\left((\mathbf{WA})^{d}\right)^{2} = \tag{2.92}$$

$$= \left((\mathbf{AW})^{d}\right)^{2}\mathbf{A}, \tag{2.93}$$

$$\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}}\mathbf{W} = (\mathbf{WA})^{d}, \tag{2.94}$$

$$\mathbf{W}\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = (\mathbf{AW})^{d}. \tag{2.95}$$

Розглянемо загальні алгебраїчні структури (ЗАС) матриць $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ (див., напр. [262,281]). Нехай $\mathbf{A}^{\dagger} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, $\mathbf{W}^{\dagger} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ – узагальнені обернені матриці Мура-Пенроуза та $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ – зважена узагальнена обернена матриця Дразіна з індексом $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$. Нехай існують матриці $\mathbf{L} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ та $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ такі, що

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{22}\end{bmatrix}\mathbf{L}^{-1}.$$

Тоді

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{L}^{-1}, \quad \mathbf{W}^{\dagger} = \mathbf{L}\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1},$$

$$\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = \mathbf{L}\begin{bmatrix}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11}\mathbf{W}_{11})^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1},$$

де $\mathbf{L}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{W}_{11}$ є оборотними матрицями, а матриці $\mathbf{A}_{22}\mathbf{W}_{22}$, $\mathbf{W}_{22}\mathbf{A}_{22}$ – нільпотентними.

Наступна теорема, що була доведена [281] для комплексних матриць, аналогічно може бути доведена і для матриць над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$.

Теорема 2.13. *Нехай матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *такі, що* $\mathbf{A}_{22}\mathbf{W}_{22}$ *та* $\mathbf{W}_{22}\mathbf{A}_{22}$ *є нільпотентними матрицями індексу* k *в їх ЗАС. Тоді зважену узагальнену обернену матрицю Дразіна для матриці* $\mathbf{A}$ *по відношенню до* $\mathbf{W}$ *можна подати матричним виразом, що містить узагальнену обернену матрицю Мура-Пенроуза,*

$$\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = \left\{(\mathbf{AW})^{k}\left[(\mathbf{AW})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{k}\right\}\mathbf{W}^{\dagger}, \tag{2.96}$$

де $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), Ind(\mathbf{WA})\}$.

Наступна теорема дає інше зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна в термінах матриці Мура-Пенроуза.

Теорема 2.14. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *та* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *такі, що* $\mathbf{A}_{22}\mathbf{W}_{22}$ *та* $\mathbf{W}_{22}\mathbf{A}_{22}$ *є нільпотентними матрицями індексу* k *в їх ЗАС. Тоді W-зважена узагальнена обернена матриця Дразіна для матриці* $\mathbf{A}$ *по відношенню до* $\mathbf{W}$ *може бути подана наступним чином*

$$\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = \mathbf{W}^{\dagger}\left\{(\mathbf{W}\mathbf{A})^{k}\left[(\mathbf{W}\mathbf{A})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{W}\mathbf{A})^{k}\right\}, \qquad (2.97)$$

де $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{A}\mathbf{W}), \mathrm{Ind}(\mathbf{W}\mathbf{A})\}$.

Доведення. Оскільки матриця $\mathbf{W}_{22}\mathbf{A}_{22}$ є нільпотентною матрицею індексу k, тоді виходячи з ЗАС матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{W}$ та їх узагальнених обернених Мура-Пенроуза, маємо наступні канонічні жорданові форми

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{22}\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1}, \quad (\mathbf{W}\mathbf{A})^{k} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{k} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1},$$

$$\left[(\mathbf{W}\mathbf{A})^{2k+1}\right]^{\dagger} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{-2k-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1}.$$

Перемноживши матриці $\mathbf{W}^{\dagger}\left\{(\mathbf{W}\mathbf{A})^{k}\left[(\mathbf{W}\mathbf{A})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{W}\mathbf{A})^{k}\right\}$ одержимо,

$$\begin{gathered}\mathbf{W}^{\dagger}\left\{(\mathbf{W}\mathbf{A})^{k}\left[(\mathbf{W}\mathbf{A})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{W}\mathbf{A})^{k}\right\} = \\ \mathbf{L}\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{k} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{-2k-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{k} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1} = \\ \mathbf{L}\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11}^{-1}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{k}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{-2k-1}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{k} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1} = \\ \mathbf{L}\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11}^{-1}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11})^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1} = \\ \mathbf{L}\begin{bmatrix}(\mathbf{W}_{11}\mathbf{A}_{11}\mathbf{W}_{11})^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}}.\end{gathered}$$

□

2.4.2. Визначникові зображення W-зваженої матриці Дразіна з використанням визначникових зображень матриці Дразіна. Позначимо $\mathbf{AW} = \mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ і $\mathbf{WA} = \mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

Теорема 2.15. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, $k = \max\{\operatorname{Ind}\mathbf{V}, \operatorname{Ind}\mathbf{U}\}$. *Тоді для* $\mathbf{A}_{d,W} = \left(a_{ij}^{d,W}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *маємо:*

(i) *якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{U}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{U}^{k} = r$,

$$a_{ij}^{d,W} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{s.}\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i\,.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right) u_{sj}^{(k)}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2}, \tag{2.98}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i\,.}$ *- i-й рядок* $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} := \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^* \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *і* $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{iq}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *така, що*

$$\phi_{lq} = \sum_{\alpha\in I_{r,\,n}\{q\}} \operatorname{rdet}_q\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{q.}\left(\check{\mathbf{u}}_{l.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}$$

і $\check{\mathbf{u}}_{l.}$ *- l-й рядок* $\mathbf{U}^{k}(\mathbf{U}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{n\times n}$;

(ii) *якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{V}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{V}^{k} = r$,

$$a_{ij}^{d,W} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,t}\left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.\,j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2} \tag{2.99}$$

де $\widetilde{\psi}_{.\,j}$ *- j-й стовпець* $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} := (\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{2k}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *і* $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{st}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *така, що*

$$\psi_{st} = \sum_{\beta\in J_{r,\,m}\{s\}} \operatorname{cdet}_s\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\hat{\mathbf{v}}_{.t}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

і $\hat{\mathbf{v}}_{.t}$ *- j-й стовпець* $(\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{k} =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m\times m}$.

Доведення. (i) Нехай $r = \operatorname{rank}\mathbf{U}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{U}^{k}$, тоді за Теоремою 2.10, узагальнену обернену матрицю Дразіна $\mathbf{U}^{d} = \left(u_{ij}^{d}\right)$ можна подати як

$$u_{ij}^{d} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{.s}\left(\check{\mathbf{u}}_{i\,.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right) u_{sj}^{(k)}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}} \tag{2.100}$$

де $\check{\mathbf{u}}_{i.}$ є i-м рядком матриці $\mathbf{U}^k(\mathbf{U}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{U}} = (\check{u}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для всіх $i,j = 1,\ldots,n$. Тоді, елементи матриці $\left(\mathbf{U}^d\right)^2 = \left((u^d_{ij})^{(2)}\right)$ знаходяться як

$$(u^d_{ij})^{(2)} = \sum_{p=1}^{n} u^d_{ip}u^d_{pj} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,s}(\check{\mathbf{u}}_{i\,.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\right) u^{(k)}_{sp}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{t=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,t}(\check{\mathbf{u}}_{p\,.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\right) u^{(k)}_{tj}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,s}(\check{\mathbf{u}}_{i\,.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\right)}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{t=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,t}(\widetilde{\mathbf{u}}_{s\,.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\right) u^{(k)}_{tj}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\widetilde{\mathbf{u}}_{s\,.}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^* =: \widetilde{\mathbf{U}} = (\widetilde{u}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Позначимо

$$\phi_{is} = \sum_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,s}(\check{\mathbf{u}}_{i\,.})\right)^{\alpha}_{\alpha}, \tag{2.101}$$

тоді

$$(u^d_{ij})^{(2)} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\phi_{is}\sum\limits_{t=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,t}(\widetilde{\mathbf{u}}_{s\,.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\right) u^{(k)}_{tj}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{t=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,t}(\boldsymbol{\phi}^{(1)}_{i.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\right) u^{(k)}_{tj}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}\right)^2}, \tag{2.102}$$

де $\boldsymbol{\phi}_{i.}^{(1)}$ є i-м рядком матриці $\mathbf{\Phi}_1 := \mathbf{\Phi}\mathbf{U}^{2k}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*$, при цьому елементи матриці $\mathbf{\Phi} = (\phi_{is})$ знаходяться за формулою (2.101). Використовуючи зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна (2.92), маємо

$$a_{ij}^{d,W} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\left(u_{qj}^{d}\right)^{(2)}. \tag{2.103}$$

Підставивши (2.102) в (2.103), одержимо визначникове зображення (2.98).

(ii) Нехай тепер $r = \operatorname{rank}\mathbf{V}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{V}^{k}$, тоді за Теоремою 2.10 матрицю Дразіна $\mathbf{V}^d = \left(v_{ij}^d\right)$ можна подати як

$$v_{ij}^{d} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.t}(\hat{\mathbf{v}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{2.104}$$

де $\hat{\mathbf{v}}_{.j}$ є j-м стовпцем матриці $\hat{\mathbf{V}} := \left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{k} = (\hat{v}_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$. Елементи матриці $\left(\mathbf{V}^d\right)^2 = \left((v_{ij}^d)^{(2)}\right)$ знайдемо як

$$\begin{gathered}
(v_{ij}^{d})^{(2)} = \sum_{p=1}^{m} v_{ip}^{d} v_{pj}^{d} = \sum_{p=1}^{m} \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.t}(\hat{\mathbf{v}}_{.p})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} \times \\
\times \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} v_{ps}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{s\}} \operatorname{cdet}_s\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.s}(\hat{\mathbf{v}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} = \\
= \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.t}(\widetilde{\mathbf{v}}_{.s})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} \times \\
\times \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{s\}} \operatorname{cdet}_s\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.s}(\hat{\mathbf{v}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}},
\end{gathered}$$

де $\widetilde{\mathbf{v}}_{.s}$ – s-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{V}} := \left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k} = (\widetilde{v}_{ij})$. Позначимо

$$\psi_{sj} := \sum_{\beta\in J_{r,m}\{s\}} \operatorname{cdet}_s\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.s}(\hat{\mathbf{v}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}, \tag{2.105}$$

тоді

$$(v_{ij}^{d})^{(2)} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{m} v_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,t}\left(\widetilde{\mathbf{v}}_{.\,s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\psi_{sj}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}}\left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^{2}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,t}\left(\psi_{.j}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}}\left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^{2}}, \tag{2.106}$$

де $\boldsymbol{\psi}_{.j}^{(1)}$ є j-м стовпцем матриці $\mathbf{\Psi}_1 := \left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{V}^{2k}\Psi$, при цьому елементи матриці $\mathbf{\Psi} = (\psi_{sj})$ знаходяться за формулою (2.105). Використовуючи зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна (2.93), маємо

$$a_{ij}^{d,W} = \sum_{q=1}^{n}(v_{iq}^{d})^{(2)}a_{qj}. \tag{2.107}$$

Підставивши (3.36) в (2.107), одержимо визначникове зображення (2.99). $\square$

2.4.3. Визначникові зображення W-зваженої матриці Дразіна з використанням визначникових зображень матриці Мура-Пенроуза. Використовуючи (2.96), W-зважену обернену матрицю Дразіна $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = (a_{ij}^{d,\mathbf{W}})$ можна подати наступним чином

$$a_{ij}^{d,\mathbf{W}} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} v_{is}^{(k)}\left(v_{st}^{(2k+1)}\right)^{\dagger} v_{tl}^{(k)} w_{lj}^{\dagger} \tag{2.108}$$

для всіх $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$. Позначимо $\check{\mathbf{w}}_{t.}$ – t-й рядок матриці $\mathbf{V}^k\mathbf{W}^* =: \check{\mathbf{W}} = (\check{w}_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ для всіх $t = 1,\dots,m$. Застосувавши визначникове зображення (2.8) для матриці $\mathbf{W}^{\dagger}$ і з того, що $\sum\limits_{l} v_{tl}^{(k)}\mathbf{w}_{l.}^{*} = \check{\mathbf{w}}_{t.}$, випливає наступне

$$\sum_{l=1}^{m} v_{tl}^{(k)} w_{lj}^{\dagger} = \sum_{l=1}^{m} v_{tl}^{(k)} \cdot \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,\,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\mathbf{W}\mathbf{W}^{*}\right)_{j.}\left(\mathbf{w}_{l.}^{*}\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,\,n}}\left|\mathbf{W}\mathbf{W}^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,\,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^{*}\right)_{j\,.}\left(\check{\mathbf{w}}_{t.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,\,n}}\left|\mathbf{W}\mathbf{W}^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{2.109}$$

де $r_1 = \operatorname{rank} \mathbf{W}$. Позначимо $\check{\mathbf{v}}_{i.}$ як i-й рядок матриці $\mathbf{V}^k(\mathbf{V}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{V}} = (\check{v}_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ для $i = 1, \ldots, m$. Застосувавши визначникове зображення (2.8) для матриці $(\mathbf{V}^{2k+1})^\dagger$ та з того, що $\sum\limits_s v_{is}^{(k)} \left(\mathbf{v}_{s.}^{(2k+1)}\right)^* = \check{\mathbf{v}}_{i\,.}$, маємо

$$\sum_{s=1}^m v_{is}^{(k)} \left(v_{st}^{(2k+1)}\right)^\dagger = \sum_{s=1}^m v_{is}^{(k)} \cdot \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\right)_{t.}\left(\mathbf{v}_{s.}^{(2k+1)}\right)^*\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{V}^{2k+1}\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\right)_{t.}\left(\check{\mathbf{v}}_{i\,.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{V}^{2k+1}\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha}, \tag{2.110}$$

де $r = \operatorname{rank}^{k+1} = \operatorname{rank}^k$. Підставивши(2.109) та (2.110) в (2.108), одержимо

$$a_{ij}^{d,\mathbf{W}} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{t=1}^m \sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\right)_{t.}\left(\check{\mathbf{v}}_{i\,.}\right)\right)_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,\,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^*\right)_{j\,.}\left(\check{\mathbf{w}}_{t.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{V}^{2k+1}\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,\,n}} \left|\mathbf{W}\mathbf{W}^*\right|_\alpha^\alpha}.$$

Позначимо

$$\upsilon_{it} := \sum_{\alpha\in I_{r,\,m}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\right)_{t.}\left(\check{\mathbf{v}}_{i\,.}\right)\right)_\alpha^\alpha \tag{2.111}$$

і побудуємо матрицю $\boldsymbol{\Upsilon} = (\upsilon_{it})$. Нехай $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}} := \boldsymbol{\Upsilon}\check{\mathbf{W}} = \boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{V}^k\mathbf{W}^*$. З того, що $\sum\limits_{t=1}^m \upsilon_{it}\check{\mathbf{w}}_{t.} = \widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{i.}$ одержимо визначникове зображення

$$a_{ij}^{d,\mathbf{W}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,\,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^*\right)_{j\,.}\left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{i.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{V}^{2k+1}\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,\,n}} \left|\mathbf{W}\mathbf{W}^*\right|_\alpha^\alpha}. \tag{2.112}$$

Таким чином, ми довели теорему.

Теорема 2.16. *Нехай матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}_{r_1}^{n\times m}$ *з індексом* $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{AW}), \operatorname{Ind}(\mathbf{WA})\}$ *та* $r = \operatorname{rank}(\mathbf{AW})^{k+1} = \operatorname{rank}(\mathbf{AW})^k$. *Тоді W-зважена узагальнена обернена матриця Дразіна для матриці* $\mathbf{A}$ *по відношенню до* $\mathbf{W}$ *має визначникове зображення (2.112), де* $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{i.}$ *– i–й рядок матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}} = \boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{V}^k\mathbf{W}^*$, $\mathbf{V} = \mathbf{AW}$ *і* $\boldsymbol{\Upsilon} = (\upsilon_{it})$ *така, що* υ_{it} *знаходиться за формулою (2.111).*

Має місце також наступна теорема.

Теорема 2.17. *Нехай матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}_{r_1}$ *з індексом* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$ *та* $r = \mathrm{rank}(\mathbf{WA})^{k+1} = \mathrm{rank}(\mathbf{WA})^{k}$. *Тоді W-зважена узагальнена обернена матриця Дразіна для матриці* $\mathbf{A}$ *по відношенню до* $\mathbf{W}$ *має визначникове зображення*

$$a_{ij}^{d,\mathbf{W}} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{W}^*\mathbf{W} \right)_{.i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}} \left| \mathbf{W}^*\mathbf{W} \right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left| \left(\mathbf{U}^{2k+1} \right)^* \mathbf{U}^{2k+1} \right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{2.113}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{W}^*\mathbf{U}^k\mathbf{\Omega}$ *і матриця* $\mathbf{\Omega} = (\omega_{tj})$ *така, що* ω_{tj} *шукаємо за формулою (2.118).*

Доведення. Використовуючи (2.97), довільний елемент W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}}$ може бути поданий як

$$a_{ij}^{d,\mathbf{W}} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} w_{is}^{\dagger} u_{st}^{(k)} \left(u_{tl}^{(2k+1)} \right)^{\dagger} u_{lj}^{(k)} \tag{2.114}$$

для всіх $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Позначимо через $\hat{\mathbf{w}}_{.t}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{W}^*\mathbf{U}^k =: \hat{\mathbf{W}} = (\hat{w}_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ для довільного $t = 1, \dots, n$. З того, що $\sum\limits_{t} \mathbf{w}_{.s}^* u_{st}^{(k)} = \hat{\mathbf{w}}_{.t}$ та використовуючи визначникове зображення (2.7) для узагальненої оберненої Мура-Пенроуза $\mathbf{W}^{\dagger}$, одержимо

$$\sum_{s=1}^{n} w_{is}^{\dagger} u_{st}^{(k)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\mathbf{W}^*\mathbf{W} \right)_{.i} \left(\mathbf{w}_{.s}^* \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}} \left| \mathbf{W}^*\mathbf{W} \right|_{\beta}^{\beta}} \cdot u_{st}^{(k)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{W}^*\mathbf{W} \right)_{.i} \left(\hat{\mathbf{w}}_{.t} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}} \left| \mathbf{W}^*\mathbf{W} \right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{2.115}$$

де $r_1 = \mathrm{rank}\,\mathbf{W}$. Позначимо $\hat{\mathbf{u}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $(\mathbf{U}^{2k+1})^*\mathbf{U}^k =: \hat{\mathbf{U}} = (\hat{u}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для довільного $j = 1, \dots, n$. Застосувавши визначникове зображення (2.8) для матриці $\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^{\dagger}$ та з того, що $\sum\limits_{l}\left(\mathbf{u}_{.l}^{(2k+1)}\right)^{*}u_{lj}^{(k)}=\hat{\mathbf{u}}_{.j}$, випливає

$$\sum_{l=1}^{n}\left(u_{tl}^{(2k+1)}\right)^{\dagger}u_{lj}^{(k)}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{t\}}\operatorname{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.t}\left(\mathbf{u}_{.l}^{(2k+1)}\right)^{*}\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{U}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}\cdot u_{lj}^{(k)}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{t\}}\operatorname{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.t}\left(\hat{\mathbf{u}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{U}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}},\tag{2.116}$$

де $r=\operatorname{rank}(\mathbf{AW})^{k+1}=\operatorname{rank}(\mathbf{AW})^{k}$. Підставивши (2.116) та (2.115) в рівняння (2.114), одержимо

$$a_{ij}^{d,\mathbf{W}}=$$
$$\frac{\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{W}^{*}\mathbf{W}\right)_{.i}\left(\hat{\mathbf{w}}_{.t}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{t\}}\operatorname{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.t}\left(\hat{\mathbf{u}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}}\left|\left(\mathbf{W}^{*}\mathbf{W}\right)_{\beta}^{\beta}\right|\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{\beta}^{\beta}\right|}\tag{2.117}$$

де $\mathbf{U}=\mathbf{WA}$, $\hat{\mathbf{U}}=(\mathbf{U}^{2k+1})^{*}\mathbf{U}^{k}$ та $\hat{\mathbf{W}}=\mathbf{W}^{*}\mathbf{U}^{k}$. Позначимо

$$\omega_{tj}:=\sum_{\beta\in J_{r,\,n}\{t\}}\operatorname{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.t}\left(\hat{\mathbf{u}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\tag{2.118}$$

і побудуємо матрицю $\Omega=(\omega_{tj})$. Нехай $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}:=\hat{\mathbf{W}}\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{W}^{*}\mathbf{U}^{k}\boldsymbol{\Omega}$. З того, що $\sum\limits_{t=1}^{m}\hat{\mathbf{w}}_{.t}\omega_{tj}=\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.j}$, з рівняння (2.117) випливає (2.112). $\square$

2.4.4. Визначникові зображення W-зваженої матриці Дразіна в особливих випадках. У цьому пункті розглядаються визначникові зображення узагальненої W-зваженої оберненої матриці Дразіна для $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$ по відношенню до $\mathbf{W}\in\mathbb{H}^{n\times m}$ у особливих випадках, а саме, коли $\mathbf{AW}=\mathbf{V}=(v_{ij})\in\mathbb{H}^{m\times m}$ та $\mathbf{WA}=\mathbf{U}=(u_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовими матрицями. Тоді для визначникових зображень їх узагальнених обернених матриць Дразіна можна використати формули (2.77) та (2.78).

Для ермітової матриці застосуємо гранично-ранговий метод. Ракошевіч і Вей [259] отримали граничні зображення W-зваженого оберненого оператора Дразіна у банаховому просторі, що враховуючи Зауваження 1.1, можемо узагальнити для кватерніонової W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна наступним чином.

Лема 2.29. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ *по відношенню до* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n \times m}$, *тоді*

$$\mathbf{A}_{d,W} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\lambda \mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)^{-1} (\mathbf{AW})^k \mathbf{A} = \tag{2.119}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \mathbf{A}(\mathbf{WA})^k \left(\lambda \mathbf{I}_n + (\mathbf{WA})^{k+2}\right)^{-1} \tag{2.120}$$

де $\lambda \in \mathbb{R}_+$, *та* $\mathbb{R}_+$ *- є множиною дійсних додатних чисел.*

Позначимо через $\mathbf{v}_{.j}^{(k)}$ і $\mathbf{v}_{i.}^{(k)}$ – j-й стовпець та i-й рядок матриці $\mathbf{V}^k$, відповідно. Позначимо також $\bar{\mathbf{V}}^k := (\mathbf{AW})^k \mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ та $\bar{\mathbf{W}} := \mathbf{WAW} \in \mathbb{H}^{n \times m}$.

Лема 2.30. *Якщо* $\mathbf{AW} = \mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{H}^{m \times m}$ *з індексом* $\operatorname{Ind} \mathbf{V} = k$, *тоді*

$$\operatorname{rank} \left(\mathbf{V}^{k+2}\right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right) \leq \operatorname{rank} \left(\mathbf{V}^{k+2}\right). \tag{2.121}$$

Доведення. Очевидно, що $\mathbf{V}^{k+2} = \bar{\mathbf{V}}^k \bar{\mathbf{W}}$. Нехай $\mathbf{P}_{i\,s}\left(-\bar{w}_{j\,s}\right) \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $(s \neq i)$ є матрицею, (i, s)-м елементом якої є $-\bar{w}_{j\,s}$, всі діагональні елементи є 1, а всі решта елементів є 0. Матриця $\mathbf{P}_{i\,s}\left(-\bar{w}_{j\,s}\right)$, $(s \neq i)$, є матрицею елементарного перетворення. З цього випливає, що

$$\left(\mathbf{V}^{k+2}\right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right) \cdot \prod_{s \neq i} \mathbf{P}_{i\,s}\left(-\bar{w}_{j\,s}\right) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \sum\limits_{s \neq j} \bar{v}_{1s}^{(k)} \bar{w}_{s1} & \dots & \bar{v}_{1j}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s \neq j} \bar{v}_{1s}^{(k)} \bar{w}_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{s \neq j} \bar{v}_{ms}^{(k)} \bar{w}_{s1} & \dots & \bar{v}_{mj}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s \neq j} \bar{v}_{ms}^{(k)} \bar{w}_{sm} \end{bmatrix} \\ \hphantom{xxxxxxxxx} i-\text{й} \hphantom{xxxxxxxxx} \end{array}.$$

Маємо наступну факторизацію отриманої матриці.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \sum\limits_{s \neq j} \bar{v}_{1s}^{(k)} \bar{w}_{s1} & \dots & \bar{v}_{1j}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s \neq j} \bar{v}_{1s}^{(k)} \bar{w}_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{s \neq j} \bar{v}_{ms}^{(k)} \bar{w}_{s1} & \dots & \bar{v}_{mj}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s \neq j} \bar{v}_{ms}^{(k)} \bar{w}_{sm} \end{bmatrix} \\ \hphantom{xxxxxxxxx} i-\text{й} \hphantom{xxxxxxxxx} \end{array} =$$

$$=\begin{bmatrix} \bar{v}_{11}^{(k)} & \bar{v}_{12}^{(k)} & \ldots & \bar{v}_{1n}^{(k)} \\ \bar{v}_{21}^{(k)} & \bar{v}_{22}^{(k)} & \ldots & \bar{v}_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{v}_{m1}^{(k)} & \bar{v}_{m2}^{(k)} & \ldots & \bar{v}_{mn}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \bar{w}_{11} & \ldots & 0 & \ldots & \bar{w}_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{w}_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & \bar{w}_{nm} \end{bmatrix} j-\text{й}. \\ \qquad i-\text{й} \end{array}$$

Матриця

$$\widetilde{\mathbf{W}} := \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \bar{w}_{11} & \ldots & 0 & \ldots & \bar{w}_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{w}_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & \bar{w}_{nm} \end{bmatrix} j-\text{й} \\ \qquad i-\text{й} \end{array}$$

одержується з матриці $\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{WAW}$ заміною всіх елементів її j-го рядка та i-го стовпця нулями, за виключенням (i, j)-го елемента, який покладемо 1. Оскільки елементарні перетворення матриці не змінюють рангу, то $\operatorname{rank} \mathbf{V}_{.i}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right) \leq \min\left\{\operatorname{rank} \bar{\mathbf{V}}^k, \operatorname{rank} \tilde{\mathbf{W}}\right\}$. Очевидно, що

$$\operatorname{rank} \bar{\mathbf{V}}^k = \operatorname{rank}(\mathbf{AW})^k \mathbf{A} \geq \operatorname{rank}(\mathbf{AW})^{k+2},$$

$$\operatorname{rank} \widetilde{\mathbf{W}} \geq \operatorname{rank} \mathbf{WAW} \geq \operatorname{rank}(\mathbf{AW})^{k+2}.$$

З цих нерівностей безпосередньо випливає (2.72). □

Наступна лема доводиться аналогічно.

Лема 2.31. *Якщо* $\mathbf{WA} = \mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind} \mathbf{U} = k$, *тоді*

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{U}^{k+2}\right)_{i.}\left(\bar{\mathbf{u}}_{j.}^{(k)}\right) \leq \operatorname{rank}\left(\mathbf{U}^{k+2}\right),$$

де $\bar{\mathbf{U}}^k := \mathbf{A}(\mathbf{WA})^k \in \mathbb{H}^{m\times n}$.

Аналоги характеристичного многочлена розглядаються у наступних лемах.

Лема 2.32. *Якщо* $\mathbf{AW} = \mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *є ермітовою з* $\operatorname{Ind} \mathbf{V} = k$, *тоді*

$$\operatorname{cdet}_i\left(\lambda \mathbf{I}_m + \mathbf{V}^{k+2}\right)_{.i}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right) = c_1^{(ij)}\lambda^{m-1} + c_2^{(ij)}\lambda^{m-2} + \ldots + c_m^{(ij)}, \qquad (2.122)$$

де $\lambda \in \mathbb{R}$ *та*

$$c_m^{(ij)} = \mathrm{cdet}_i \left(\mathbf{V}^{k+2}\right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right), \quad c_s^{(ij)} = \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{V}^{k+2}\right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}$$

для всіх $s = 1, \ldots, n-1$ *та* $i, j = 1, \ldots, n$.

Доведення. Розглянемо ермітову матрицю $\left(t\mathbf{I} + \mathbf{V}^{k+2}\right)_{.i} (\mathbf{v}_{.i}^{(k+2)}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. За Теоремою 1.17, маємо

$$\det \left(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{V}^{k+2}\right)_{.i} \left(\mathbf{v}_{.i}^{(k+2)}\right) = d_1 \lambda^{n-1} + d_2 \lambda^{n-2} + \ldots + d_n, \tag{2.123}$$

де $d_s = \sum\limits_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} |\mathbf{V}^{k+2}|_{\beta}^{\beta}$ – сумма всіх головних мінорів порядку s, що є нанизаними на i-й стовпець для всіх $s = 1, \ldots, n-1$ та $d_n = \det\left(\mathbf{V}^{k+2}\right)$.

Очевидно, що

$$\mathbf{v}_{.i}^{(k+2)} = \begin{bmatrix} \sum\limits_l \bar{v}_{1l}^{(k)} \bar{w}_{li} \\ \sum\limits_l \bar{v}_{2l}^{(k)} \bar{w}_{li} \\ \vdots \\ \sum\limits_l \bar{v}_{nl}^{(k)} \bar{w}_{li} \end{bmatrix} = \sum_l \bar{\mathbf{v}}_{.l}^{(k)} \bar{w}_{li},$$

де $\bar{\mathbf{v}}_{.l}^{(k)}$ – l-й стовпець матриці $\bar{\mathbf{V}}^k = (\mathbf{AW})^k \mathbf{A}$ and $\mathbf{WAW} = \bar{\mathbf{W}} = (\bar{w}_{li})$ для всіх $l = 1, \ldots .n$. За Теоремою 1.3 та Леми 1.8, з одного боку маємо

$$\det \left(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{V}^{k+2}\right)_{.i} \left(\mathbf{v}_{.i}^{(k+2)}\right) = \mathrm{cdet}_i \left(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{V}^{k+2}\right)_{.i} \left(\mathbf{v}_{.i}^{(k+2)}\right) =$$
$$= \mathrm{cdet}_i \left(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{V}^{k+2}\right)_{.l} \left(\sum_l \bar{\mathbf{v}}_{.l}^{(k)} \bar{w}_{li}\right) = \sum_l \mathrm{cdet}_i \left(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{V}^{k+2}\right)_{.i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.l}^{(k)}\right) \cdot \bar{w}_{li} \tag{2.124}$$

З іншого боку для всіх $s = 1, \ldots, n-1$, одержимо

$$d_s = \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \det \left(\mathbf{V}^{k+2}\right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\mathbf{V}^{k+2}\right)_{\beta}^{\beta} =$$
$$= \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \sum_l \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{V}^{k+2}\right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.l}^{(k)} \bar{w}_{l\,i}\right)\right)_{\beta}^{\beta} =$$
$$= \sum_l \sum_{\beta \in J_{s,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{V}^{k+2}\right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.l}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta} \cdot \bar{w}_{l\,i}. \tag{2.125}$$

Підставивши (2.124) та (2.125) в (2.123), та прирівнявши множники $\bar{w}_{l\,i}$ коли $l = j$, маємо (2.122). $\square$

Аналогічно можна довести наступну лему.

Лема 2.33. *Якщо* $\mathbf{WA} = \mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *– ермітова з індексом* $\operatorname{Ind}\mathbf{U} = k$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}$*, тоді*

$$\operatorname{rdet}_j(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{U}^{k+2})_{j\,.}(\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)}) = r_1^{(ij)}\lambda^{n-1} + r_2^{(ij)}\lambda^{n-2} + \ldots + r_n^{(ij)},$$

де $r_n^{(ij)} = \operatorname{rdet}_j(\mathbf{U}^{k+2})_{j\,.}(\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)}),\quad r_s^{(ij)} = \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{U}^{k+2})_{j\,.}(\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)})\right)_{\alpha}^{\alpha}$ *для всіх* $s = 1, \ldots, n-1$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Теорема 2.18. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$*, і матриця* $\mathbf{AW} = \mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *є ермітовою з індексом* $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{AW}), \operatorname{Ind}(\mathbf{WA})\}$ *та* $\operatorname{rank}(\mathbf{AW})^{k+1} = \operatorname{rank}(\mathbf{AW})^{k} = r$*, тоді W-зважена обернена матриця Дразіна* $\mathbf{A}_{d,W} = \left(a_{ij}^{d,W}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *по відношенню до* $\mathbf{W}$ *має визначникове зображення:*

$$a_{ij}^{d,W} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}} \left|(\mathbf{AW})^{k+2}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{2.126}$$

де $\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}$ *– j-й стовпець матриці* $\bar{\mathbf{V}}^{k} = (\mathbf{AW})^{k}\mathbf{A}$ *для всіх* $j = 1, \ldots, m$.

Доведення. Матриця $\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ є повноранговою ермітовою матрицею. За Теоремою 1.4, вона має обернену матрицю, котру подамо як ліву обернену

$$\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)}\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & \ldots & L_{m1} \\ L_{12} & L_{22} & \ldots & L_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{1m} & L_{2m} & \ldots & L_{mm} \end{bmatrix},$$

де L_{ij} – ij-е алгебричне доповнення матриці $\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}$. Тоді

$$\left(\lambda \mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)^{-1} (\mathbf{AW})^k \mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{\det\left(\lambda \mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)} \begin{bmatrix} \sum\limits_{s=1}^m L_{s1}\bar{v}_{s1}^{(k)} & \sum\limits_{s=1}^m L_{s1}\bar{v}_{s2}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s=1}^m L_{s1}\bar{v}_{sn}^{(k)} \\ \sum\limits_{s=1}^m L_{s2}\bar{v}_{s1}^{(k)} & \sum\limits_{s=1}^m L_{s2}\bar{v}_{s2}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s=1}^m L_{s2}\bar{v}_{sn}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{s=1}^m L_{sm}\bar{v}_{s1}^{(k)} & \sum\limits_{s=1}^m L_{sm}\bar{v}_{s2}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s=1}^m L_{sm}\bar{v}_{sn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Використовуючи (2.119) та означення лівого алгебричного доповнення, одержимо

$$\mathbf{A}_{d,W} = \lim_{\alpha\to 0} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{cdet}_1\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)_{.1}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.1}^{(k)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2})} & \ldots & \frac{\mathrm{cdet}_1\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)_{.1}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.n}^{(k)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2})} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\mathrm{cdet}_n\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)_{.n}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.1}^{(k)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2})} & \ldots & \frac{\mathrm{cdet}_n\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)_{.m}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.n}^{(k)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2})} \end{bmatrix}. \qquad (2.127)$$

За Теоремою 1.17, маємо

$$\det\left(\lambda \mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right) = \lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + d_2\lambda^{m-2} + \ldots + d_m,$$

де $d_s = \sum\limits_{\beta\in J_{s,\,m}} \left|\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right|_\beta^\beta$ – сума головних мінорів матриці $(\mathbf{AW})^{k+2}$ порядку s для всіх $s = 1, \ldots, m-1$ та $d_m = \det(\mathbf{AW})^{k+2}$.

Оскільки, $\mathrm{rank}(\mathbf{AW})^{k+2} = \mathrm{rank}(\mathbf{AW})^{k+1} = \mathrm{rank}(\mathbf{AW})^k = r$, то $d_m = d_{m-1} = \ldots = d_{r+1} = 0$. З цього випливає, що $\det\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right) = \lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + d_2\lambda^{m-2} + \ldots + d_r\lambda^{m-r}$.

Використовуючи (2.122), отримаємо

$$\mathrm{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I}_m + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)_{.i}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right) = c_1^{(ij)}\lambda^{m-1} + c_2^{(ij)}\lambda^{m-2} + \ldots + c_m^{(ij)}$$

для всіх $i = 1, \ldots, m$ та $j = 1, \ldots, n$, де для всіх $s = 1, \ldots, m-1$

$$c_s^{(ij)} = \sum_{\beta\in J_{s,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{AW})_{.i}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta, \quad c_m^{(ij)} = \mathrm{cdet}_i(\mathbf{AW})_{.i}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right).$$

Доведемо, що $c_k^{(ij)} = 0$, коли $k \geq r+1$ для всіх $i = 1, \ldots, m$ та $j = 1, \ldots, n$.

За Лемою 2.21 $\left((\mathbf{AW})_{.i}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right)\right) \leq r$, тоді матриця $\left((\mathbf{AW})_{.i}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}\right)\right)$ має не більше r лінійно незалежних справа стовпців.

Розглянемо підматрицю $\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$, коли $\beta \in J_{s,m}\{i\}$. Вона є головною підматрицею матриці $\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)$ порядку $s \geq r+1$. Викресливши її i-й рядок та стовпець, одержимо головну підматрицю порядку $s-1$ матриці $(\mathbf{AW})^{k+2}$. Позначимо її $\mathbf{M}$.

Можливі наступні випадки.

– Нехай $s = r+1$ та $\det \mathbf{M} \neq 0$. У цьому випадку всі стовпці матриці $\mathbf{M}$ є лінійно незалежними справа. Доповнення її стовпців по одній координаті у матриці $\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$ збереже їх лінійну незалежність справа. Отже, вони є базисними у матриці $\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$, а її i-й стовпець є правою лінійною комбінацією базисних стовпців. За Лемою 1.11, з цього випливає, що $\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta} = 0$, коли $\beta \in J_{s,n}\{i\}$ та $s = r+1$.
– Якщо $s = r+1$ та $\det \mathbf{M} = 0$, тоді p, $(p < s)$, стовпців є базисними у матрицях $\mathbf{M}$ та $\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$. Тоді за Лемою 1.11, $\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta} = 0$.
– Якщо $s > r+1$, тоді $\det \mathbf{M} = 0$ і p, $(p < r)$, стовпців є базисними в обох матрицях, $\mathbf{M}$ та $\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$. За Лемою 1.11, знову маємо, що $\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta} = 0$.

Таким чином, у всіх випадках $\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta} = 0$, коли $\beta \in J_{s,m}\{i\}$ та $r+1 \leq s < m$. Звідси, якщо $r+1 \leq s < m$, тоді для всіх $i,j = 1,\ldots,n$

$$\begin{aligned} c^{(ij)}_{s} &= \sum_{\beta \in J_{s,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta} = 0,\\ c^{(ij)}_{m} &= \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Отже, $\mathrm{cdet}_i\left(\lambda\mathbf{I} + (\mathbf{AW})^{k+2}\right)_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right) = c^{(ij)}_1\lambda^{m-1} + c^{(ij)}_2\lambda^{m-2} + \ldots + c^{(ij)}_r\lambda^{m-r}$ для всіх $i = 1,\ldots,m$ та $j = 1,\ldots,n$. Підставивши ці значення в матрицю з (2.127), одержимо

$$\mathbf{A}_{d,W} = \lim_{\lambda\to 0}\begin{bmatrix} \frac{c^{(11)}_1\lambda^{m-1}+\ldots+c^{(11)}_r\lambda^{m-r}}{\lambda^m+d_1\lambda^{m-1}+\ldots+d_r\lambda^{m-r}} & \ldots & \frac{c^{(1n)}_1\lambda^{m-1}+\ldots+c^{(1n)}_r\lambda^{m-r}}{\lambda^m+d_1\lambda^{m-1}+\ldots+d_r\lambda^{m-r}}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{c^{(m1)}_1\lambda^{m-1}+\ldots+c^{(m1)}_r\lambda^{m-r}}{\lambda^m+d_1\lambda^{m-1}+\ldots+d_r\lambda^{m-r}} & \ldots & \frac{c^{(mn)}_1\lambda^{m-1}+\ldots+c^{(mn)}_r\lambda^{m-r}}{\lambda^m+d_1\lambda^{m-1}+\ldots+d_r\lambda^{m-r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c^{(11)}_r}{d_r} & \ldots & \frac{c^{(1n)}_r}{d_r}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{c^{(m1)}_r}{d_r} & \ldots & \frac{c^{(mn)}_r}{d_r} \end{bmatrix}.$$

Тут $c_r^{(ij)} = \sum\limits_{\beta \in J_{r,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k+1} \right)_{.\,i} \left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}$ nf $d_r = \sum\limits_{\beta \in J_{r,\,m}} \left| \left(\mathbf{A}^{k+1} \right)_{\beta}^{\beta} \right|$. Таким чином, ми одержали визначникове зображення (2.126) W-зваженої узагальненої оберненої матриці $\mathbf{A}_{d,W}$. $\square$

Наступна теорема може бути доведена аналогічно.

Теорема 2.19. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *і матриця* $\mathbf{WA} = \mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є ермітовою з індексом* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$ *та* $\mathrm{rank}(\mathbf{WA})^{k+1} = \mathrm{rank}(\mathbf{WA})^{k} = r$, *тоді W-зваженої узагальненої оберненої матриці* $\mathbf{A}_{d,W} = \left(a_{ij}^{d,W} \right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *має визначникове зображення:*

$$a_{ij}^{d,W} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{WA})_{j\,.}^{k+2} (\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)}) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}} \left| (\mathbf{WA})^{k+2} \right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{2.128}$$

де $\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)}$ *– i-й рядок матриці* $\bar{\mathbf{U}}^{k} = \mathbf{A}(\mathbf{WA})^{k}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, m$.

2.4.5. Визначникові зображення комплексної W-зваженої матриці Дразіна.

Для W-зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна $\mathbf{A}^{d,W}$ довільної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ по відношенню до ваги $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ над полем комплексних чисел маємо граничні зображення (2.119) та (2.120).

Очевидним є в цьому випадку виконання Лем 2.30 та 2.31 про ранги матриць. В Лемах 2.122 та 2.33 про аналоги характеристичного полінома, покладемо, відповідно,

$$c_m^{(ij)} = \left| \left(\mathbf{V}^{k+2} \right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)} \right) \right|, \; c_s^{(ij)} = \sum_{\beta \in J_{s,\,m}\{i\}} \left| \left(\mathbf{V}^{k+2} \right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)} \right) \right|_{\beta}^{\beta},$$

$$r_n^{(ij)} = \left| (\mathbf{U}^{k+2})_{j\,.} (\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)}) \right|, \; r_l^{(ij)} = \sum_{\alpha \in I_{l,n}\{j\}} \left| (\mathbf{U}^{k+2})_{j\,.} (\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)}) \right|_{\alpha}^{\alpha}$$

для всіх $s = 1, \ldots, m-1$, $l = 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, n$ та $j = 1, \ldots, m$ і одержимо наступну лему.

Лема 2.34. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *і* $\lambda \in \mathbb{R}$, *тоді*

$$\det \left(\left(\lambda \mathbf{I}_m + \mathbf{V}^{k+2} \right)_{.\,i} \left(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)} \right) \right) = c_1^{(ij)} \lambda^{m-1} + c_2^{(ij)} \lambda^{m-2} + \cdots + c_m^{(ij)},$$

$$\det \left((\lambda \mathbf{I} + \mathbf{U}^{k+2})_{j\,.} (\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)}) \right) = r_1^{(ij)} \lambda^{n-1} + r_2^{(ij)} \lambda^{n-2} + \cdots + r_n^{(ij)}.$$

Опираючись на Лему 2.34 одержимо теорему про визначникові зображення W-зваженої оберненої матриці Дразіна над полем комплексних чисел.

Теорема 2.20. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, *тоді її W-зважена обернена матриця Дразіна* $\mathbf{A}^{d,W} = \left(a_{ij}^{d,W}\right) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *має наступні визначникові зображення*

$$a_{ij}^{d,W} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in J_{r,n}\{i\}} \left|(\mathbf{AW})_{.i}^{k+2}(\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)})\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}} \left|(\mathbf{AW})^{k+2}\right|_{\beta}^{\beta}} = \tag{2.129}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \left|(\mathbf{WA})_{j.}^{k+2}(\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{2.130}$$

де $\bar{\mathbf{v}}_{.j}^{(k)}$ *– j-й стовпець матриці* $\bar{\mathbf{V}}^k = (\mathbf{AW})^k\mathbf{A}$ *для всіх* $j = 1, \ldots, m$ *та* $\bar{\mathbf{u}}_{i.}^{(k)}$ *– i-й рядок матриці* $\bar{\mathbf{U}}^k = \mathbf{A}(\mathbf{WA})^k$ *для всіх* $i = 1, \ldots, m$.

Новизна і актуальність визначникових зображень комплексної W-зваженої матриці Дразіна (2.129-2.130) підтверджується публікацією [110].

2.4.6. Приклад визначникового зображення W-зваженої матриці Дразіна.

Розглянемо матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} & 0 \\ \mathbf{k} & 1 & \mathbf{i} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathbf{k} & -\mathbf{j} \end{bmatrix}, \ \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{j} & \mathbf{k} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\mathbf{V} = \mathbf{AW} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & -\mathbf{j} & 0 & \mathbf{i} \\ -1-\mathbf{j} & \mathbf{i}+\mathbf{k} & \mathbf{j} & 1+\mathbf{j} \\ \mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{i}+\mathbf{k} & 1-\mathbf{j} & \mathbf{i} & \mathbf{i}-\mathbf{k} \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \mathbf{WA} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

і $\operatorname{rank}\mathbf{W} = 3$, $\operatorname{rank}\mathbf{V} = 3$, $\operatorname{rank}\mathbf{V}^3 = \operatorname{rank}\mathbf{V}^2 = 2$, $\operatorname{rank}\mathbf{U}^2 = \operatorname{rank}\mathbf{U} = 2$. Отже, $\operatorname{Ind}\mathbf{V} = 2$, $\operatorname{Ind}\mathbf{U} = 1$, and $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{AW}), \operatorname{Ind}(\mathbf{WA})\} = 2$.

Очевидно, що знаходження визначникового зображення W-зваженої матриці Дразіна $\mathbf{A}^{d,W}$ через матрицю $\mathbf{U}$ та за формулою (2.113) є більш зручним. Маємо

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{i}+\mathbf{k} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{U}^5 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 2+3\mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left(\mathbf{U}^5\right)^* \mathbf{U}^5 = \begin{bmatrix} 1 & -2\mathbf{i}-3\mathbf{k} & 0 \\ 2\mathbf{i}+3\mathbf{k} & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{U}} = (\mathbf{U}^5)^*\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1+\mathbf{j} & 0 \\ -2+3\mathbf{j} & -\mathbf{i}+6\mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{W}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & \mathbf{j} & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} & 1 \\ -\mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}^*\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{i} & -\mathbf{j} & \mathbf{j} \\ -\mathbf{i} & 2 & 0 & -2\mathbf{k} \\ \mathbf{j} & 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{j} & 2\mathbf{k} & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \hat{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^*\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & 1-2\mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{i}+\mathbf{k} & 0 \\ \mathbf{i} & 1+\mathbf{j} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank}\mathbf{W} = 3, \quad \sum_{\beta\in J_{3,\,4}} |\mathbf{W}^*\mathbf{W}|_\beta^\beta = 2, \quad \sum_{\beta\in J_{2,\,3}} \left|\left(\mathbf{U}^5\right)^* \mathbf{U}^5\right|_\beta^\beta = 1.$$

Оскільки, за формулою (2.118)

$$\omega_{11} := \sum_{\beta\in J_{2,\,3}\{1\}} \operatorname{cdet}_1 \left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^* \mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.1} (\hat{\mathbf{u}}_{.})\right)_\beta^\beta =$$

$$\operatorname{cdet}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{i} & -2\mathbf{i}-3\mathbf{k} \\ -2+3\mathbf{j} & 14 \end{bmatrix} + \operatorname{cdet}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{i}.$$

Продовжуючи так само і далі, маємо

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & -2-\mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \ \widetilde{\Omega} = \mathbf{W}^*\mathbf{U}^2\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{j} & -\mathbf{i}-\mathbf{k} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Звідси, за формулою (2.113)

$$a_{11}^{d,\mathbf{W}} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{3,4}\{1\}} \mathrm{cdet}_1\left(\left(\mathbf{W}^*\mathbf{W}\right)_{.1}\left(\widetilde{\omega}_{.1}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{3,4}} \left|\mathbf{W}^*\mathbf{W}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta\in J_{2,3}} \left|\left(\mathbf{U}^5\right)^*\mathbf{U}^5\right|_\beta^\beta} = \mathrm{cdet}_1\begin{bmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{i} & -\mathbf{j} \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+\mathrm{cdet}_1\begin{bmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 0 & 2 & -2\mathbf{k} \\ 0 & 2\mathbf{k} & 2 \end{bmatrix} + \mathrm{cdet}_1\begin{bmatrix} \mathbf{j} & -\mathbf{j} & \mathbf{j} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 0,$$

Продовжуючи аналогічно, кінцево одержимо

$$\mathbf{A}_{d,W} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5\mathbf{i}-2\mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.131}$$

Використовуючи визначникове зображення оберненої матриці Мура-Пенроуза (2.7), одержимо

$$\left(\mathbf{U}^5\right)^\dagger = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -3+2\mathbf{j} & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ (\mathbf{AW})^d = \mathbf{U}^d = \mathbf{U}^2\left(\mathbf{U}^5\right)^\dagger\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -5 & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді, можемо перевірити (2.131) за властивістю (2.94). Дійсно,

$$\mathbf{W}\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{j} & \mathbf{k} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5\mathbf{i}-2\mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -5 & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{AW})^d.$$

2.5. Висновки до розділу

У цьому розділі вивчаються узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів. У рамках теорії некомутативних рядково-стовпцевих визначників, раніше побудованої автором, отримані визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених.

При цьому означення та граничні зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза вводяться на основі сингулярного розкладу матриці. Для побудови визначникового зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза розроблений оригінальний метод, який базується на її граничному зображенні, а також лемах про стовпцеві та рядкові аналоги характеристичних многочленів. Застосовуючи цей метод у випадку комплексних матриць, одержано нові, більш застосовні, визначникові зображення узагальнених обернених матриць.

Для означення та граничного зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза доведена теорема про зважений сингулярний розклад кватерніонової матриці. Отримані визначникові зображення кватерніонової зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза для довільних кватерніонових матриць та у окремому ермітовому випадку.

Одержано визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Дразіна та її зваженої, виходячи з їх характеристичних представлень та граничних зображень у особливих ермітових випадках. Результати цього розділу опубліковані у роботах [101, 103, 108–110, 114–116, 133, 136, 138, 304, 306, 308, 311]

РОЗДІЛ 3

Кватерніонова серцевинна обернена та її узагальнення

На основі досліджень основних узагальнених обернених матриць, а саме матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених, недавно були запроваджені поняття та започатковано вивчення нових узагальнених обернених матриць, а саме серцевинної матриці та її узагальнень. Введенню понять та дослідженню властивостей, зокрема визначниковому зображенню, кватерніонової серцевинної оберненої матриці та її узагальнень присвячений цей розділ.

3.1. Кватерніонова серцевинна обернена матриця та її визначникові зображення.

3.1.1. Серцевинна обернена матриця над тілом кватерніонів. Враховуючи особливості кватерніонових векторних просторів, Означення 1.23-1.24 можуть бути узагальнені для матриць над тілом $\mathbb{H}$ наступним чином.

Означення 3.1. *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається* ***правою серцевинною оберненою*** *матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$*, якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{P}_A, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}).$$

Коли така матриця $\mathbf{X}$ *існує, вона позначається* $\mathbf{A}^{\oplus}$*.*

Означення 3.2. *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається* ***лівою серцевинною оберненою*** *матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$*, якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XA} = \mathbf{Q}_A, \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A}). \tag{3.1}$$

Коли така матриця $\mathbf{X}$ *існує, вона позначається* $\mathbf{A}_{\oplus}$*.*

Подібно як і для комплексних матриць [7], введемо наступні множини кватерніонових матриць

$$\mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}} =\{\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n} \ : \ \operatorname{rank} \mathbf{A}^2 = \operatorname{rank} \mathbf{A}\},$$
$$\mathbb{H}_n^{\mathrm{EP}} =\{\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n} \ : \ \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\} = \{\mathcal{C}_r(\mathbf{A}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^*)\}.$$

Матриці з множини $\mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$ називаються груповими матрицями або серцевинними матрицями. Абревіатура EP для матриць з множини $\mathbb{H}_n^{\mathrm{EP}}$ означає еківалентність проекторів таких матриць. Крім того, якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\mathrm{EP}}$, то $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\#$. З означень групової оберненої матриці та серцевинних обернених, очевидно випливає, що серцевинні обернені для матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ існують тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$ або $\operatorname{Ind}\mathbf{A} \leq 1$. Більше того, якщо матриця $\mathbf{A}$ є оборотною, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 0$, тоді її серцевинні обернені є звичайними оберненими.

Наступні представлення серцевинних обернених узагальнюються для кватерніонових матриць (для комплексної серцевинної оберненої отримані у [7]).

Лема 3.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$. *Тоді*

$$\mathbf{A}^{\oplus} =\mathbf{A}^\#\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger, \tag{3.2}$$
$$\mathbf{A}_{\oplus} =\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\# \tag{3.3}$$

Доведення. Доведемо зображення (3.3).

Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$, тоді $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$ і $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\#$. Нехай виконується подання (3.3). Покажемо, що $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\#$ задовольняє умови (3.1). Дійсно, $\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\#\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ означає виконання умови (i), а також те, що $\mathcal{R}_l(\mathbf{X}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A})$

Зображення (3.2) можна довести аналогічно попередньому, а також комплексному випадку [7]. □

Безпосередньо з означень узагальнених обернених та зображень (3.2)-(3.3) випливає наступне твердження.

Лема 3.2. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$. *Тоді*

(i) $\mathbf{A}^{\oplus}, \mathbf{A}_{\oplus} \in \mathbb{H}_n^{\mathrm{EP}}$,

(ii) $(\mathbf{A}^{\oplus})^\dagger = \mathbf{A}\mathbf{P}_A,\ (\mathbf{A}_{\oplus})^\dagger = \mathbf{Q}_A\mathbf{A}$,

(iii) $(\mathbf{A}^{\oplus})^{\#} = \mathbf{A}\mathbf{P}_A,\ (\mathbf{A}_{\oplus})^{\#} = \mathbf{Q}_A\mathbf{A}$,

(iv) $\mathbf{A}^{\oplus},\ \mathbf{A}_{\oplus} \in \mathbf{A}\{1,2\}$

(v) $(\mathbf{A}^{\oplus})^2\,\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\#},\ \mathbf{A}\,(\mathbf{A}_{\oplus})^2 = \mathbf{A}^{\#}$,

(vi) $(\mathbf{A}^{\oplus})^m = (\mathbf{A}^m)^{\oplus},\ (\mathbf{A}_{\oplus})^m = (\mathbf{A}^m)_{\oplus}$,

(vii) $(\mathbf{A}^{\oplus})\,\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\#}\mathbf{A},\ \mathbf{A}\,(\mathbf{A}_{\oplus}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\#}$.

3.1.2. Визначникові зображення кватерніонової серцевинної оберненої матриці. У цьому пункті дамо визначникові зображення правої та лівої серцевинних обернених.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^2 = \operatorname{rank}\mathbf{A} = s$. *Тоді визначникове зображення правої серцевинної оберненої* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *має наступний вираз*

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{u}}_{i.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}^3\,(\mathbf{A}^3)^*|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.4}$$

де $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ *є* i*-им рядком матриці* $\widetilde{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$. *Тут матриця* $\mathbf{U} = (u_{if}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є такою, що*

$$u_{if} = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^3\left(\mathbf{A}^3\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\check{\mathbf{A}} := \mathbf{A}(\mathbf{A}^3)^*$.

Доведення. Враховуючи вираз (3.2), для правої серцевинної $\mathbf{A}^{\oplus}$ маємо

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{\#} p_{lj}, \tag{3.5}$$

де p_{lj} – (lj)-й елемент проективної матриці $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{P}_A = (p_{lj})$. Підставивши визначникові зображення групової оберненої (2.87) та проективної матриці (2.16) у рівність (3.11), одержимо

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^3\left(\mathbf{A}^3\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right) a_{fl}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}^3\,(\mathbf{A}^3)^*|_{\alpha}^{\alpha}} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{l.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$=\frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{f\}}\operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^3\left(\mathbf{A}^3\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{a}}_{f.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}\left|(\mathbf{A}^3\,(\mathbf{A}^3)^*)_{\alpha}^{\alpha}\right|\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}|\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i\,.}$ є i-им рядком $\check{\mathbf{A}}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^3)^*$, а $\tilde{\mathbf{a}}_{f.}$ – f-й рядок матриці $\tilde{\mathbf{A}}:=\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$.

Позначимо

$$u_{if}:=\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{f\}}\operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^3\left(\mathbf{A}^3\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha},\qquad i,f=1,\ldots,n.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{U}=(u_{if})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ та позначимо $\tilde{\mathbf{U}}:=\mathbf{U}\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$. З того, що рядкові визначники володіють властивістю лівої дистрибутивності, Лема 1.5, випливає

$$\sum_{f}u_{if}\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{a}}_{f.})\right)_{\alpha}^{\alpha}=\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{u}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\tilde{\mathbf{u}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\tilde{\mathbf{U}}$. Звідси отримуємо (3.4). □

Враховуючи умову (3.3), наступну теорему про визначникове зображення лівої серцевинної оберненої можна довести аналогічно.

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^2=\operatorname{rank}\mathbf{A}=s$. *Тоді ліва серцевинна обернена матриця* $\mathbf{A}_{\oplus}=\left(a_{ij}^{\oplus,l}\right)$ *покомпонентно виражається як*

$$a_{ij}^{\oplus,l}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\tilde{\mathbf{v}}_{.j}))_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}}|(\mathbf{A}^3)^*\,\mathbf{A}^3|_{\alpha}^{\alpha}}.\tag{3.6}$$

Тут $\tilde{\mathbf{v}}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\tilde{\mathbf{V}}:=\mathbf{A}^*\mathbf{A}^2\mathbf{V}$, *а матриця* $\mathbf{V}=(v_{fj})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ *є такою, що*

$$v_{fj}=\sum_{\beta\in J_{s,n}\{f\}}\operatorname{cdet}_f\left(\left(\left(\mathbf{A}^3\right)^*\mathbf{A}^3\right)_{.f}(\hat{\mathbf{a}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\widehat{\mathbf{a}}_{.j}$ *є* j*-м стовпцем матриці* $\widehat{\mathbf{A}}:=(\mathbf{A}^3)^*\mathbf{A}$.

Зауваження 3.1. *У Теоремах 3.3 та 3.4, ми припускаємо, що* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$, *але* $\mathbf{A}\notin\mathbb{H}_n^{\mathrm{EP}}$. *Бо якщо* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}_n^{\mathrm{CM}}$ *і* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}_n^{\mathrm{EP}}$ *(зокрема,* $\mathbf{A}$ *є ермітовою), тоді з Леми 3.1 і Означень Мура-Пенроуза та групової оберненої випливає, що* $\mathbf{A}^{\oplus}=\mathbf{A}_{\oplus}=\mathbf{A}^{\#}=\mathbf{A}^{\dagger}$.

3.1.3. Визначникові зображення серцевинної оберненої матриці для комплексних матриць.

Теорема 3.3. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{CM}}$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^2 = \operatorname{rank}\mathbf{A} = s$. *Тоді її права серцевинна обернена матриця* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *має наступні визначникові зображення*

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{u}_{i.}^{(1)})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}} = \tag{3.7}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}\left(\mathbf{u}_{.j}^{(2)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.8}$$

де

$$\mathbf{u}_{i.}^{(1)} = \left[\sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}(\tilde{\mathbf{a}}_{.f})\right|_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad f = 1,\ldots,n, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{u}_{.j}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{a}}_{l.})\right|_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1,\ldots,n, \tag{3.10}$$

є відповідно вектор-рядком та вектор-стовпцем. Тут $\tilde{\mathbf{a}}_{.f}$ *і* $\tilde{\mathbf{a}}_{l.}$ *є* f*-им стовпцем та* l*-им рядком матриці* $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$.

Доведення. З умови (3.2), випливає

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{f=1}^{n} a_{il}^{\#} a_{lf} a_{fj}^{\dagger}. \tag{3.11}$$

Поклавши визначникові зображення групової оберненої (2.90) та матриці Мура-Пенроуза (2.30) у (3.11), одержимо

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{f=1}^{n} \sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}(\mathbf{a}_{.f})\right|_{\beta}^{\beta} a_{fl}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_{\beta}^{\beta}} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{a}_{l.}^*)\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{.j}(\mathbf{e}_{.f})\right|_{\beta}^{\beta} \widetilde{a}_{fl} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{l.})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{e}_{l.}$ та $\mathbf{e}_{.l}$ є одиничними вектор-рядком та вектор-стовпцем the unit column and row vectors, відповідно, такі що всіх їх компоненти є 0, крім l-ої, котра є 1; $\widetilde{a}_{lf}$ є (lf)-им елементом матриці $\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$.

Нехай

$$u_{il}^{(1)} := \sum_{f=1}^{n} \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{.\,i}(\mathbf{e}_{.f})\right|_{\beta}^{\beta} \widetilde{a}_{fl} = \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{.\,i}(\widetilde{\mathbf{a}}_{.l})\right|_{\beta}^{\beta},$$

$$i, l = 1, \ldots, n.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{U}_1 = (u_{il}^{(1)}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. З цього випливає

$$\sum_{l} u_{il}^{(1)} \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{l.})\right|_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{u}_{i.}^{(1)})\right|_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\mathbf{u}_{i.}^{(1)}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{U}_1$. Таким чином, маємо (3.7).

Якщо спочатку розглянемо

$$u_{if}^{(2)} := \sum_{l} \widetilde{a}_{fl} \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{l.})\right|_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\widetilde{\mathbf{a}}_{f.})\right|_{\alpha}^{\alpha},$$

$$f, j = 1, \ldots, n,$$

і побудуємо матрицю $\mathbf{U}_2 = (u_{if}^{(2)}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, то

$$\sum_{f=1}^{n} \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{.\,i}(\mathbf{e}_{.f})\right|_{\beta}^{\beta} u_{if}^{(2)} = \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{.\,i}\left(\mathbf{u}_{.f}^{(2)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}$$

і з цього випливає (3.8).

□

З умови (3.3) теорему про визначникове зображення лівої серцевинної оберненої можна довести аналогічно.

Теорема 3.4. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{CM}}$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^2 = \operatorname{rank}\mathbf{A} = s$. *Тоді для її лівої серцевинної оберненої* $(\mathbf{A}_{\oplus}) = \left(a_{ij}^{\oplus,l}\right)$ *маємо*

$$a_{ij}^{\oplus,l} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{v}_{i.}^{(1)})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_{\alpha}^{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де

$$\mathbf{v}_{i.}^{(1)} = \left[\sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\,(\bar{\mathbf{a}}_{.f})\right|_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad f = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{v}_{.j}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}^2)_{j.}(\bar{\mathbf{a}}_{l.})\right|_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Тут $\bar{\mathbf{a}}_{.f}$ *і* $\bar{\mathbf{a}}_{l.}$ *є* f*-м стовпцем та* l*-м рядком матриці* $\bar{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^*\mathbf{A}^2$.

3.2. Кватерніонові *EP*-серцевинні обернені матриці та їх визначникові зображення.

3.2.1. *EP*-серцевинні обернені матриці над тілом кватерніонів. Над тілом кватерніонів введемо дві *EP*-серцевинні обернені матриці з врахуванням особливостей кватерніонових матриць.

Означення 3.3. *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається* ***правою EP-серцевинною оберненою*** *до матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{A}, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{X}^*) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^d).$$

Вона позначається як $\mathbf{A}^{\oplus}$.

Означення 3.4. *Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається* ***лівою EP-серцевинною оберненою*** *до матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{A}, \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{X}^*) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^d).$$

Вона позначається як $\mathbf{A}_{\oplus}$.

Зауваження 3.2. *Оскільки,* $\mathcal{C}_r((\mathbf{A}^*)^d) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^d)$*, то ліва EP-серцевинна обернена* $\mathbf{A}_{\oplus}$ *є аналогічною до EP-∗серцевинної оберненої, введеної в [195], та дуальної EP-серцевинної оберненої, яка розглядалася в [295].*

Мають місце наступні представлення кватерніонових *EP*-серцевинних обернених, доведення яких аналогічне доведенню отриманому в [195] для комплексних матриць.

Лема 3.3. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *і невід'ємне ціле* m *таке, що* $\operatorname{Ind}(\mathbf{A}) = k \leq m$, *тоді наступні твердження взаємно еквівалентні:*

(i) *права EP-серцевинна обернена* $\mathbf{A}$ *співпадає з* $\mathbf{X}$*;*

(ii) $\mathbf{X}\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k,\ \mathbf{A}\mathbf{X}^2 = \mathbf{X},\ (\mathbf{A}\mathbf{X})^* = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^k)$*;*

(iii) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\oplus} = \mathbf{A}^d\mathbf{A}^m\left(\mathbf{A}^m\right)^{\dagger} = \mathbf{A}^k\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger}$.

Лема 3.4. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *і невід'ємне ціле* m *таке, що* $\operatorname{Ind}(\mathbf{A}) = k \leq m$, *тоді наступні твердження взаємно еквівалентні:*

(i) *ліва EP-серцевинна обернена* $\mathbf{A}$ *співпадає з* $\mathbf{X}$*;*

(ii) $\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{X} = \mathbf{A}^k,\ \mathbf{X}^2\mathbf{A} = \mathbf{X},\ (\mathbf{X}\mathbf{A})^* = \mathbf{X}\mathbf{A}, \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^k)$*;*

(iii) $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{\oplus} = \left(\mathbf{A}^m\right)^{\dagger}\mathbf{A}^m\mathbf{A}^d = \left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger}\mathbf{A}^k$.

3.2.2. Визначникові зображення кватерніонових *EP*-серцевинних обернених матриць.

Теорема 3.5. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^k = s$*, та існують права* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *та ліва* $\mathbf{A}_{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,l}\right)$ EP-*серцевинні обернені матриці. Тоді вони мають наступні визначникові зображення, відповідно,*

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^*\right)_{j.}(\hat{\mathbf{a}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.12}$$

$$a_{ij}^{\oplus,l} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^*\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\check{\mathbf{a}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^*\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{3.13}$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{i.}$ – i*-й рядок матриці* $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^k(\mathbf{A}^{k+1})^*$ *та* $\check{\mathbf{a}}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{k+1})^*\mathbf{A}^k$.

Доведення. Нехай $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger} = \left(a_{ij}^{(k+1,\dagger)}\right)$ та $\mathbf{A}^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$. За Лемою 3.3 для правої *EP*-серцевинної матриці $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ маємо

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)}a_{tj}^{(k+1,\dagger)}.$$

Застосувавши визначникове зображення (2.8) для $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger}$, маємо

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^{k+1} (\mathbf{A}^{k+1})^* \right)_{j.} (\mathbf{a}_{t.}^{(k+1,*)}) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} \left| \mathbf{A}^{k+1} \left(\mathbf{A}^{k+1} \right)^* \right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{a}_{t.}^{(k+1,*)}$ є t-им рядком матриці $(\mathbf{A}^{k+1})^*$. Оскільки $\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \mathbf{a}_{t.}^{(k+1,*)} = \hat{\mathbf{a}}_{i\,.}$, то з Леми 1.5 слідує (3.12).

Визначникове зображення (3.13) отримується аналогічно, застосувавши (2.7) для визначникового зображення матриці Мура-Пенроуза $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger}$ в умовах Леми 3.4. $\square$

З представлень отриманих у Лемах 3.3 та 3.4, можна одержати вирази визначникових зображень правої $\mathbf{A}^{\textcircled{\#}}$ та лівої $\mathbf{A}_{\textcircled{\#}}$ серцевинних обернених матриць, які є більш простішими, аніж (3.4)-(3.6).

Наслідок 3.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$ *з* $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = 1$, *та існують її права* $\mathbf{A}^{\textcircled{\#}} = \left(a_{ij}^{\textcircled{\#},r}\right)$ *та ліва* $\mathbf{A}_{\textcircled{\#}} = \left(a_{ij}^{\textcircled{\#},l}\right)$ *серцевинні обернені матриці. Тоді вони мають наступні визначникові зображення*

$$a_{ij}^{\textcircled{\#},r} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2 \left(\mathbf{A}^2 \right)^* \right)_{j.} (\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} \left| \mathbf{A}^2 \left(\mathbf{A}^2 \right)^* \right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.14}$$

$$a_{ij}^{\textcircled{\#},l} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\left(\mathbf{A}^2 \right)^* \mathbf{A}^2 \right)_{.i} (\check{\mathbf{a}}_{.j}) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} \left| \left(\mathbf{A}^2 \right)^* \mathbf{A}^2 \right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{3.15}$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *–* i*-й рядок* $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2)^*$ *та* $\check{\mathbf{a}}_{.j}$ *–* j*-ий стовпець матриці* $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^2)^*\mathbf{A}$.

Доведення. Вирази (3.14)-(3.15) безпосередньо випливають із зображень (3.12)-(3.13), поклавши $k = 1$. $\square$

3.2.3. Визначникове зображення серцевинної *EP*-оберненої матриці для комплексних матриць.

Теорема 3.6. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *з* $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = k$ *і* $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^k = s$, *та існують* $\mathbf{A}^{\oplus}$ *і* $\mathbf{A}_{\oplus}$. *Тоді* EP*-серцевинні обернені* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *та* $\mathbf{A}_{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,l}\right)$ *мають наступні* *визначникові зображення,*

$$a_{ij}^{\textcircled{\dagger},r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\right)_{j.}(\hat{\mathbf{a}}_{i.})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.16}$$

$$a_{ij}^{\textcircled{\dagger},l} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\check{\mathbf{a}}_{.j})\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{3.17}$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{i.}$ – i*-й рядок* $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^k(\mathbf{A}^{k+1})^*$ *та* $\check{\mathbf{a}}_{.j}$ – j*-ий стовпець матриці* $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{k+1})^*\mathbf{A}^k$.

Доведення. Нехай $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger} = \left(a_{ij}^{(k+1,\dagger)}\right)$ та $\mathbf{A}^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$. З Леми 3.3 для правої EP-серцевинної матриці маємо

$$a_{ij}^{\textcircled{\dagger},r} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} a_{tj}^{(k+1,\dagger)}.$$

Застосувавши вираз (2.30) для визначникового зображення $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger}$, одержимо

$$a_{ij}^{\textcircled{\dagger},r} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}(\mathbf{A}^{k+1})^{*}\right)_{j.}(\mathbf{a}_{t.}^{(k+1,*)})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{a}_{t.}^{(k+1,*)}$ – t-й рядок $(\mathbf{A}^{k+1})^*$. З того, що $\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)}\mathbf{a}_{t.}^{(k+1,*)} = \hat{\mathbf{a}}_{i.}$, слідує (3.16).

Визначникове зображення (3.17) отримується аналогічно, поклавши (2.29) для визначникового зображення $\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger}$ в умові Леми 3.4. □

Очевидно, що одержаний вираз для визначникового зображення правої $\mathbf{A}^{\oplus}$ серцевинної оберненої матриці (3.16) є більш простішими, аніж (1.36).

Наслідок 3.2. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_s^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$, *та існують* $\mathbf{A}^{\oplus}$ *і* $\mathbf{A}_{\oplus}$. *Тоді* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *і* $\mathbf{A}_{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,l}\right)$ *можуть бути подані як*

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^{2}\left(\mathbf{A}^{2}\right)^{*}\right)_{j.}(\hat{\mathbf{a}}_{i.})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|\mathbf{A}^{2}\left(\mathbf{A}^{2}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \quad a_{ij}^{\oplus,l} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|\left(\left(\mathbf{A}^{2}\right)^{*}\mathbf{A}^{2}\right)_{.i}(\check{\mathbf{a}}_{.j})\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2}\right)^{*}\mathbf{A}^{2}\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{i.}$ – i*-й рядок* $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2)^*$ *та* $\check{\mathbf{a}}_{.j}$ – j*-ий стовпець матриці* $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^2)^*\mathbf{A}$.

3.3. Кватерніонові *MPD* та *DMP*-обернені матриці та їх визначникові зображення.

3.3.1. *DMP* і *MPD*-обернені матриці над тілом кватерніонів.

Означення 1.27 та Лема 1.27 узагальнюються для довільної кватерніонової матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

Означення 3.5. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$*. Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається **DMP-оберненою** до матриці* $\mathbf{A}$ *якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{XA} = \mathbf{A}^d\mathbf{A},\ \mathbf{A}^k\mathbf{X} = \mathbf{A}^k\mathbf{A}^\dagger. \tag{3.18}$$

Вона позначається як $\mathbf{A}^{d,\dagger}$.

Лема 3.5. *Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$*, її DMP-обернена завжди існує та є единою, при цьому*

$$\mathbf{A}^{d,\dagger} = \mathbf{A}^d\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger. \tag{3.19}$$

Абревіатура "DMP"відповідає порядку використання оберненої матриці Дразіна (D) матриці Мура-Пенроуза (MP). Розглянемо також наступне означення.

Означення 3.6. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$*. Матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *називається **MPD-оберненою** матриці* $\mathbf{A}$ *якщо вона задовольняє умови*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AX} = \mathbf{A}\mathbf{A}^d,\ \mathbf{X}\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}^k.$$

Вона позначається як $\mathbf{A}^{\dagger,d}$.

Аналогічно Лемі 3.5 можна довести наступну.

Лема 3.6. *Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$*, її MPD-обернена завжди існує та є единою, при цьому*

$$\mathbf{A}^{\dagger,d} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^d. \tag{3.20}$$

3.3.2. Визначникові зображення кватерніонових *DMP* і *MPD* -обернених матриць.

Теорема 3.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^k = s_1$. *Тоді її DMP-обернена* $\mathbf{A}^{d,\dagger} = \left(a_{ij}^{d,\dagger}\right)$ *має наступні визначникові зображення.*

(i) *Коли* $\mathbf{A}$ *є довільною матрицею, то*

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{u}}_{i.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} \left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha}. \tag{3.21}$$

Тут $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$, *а матриця* $\mathbf{U} = (u_{if}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є така, що*

$$u_{if} = \sum_{\alpha\in I_{s_1,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i.})\right)_\alpha^\alpha,$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\check{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{2k+1})^*$.

(ii) *Коли* $\mathbf{A}$ *– ермітова, то*

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{v}_{i.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha} = \tag{3.22}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\mathbf{w}_{.j})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta}, \tag{3.23}$$

де

$$\mathbf{v}_{i.} = \left[\sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.f}^{(k+2)}\right)\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad f = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{w}_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{a}_{l.}^{(k+2)})\right)_\alpha^\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1,\ldots,n.$$

Доведення. Враховуючи представлення (1.39) для $\mathbf{A}^{d,\dagger}$, маємо

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \sum_{l=1}^n a_{il}^d p_{lj}^A. \tag{3.24}$$

(i) Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$ – довільна матриця. Використавши визначникові зображення (2.85) та (2.16) відповідно для $\mathbf{A}^d$ і $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ у рівності (3.24), одержимо

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}\{f\}} \mathrm{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_\alpha^\alpha a_{fl}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}}\left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha}\times$$

$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{l.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}|\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha} =$$

$$=\frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}\{f\}} \mathrm{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{a}}_{f.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}}\left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}|\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha},$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i\,.}$ – i-й рядок матриці $\check{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{2k+1})^*$ і $\widetilde{\mathbf{a}}_{f.}$ – f-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$. Позначимо

$$u_{if} := \sum_{\alpha\in I_{s_1,n}\{f\}} \mathrm{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_\alpha^\alpha$$

для всіх $i, f = 1, \ldots, n$, побудуємо матрицю $\mathbf{U} = (u_{if}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, і позначимо $\tilde{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$. З Леми 1.5 випливає, що

$$\sum_f u_{if} \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\widetilde{\mathbf{a}}_{f.})\right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\widetilde{\mathbf{u}}_{i.})\right)_\alpha^\alpha,$$

де $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{U}}$. Звідси, врешті, слідує (3.21).

(ii) Нехай тепер матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$ є ермітовою. Використавши (2.77) та (2.8) для визначникових зображень $\mathbf{A}^d$ та $\mathbf{A}^\dagger$ у рівності (3.24), одержимо

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{f=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(k)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}}|\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta} a_{lf} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{a}_{f.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}|\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha} =$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{f=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}(\mathbf{e}_{.l})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}}|\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta} a_{lf}^{(k+2)} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{e}_{f.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}|\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha}, \qquad (3.25)$$

де $\mathbf{e}_{.l}$ і $\mathbf{e}_{l.}$ є одиничним вектор-стовпцем та вектор-рядком, відповідно; $a_{lf}^{(k+2)}$ – (lf)-ий елемент матриці $\mathbf{A}^{k+2}$. За Лемою 1.6 знаходимо

$$v_{if} := \sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k+1} \right)_{.i} (\mathbf{e}_{.l}) \right)_{\beta}^{\beta} a_{lf}^{(k+2)} =$$

$$= \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k+1} \right)_{.i} \left(\mathbf{a}_{.f}^{(k+2)} \right) \right)_{\beta}^{\beta},$$

f-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{v}_{i.} = [v_{i1}, \dots, v_{in}]$. Застосування Леми 1.5 дає

$$\sum_{f=1}^{n} v_{if} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{e}_{f.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{v}_{i.}) \right)_{\alpha}^{\alpha}.$$

З цього випливає (3.22).

Якщо почнемо із застосування Леми 1.5 у рівності (3.25), то одержимо

$$w_{lj} := \sum_{f=1}^{n} a_{lf}^{(k+2)} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{e}_{f.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{a}_{l.}^{(k+2)}) \right)_{\alpha}^{\alpha},$$

l-у координату вектор-стовпця $\mathbf{w}_{.j} = [w_{1j}, \dots, w_{nj}]$. З наступного послідовного застосування Леми 1.6,

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k+1} \right)_{.i} (\mathbf{e}_{.l}) \right)_{\beta}^{\beta} w_{lj} = \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k+1} \right)_{.i} (\mathbf{w}_{.j}) \right)_{\beta}^{\beta},$$

випливає (3.23). □

Теорема 3.8. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$, $Ind\mathbf{A} = k$ *з* $\operatorname{rank} \mathbf{A}^k = s_1$. *Тоді її MPD-обернена матриця* $\mathbf{A}^{\dagger,d} = \left(a_{ij}^{\dagger,d} \right)$ *має наступні визначникові зображення.*

(i) Коли $\mathbf{A}$ *– довільна матриця, то*

$$a_{ij}^{\dagger,d} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i ((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\widetilde{\mathbf{u}}_{.j}))_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k+1} \right)^* \mathbf{A}^{2k+1} \right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\widetilde{\mathbf{u}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{U}} := \mathbf{A}^*\mathbf{A}^2\mathbf{U}$*, а матриця* $\mathbf{U} = (u_{fj}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є такою, що*

$$u_{fj} = \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{f\}} \mathrm{cdet}_f \left(\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1} \right)^* \mathbf{A}^{2k+1} \right)_{.f} (\hat{\mathbf{a}}_{.j}) \right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\widehat{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-*й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{2k+1})^*\mathbf{A}$.

(ii) Коли матриця $\mathbf{A}$ *є ермітовою, то*

$$a_{ij}^{\dagger,d} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^2)_{.i}(\mathbf{v}_{.j})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{j.}(\mathbf{w}_{i.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha},$$

де

$$\mathbf{v}_{.j} = \left[\sum_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{l.}^{(k+2)}\right)\right)_\alpha^\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{w}_{i.} = \left[\sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^2)_{.i}(\mathbf{a}_{.f}^{(k+2)})\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Доведення. Доведення аналогічне доведення Теореми 3.7. Беручи до уваги (3.20), маємо

$$a_{ij}^{\dagger,d} = \sum_{l=1}^{n} q_{il}^A a_{lj}^d, \tag{3.26}$$

(i) Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$ – довільна матриця, то у рівність (3.26) застосуємо визначникові зображення (2.14) і (2.84) для $\mathbf{Q}_A = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = (q_{ij}^A)$ і $\mathbf{A}^d$, відповідно.

(ii) Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$ – ермітова, то підставимо у рівність (3.26) визначникові зображення (2.7) для $\mathbf{A}^\dagger$, і (2.78) для $\mathbf{A}^d$. □

3.3.3. Визначникові зображення комплексних *DMP* і *MPD* -обернених матриць.

Теорема 3.9. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_s^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^k = s_1$. *Тоді її DMP-обернена* $\mathbf{A}^{d,\dagger} = \left(a_{ij}^{d,\dagger}\right)$ *має наступні визначникові зображення*

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{u}_{i.}^{(1)})\right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha} = \tag{3.27}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{u}_{.j}^{(2)}\right)\right|_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\beta^\beta}, \tag{3.28}$$

де

$$\mathbf{u}_{i.}^{(1)}=\left[\sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\widetilde{\mathbf{a}}_{.f})\right|_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times n},\quad f=1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{u}_{.j}^{(2)}=\left[\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j.}(\widetilde{\mathbf{a}}_{l.})|_{\alpha}^{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\quad l=1,\ldots,n.$$

Тут $\widetilde{\mathbf{a}}_{.f}$ *і* $\widetilde{\mathbf{a}}_{l.}$ *є* f*-им стовпцем і* l*-им рядком матриці* $\widetilde{\mathbf{A}}:=\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{A}^{*}$.

Доведення. Враховуючи (1.39) для $\mathbf{A}^{d,\dagger}$, маємо

$$a_{ij}^{d,\dagger}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{f=1}^{n}a_{il}^{d}a_{lf}a_{fj}^{\dagger}. \tag{3.29}$$

Підставивши (2.89) і (2.30) для визначникових зображень матриць $\mathbf{A}^{d}$ і $\mathbf{A}^{\dagger}$ у рівність (3.29), одержимо

$$a_{ij}^{d,\dagger}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{f=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(k)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}}\left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}a_{lf}\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j.}(\mathbf{a}_{f.}^{*})|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}|\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}|_{\alpha}^{\alpha}}=$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{f=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\mathbf{e}_{.l})\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}}\left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}\widetilde{a}_{lf}\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}((\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j.}(\mathbf{e}_{f.})|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}|\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.30}$$

де $\mathbf{e}_{.l}$ та $\mathbf{e}_{l.}$ – одиничні вектор-стовпець та вектор-рядок, $\widetilde{a}_{lf}$ – (lf)-ий елемент матриці $\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{A}^{*}$. Якщо покладемо

$$u_{if}^{(1)}:=\sum_{l=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\mathbf{e}_{.l})\right|_{\beta}^{\beta}\widetilde{a}_{lf}=\sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\widetilde{\mathbf{a}}_{.f})\right|_{\beta}^{\beta}$$

як f-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{u}_{i.}^{(1)}=\left[u_{i1}^{(1)},\ldots,u_{in}^{(1)}\right]$. Тоді з

$$\sum_{f=1}^{n}u_{if}^{(1)}\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j.}(\mathbf{e}_{f.})|_{\alpha}^{\alpha}=\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j.}(\mathbf{u}_{i.}^{(1)})\right|_{\alpha}^{\alpha},$$

слідує (3.27).

Якщо спочатку одержимо

$$u_{lj}^{(2)}:=\sum_{f=1}^{n}\widetilde{a}_{lf}\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j.}(\mathbf{e}_{f.})|_{\alpha}^{\alpha}=\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}|(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j.}(\widetilde{\mathbf{a}}_{l.})|_{\alpha}^{\alpha},$$

– l-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{u}_{.j}^{(2)} = \left[u_{1j}^{(2)}, \dots, u_{nj}^{(2)}\right]$. Тоді з умови

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}(\mathbf{e}_{.l})\right|_{\beta}^{\beta} u_{lj}^{(2)} = \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{u}_{.j}^{(2)}\right)\right|_{\beta}^{\beta},$$

випливає (3.28). □

Теорема 3.10. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_s^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^k = s_1$. *Тоді її MPD-обернена* $\mathbf{A}^{\dagger,d} = \left(a_{ij}^{\dagger,d}\right)$ *має визначникові зображення*

$$a_{ij}^{\dagger,d} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{v}_{.j}^{(1)})\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_{\alpha}^{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}^{(2)}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{s,\,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де

$$\mathbf{v}_{.j}^{(1)} = \left[\sum_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{j.}(\widehat{\mathbf{a}}_{l.})\right|_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{C}^{n\times 1}, \quad l = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{v}_{i.}^{(2)} = \left[\sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} |(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\widehat{\mathbf{a}}_{.f})|_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{C}^{1\times n}, \quad l = 1, \dots, n.$$

Тут $\widehat{\mathbf{a}}_{l.}$ *і* $\widehat{\mathbf{a}}_{.f}$ *є* l*-им рядком і* f*-им стовпцем матриці* $\widehat{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^*\mathbf{A}^{k+1}$.

Доведення. Доведення аналогічне доведенню Теореми 3.9. □

3.4. Кватерніонова *CMP*-обернена матриці та її визначникові зображення.

3.4.1. Визначникові зображення кватерніонової *CMP*-оберненої матриці.

Оскільки, довільна кватерніонова матриця має єдині узагальнені обернені Мура-Пенроуза та Дразіна, то сформульовані у пункті 1.2.2 положення про *CMP*-обернену матрицю узагальнюються на множину кватерніонових матриць. Маємо наступну лему про серцевинно-нільпотентний розклад матриці.

Лема 3.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$. *Тоді* $\mathbf{A}$ *задається як сума двох матриць,* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, *де* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$ *такі, що* *(i)* $\operatorname{rank}\mathbf{A}_1 = \operatorname{rank}\mathbf{A}_1^2$, *тобто* $\operatorname{Ind}\mathbf{A}_1 \leq 1$;

(ii) $\mathbf{A}_2$ *є нільпотентною;*

(iii) $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 0$.

Означення 3.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *має серцевинно-нільпотентний розклад.* ***CMP-оберненою*** *до матриці* $\mathbf{A}$ *називається матриця* $\mathbf{A}^{c,\dagger} := \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}_1\mathbf{A}^{\dagger}$.

Лема 3.8. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$. *Матриця* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{c,\dagger}$ *є единою матрицею, яка задовольняє наступній системі рівнянь:*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A}_1,\ \mathbf{AX} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}^{\dagger},\ \mathbf{XA} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}_1.$$

Більш того,

$$\mathbf{A}^{c,\dagger} = \mathbf{Q}_A\mathbf{A}^{d}\ \mathbf{P}_A. \tag{3.31}$$

Враховуючи представлення *CMP*-оберненої (3.31), має місце наступна теорема про визначникові зображення кватерніонової *CMP*-оберненої.

Теорема 3.11. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = m > 1$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^m = s_1$. *Тоді визначникові зображення її* CMP-*оберненої* $\mathbf{A}^{c,\dagger} = \left(a_{ij}^{c,\dagger}\right)$ *можна подати наступним чином.*

(i) Коли $\mathbf{A}$ *– довільна матриця.*

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{v}_{.j}^{(l)})\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\right)^2 \sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right|_{\beta}^{\beta}} = \tag{3.32}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{w}_{i.}^{(l)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2 \sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right|_{\beta}^{\beta}} \tag{3.33}$$

для всіх $l = 1, 2$, *де*

$$\mathbf{v}_{.j}^{(1)}=\left[\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}\,(\hat{\mathbf{u}}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\ t=1,\ldots,n, \tag{3.34}$$

$$\mathbf{w}_{i.}^{(1)}=\left[\sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\,(\hat{\mathbf{u}}_{.k})\right)_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times n},\ k=1,\ldots,n, \tag{3.35}$$

$$\mathbf{v}_{.j}^{(2)}=\left[\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}\,(\hat{\mathbf{g}}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\ t=1,\ldots,n, \tag{3.36}$$

$$\mathbf{w}_{i.}^{(2)}=\left[\sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\,(\hat{\mathbf{g}}_{.k})\right)_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times n},\ k=1,\ldots,n. \tag{3.37}$$

Тут $\widehat{\mathbf{u}}_{t.}$ – t-й рядок та $\widehat{\mathbf{u}}_{.k}$ – k-й стовпець матриці $\widehat{\mathbf{U}}:=\mathbf{U}\mathbf{A}^{m+1}\mathbf{A}^*$, а $\widehat{\mathbf{g}}_{t.}$ є t-им рядком та $\widehat{\mathbf{g}}_{.k}$ є k-им стовпцем матриці $\widehat{\mathbf{G}}:=\mathbf{A}^*\mathbf{A}^2\mathbf{G}$. Матриці $\mathbf{U}=(u_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ та $\mathbf{G}=(g_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ є такими, що

$$u_{ij}=\sum_{\alpha\in I_{s_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\right)_{j.}\,(\mathbf{a}_{i.}^{(1)})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

$$g_{ij}=\sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\mathbf{a}_{i.}^{(1)}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{A}_1:=\mathbf{A}^*\mathbf{A}^{m+1}(\mathbf{A}^{2m+1})^*$ і $\mathbf{a}_{.j}^{(2)}$ – j-ий стовпець матриці $\mathbf{A}_2:=(\mathbf{A}^{2m+1})^*\mathbf{A}^{m+1}\mathbf{A}^*$.

(ii) Коли матриця $\mathbf{A}$ – ермітова, то

$$a_{ij}^{c,\dagger}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^2)_{.i}(\mathbf{v}_{.j}^{(l)})\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}}|\mathbf{A}^2|_{\beta}^{\beta}\right)^2\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}}|\mathbf{A}^{m+1}|_{\beta}^{\beta}}= \tag{3.38}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.}\,(\mathbf{w}_{i.}^{(l)})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}|\mathbf{A}^2|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}}|\mathbf{A}^{m+1}|_{\beta}^{\beta}} \tag{3.39}$$

для всіх $l=1,2$, де

$$\mathbf{v}^{(1)}_{.j} = \left[\sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{j.} \left(\hat{\mathbf{u}}_{t.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \; t = 1, \ldots, n, \tag{3.40}$$

$$\mathbf{w}^{(1)}_{i.} = \left[\sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{.i} \left(\hat{\mathbf{u}}_{.k} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times n}, \; k = 1, \ldots, n, \tag{3.41}$$

$$\mathbf{v}^{(2)}_{.j} = \left[\sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{j.} \left(\hat{\mathbf{g}}_{t.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \; t = 1, \ldots, n, \tag{3.42}$$

$$\mathbf{w}^{(2)}_{i.} = \left[\sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{.i} \left(\hat{\mathbf{g}}_{.k} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times n}, \; k = 1, \ldots, n. \tag{3.43}$$

Тут $\widehat{\mathbf{u}}_{t.}$ *– t-й рядок і* $\widehat{\mathbf{u}}_{.k}$ *– k –* $\widehat{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}^2$*, а* $\hat{\mathbf{g}}_{t.}$ *– t-й рядок і* $\widehat{\mathbf{g}}_{.k}$ *– k-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{G}} := \mathbf{A}^2\mathbf{G}$*. Матриці* $\mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{H}^{n \times n}$ *та* $\mathbf{G} = (g_{ij}) \in \mathbb{H}^{n \times n}$ *є такими, що*

$$u_{ij} = \sum_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^{m+1} \right)_{j.} \left(\mathbf{a}^{(m+2)}_{i.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha},$$

$$g_{ij} = \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{m+1} \right)_{.i} \left(\mathbf{a}^{(m+2)}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta}.$$

Доведення. Розписавши покомпонентно рівність (3.31), маємо

$$a^{c,\dagger}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q^A_{il} a^d_{lk} p^A_{kj}, \tag{3.44}$$

де $\mathbf{Q}_A = (q^A_{il})$, $\mathbf{A}^d = (a^d_{il})$ та $\mathbf{P}_A = (p^A_{il})$.

(i) Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}_s$ – довільна матриця.

a) Застосувавши (2.85), (2.14) та (2.16) для визначникових зображень матриць $\mathbf{A}^d$, $\mathbf{Q}_A$ і $\mathbf{P}_A$, відповідно, одержимо

$$a^{c,\dagger}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^* \mathbf{A} \right)_{.i} \left(\dot{\mathbf{a}}_{.l} \right) \right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left| \mathbf{A}^* \mathbf{A} \right|^{\beta}_{\beta}} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{t=1}^{n} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}\{t\}} \mathrm{rdet}_t \left(\left(\mathbf{A}^{2m+1} \left(\mathbf{A}^{2m+1} \right)^* \right)_{.t} \left(\check{\mathbf{a}}_{l.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right) a^{(m)}_{tk}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} \left| \mathbf{A}^{2m+1} \left(\mathbf{A}^{2m+1} \right)^* \right|^{\alpha}_{\alpha}} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{k.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{AA}^*|_\alpha^\alpha} = \sum_l \sum_t \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\dot{\mathbf{a}}_{.l})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}\{t\}} \mathrm{rdet}_t\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\right)_{.t}(\check{\mathbf{a}}_{l.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{2m+1}(\mathbf{A}^{2m+1})^*|_\alpha^\alpha} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{a}}_{t.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{AA}^*|_\alpha^\alpha},$$

де $\check{\mathbf{a}}_{l.}$ – l-й рядок матриці $\check{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^m(\mathbf{A}^{2m+1})^*$, а $\tilde{\mathbf{a}}_{t.}$ – t-й рядок матриці $\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^{m+1}\mathbf{A}^*$. Позначимо $\mathbf{A}^*\mathbf{A}^{m+1}(\mathbf{A}^{2m+1})^* =: \mathbf{A}_1 = (a_{ij}^{(1)})$. Очевидно, що

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_l \sum_t \sum_k \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{e}_{.t})\right)_\beta^\beta a_{tk}^{(1)}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}\{l\}} \mathrm{rdet}_l\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\right)_{l.}(\mathbf{e}_{k.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{2m+1}(\mathbf{A}^{2m+1})^*|_\alpha^\alpha} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{a}}_{t.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{AA}^*|_\alpha^\alpha},$$

де $\mathbf{e}_{.t}$ та $\mathbf{e}_{k.}$ є одиничними вектор-стовпцем та вектор-рядком. З Леми 1.5 випливає, що

$$u_{tl} := \sum_k a_{tk}^{(1)} \sum_{\alpha\in I_{s_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_l\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\right)_{l.}(\mathbf{e}_{k.})\right)_\alpha^\alpha =$$
$$\sum_{\alpha\in I_{s_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_l\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\right)_{l.}(\mathbf{a}_{t.}^{(1)})\right)_\alpha^\alpha, \tag{3.45}$$

є t-ю координатою вектор-стовпця $\mathbf{u}_{.l} = [u_{1l}, \ldots, u_{nl}]$. Застосувавши далі Лему 1.6, одержимо

$$\sum_t \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{e}_{.t})\right)_\beta^\beta u_{tl} = \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{u}_{.l})\right)_\beta^\beta.$$

З цього випливає

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_l \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{u}_{.l})\right)_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{a}}_{l.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{2m+1}(\mathbf{A}^{2m+1})^*|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{AA}^*|_\alpha^\alpha}.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{U} = (u_{tl}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, де u_{tl} визначається виразом (3.45), і позначимо $\mathbf{U}\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\mathbf{A}^{m+1}\mathbf{A}^* =: \widehat{\mathbf{U}} = (\hat{u}_{tk})$. Тоді, враховуючи $|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta = |\mathbf{AA}^*|_\alpha^\alpha$, одержимо

$$a_{ij}^{c,\dagger}=\frac{\sum_t\sum_k \sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.t}\right)\right)_\beta^\beta \hat{u}_{tk} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}(\mathbf{e}_{k.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left(\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta\right)^2 \sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} \left|\mathbf{A}^{2m+1}\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha}.$$

Аналогічно, застосування Леми 1.5

$$v_{tj}^{(1)}:=\sum_k \hat{u}_{tk}\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{k.}\right)\right)_\alpha^\alpha=\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\hat{\mathbf{u}}_{t.}\right)\right)_\alpha^\alpha$$

дає t-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{v}_{.j}^{(1)}=\left[v_{1j}^{(1)},\ldots,v_{nj}^{(1)}\right]$. Продовжуючи далі, із застосування Леми 1.6

$$\sum_t \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.t}\right)\right)_\beta^\beta v_{tj}^{(1)}=\sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{v}_{.j}^{(1)}\right)\right)_\beta^\beta,$$

випливає (3.32) з вектор-стовпцем $\mathbf{v}_{.j}^{(1)}$, що визначається рівністю (3.34).

Якщо почнемо з використання Леми 1.6, то одержимо

$$w_{ik}^{(1)}:=\sum_t \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.t}\right)\right)_\beta^\beta \hat{u}_{tk}=\sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\hat{\mathbf{u}}_{.k}\right)\right)_\beta^\beta,$$

– k-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{w}_{i.}^{(1)}=\left[w_{i1}^{(1)},\ldots,w_{in}^{(1)}\right]$. Згодом використаємо Лему 1.5

$$\sum_k w_{ik}^{(1)}\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{k.}\right)\right)_\alpha^\alpha=\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{w}_{i.}^{(1)}\right)\right)_\alpha^\alpha,$$

і одержимо (3.33) з вектор-рядком $\mathbf{w}_{i.}^{(1)}$, що задається рівністю (3.73).

b) Із використання визначникового зображення (2.84) для $\mathbf{A}^d$ у рівності (3.90) та послідовного застосування Леми 1.6, маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger}=\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\dot{\mathbf{a}}_{.l}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta}\times$$

$$\frac{\sum\limits_{t=1}^n a_{lt}^{(m)} \sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right)_{.t}\left(\tilde{\mathbf{a}}_{.k}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right|_\beta^\beta}\times$$

$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{k.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha} = \sum_k \sum_t \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\check{\mathbf{a}}_{.t})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right)_{.t}(\tilde{\mathbf{a}}_{.k})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right|_\beta^\beta} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{k.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha},$$

де $\check{\mathbf{a}}_{.t}$ – t-ий стовпець матриці $\check{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^*\mathbf{A}^2$ і $\tilde{\mathbf{a}}_{.k}$ – k-ий стовпець матриці $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{2m+1})^*\mathbf{A}$. Позначимо $\mathbf{A}_2 = (a_{ij}^{(2)}) = (\mathbf{A}^{2m+1})^*\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$. Очевидно, що

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_l \sum_k \sum_t \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\check{\mathbf{a}}_{.t})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right)_{.t}(\mathbf{e}_{.k})\right)_\beta^\beta a_{kl}^{(2)}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} \left|\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right)_\beta^\beta\right|} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{l.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha},$$

де $\mathbf{e}_{.k}$ and $\mathbf{e}_{l.}$ – одиничні вектор-стовпець і вектор-рядок, відповідно. З Леми 1.6,

$$\begin{aligned} g_{tl} :=& \sum_l \sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right)_{.t}(\mathbf{e}_{.k})\right)_\beta^\beta a_{kl}^{(2)} = \\ =& \sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{A}^{2m+1}\right)^*\mathbf{A}^{2m+1}\right)_{.t}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta \end{aligned} \tag{3.46}$$

одержимо l-ту компоненту вектор-рядка $\mathbf{g}_{t.} = [g_{t1}, \ldots, g_{tn}]$. Далі, послідовне застосування Леми 1.5

$$\sum_l g_{tl} \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{l.}))_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{g}_{t.}))_\alpha^\alpha,$$

дає

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_t \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\check{\mathbf{a}}_{.t})\right)_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{g}_{t.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{2m+1}(\mathbf{A}^{2m+1})^*|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha}.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{G} = (g_{tl}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, де g_{tf} задається рівністю (3.46), і позначимо $\check{\mathbf{A}}\mathbf{G} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^2\mathbf{G} =: \hat{\mathbf{G}} = (\hat{g}_{tl})$. Тоді,

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \frac{\sum_t \sum_k \sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right)_\beta^\beta \hat{g}_{tk} \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j ((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{e}_{k.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left(|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta \right)^2 \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{2m+1} (\mathbf{A}^{2m+1})^*|_\alpha^\alpha}.$$

Якщо спочатку застосуємо Лему 1.5, то одержимо

$$v_{tj}^{(2)} := \sum_k \hat{a}_{tk} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{e}_{k.}) \right)_\alpha^\alpha =$$
$$= \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\hat{\mathbf{g}}_{t.}) \right)_\alpha^\alpha$$

– t-ту координату вектор-стовпця $\mathbf{v}_{.j}^{(2)} = \left[v_{1j}^{(2)}, \ldots, v_{nj}^{(2)} \right]$. Подальше застосування Леми 1.6

$$\sum_t \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet} \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right)_\beta^\beta v_{tj}^2 = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)} \right) \right)_\beta^\beta,$$

дає (3.32) з вектор-стовпцем $\mathbf{v}_{.j}^{(2)}$, що задається рівністю (3.36).

Якщо, навпаки, спочатку застосуємо Лему 1.6 щоб одержати

$$w_{ik}^{(2)} := \sum_t \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right)_\beta^\beta \hat{g}_{tk} =$$
$$= \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\hat{\mathbf{g}}_{.k}) \right)_\beta^\beta$$

– k-ту компоненту вектор-рядка $\mathbf{w}_{i.}^{(2)} = \left[w_{i1}^{(2)}, \ldots, w_{in}^{(2)} \right]$, то подальше використання Леми дає 1.5

$$\sum_k w_{ik}^{(2)} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{e}_{k.}) \right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{w}_{i.}^{(2)}) \right)_\alpha^\alpha.$$

З чого випливає (3.33) з вектор-рядком $\mathbf{w}_{i.}^{(2)}$, що задається рівністю (3.37).

(ii) Нехай тепер матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$ буде ермітовою.

а) Застосовуючи вирази (2.78), (2.18) та (2.19) для визначникових зображень матриць $\mathbf{A}^d$, $\mathbf{Q}_A$ та $\mathbf{P}_A$, відповідно, маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_l \sum_t \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{.i} \left(\mathbf{a}_{.t}^{(2)} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta} \times$$
$$\frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}\{l\}} \mathrm{rdet}_l \left((\mathbf{A}^{m+1})_{l.} \left(\mathbf{a}_{t.}^{(m)} \right) \right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_\alpha^\alpha} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \Big((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{a}_{l.}^{(2)}) \Big)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha},$$

де $\mathbf{a}_{.t}^{(2)}$ та $\mathbf{a}_{l.}^{(2)}$ – t-й стовпець та l-й рядок матриці $\mathbf{A}^2$, а $\mathbf{a}_{t.}^{(m)}$ – t-й рядок матриці $\mathbf{A}^m$. Очевидно, що

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_l \sum_t \sum_k \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right)_\beta^\beta a_{tk}^{(m+2)}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta} \times$$
$$\frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}\{l\}} \mathrm{rdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{m+1} \right)_{l.} (\mathbf{e}_{k.}) \right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_\alpha^\alpha} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \Big((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{a}_{l.}^{(2)}) \Big)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha},$$

де $\mathbf{e}_{.t}$ та $\mathbf{e}_{k.}$ – одиничні вектор-рядок і вектор-стовпець. За Лемою 1.5, позначимо

$$\begin{aligned} u_{tl} :=& \sum_k a_{tk}^{(m+2)} \sum_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{m+1} \right)_{l.} (\mathbf{e}_{k.}) \right)_\alpha^\alpha = \\ =& \sum_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{m+1} \right)_{l.} (\mathbf{a}_{t.}^{(m+2)}) \right)_\alpha^\alpha \end{aligned} \tag{3.47}$$

t-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{u}_{.l} = [u_{1l}, \ldots, u_{nl}]$. Оскільки за Лемою 1.6

$$\sum_t \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet} \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right)_\beta^\beta u_{tl} = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{.i} (\mathbf{u}_{.l}) \right)_\beta^\beta,$$

то

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_l \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2 \right)_{.i} (\mathbf{u}_{.l}) \right)_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \Big((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{a}_{l.}^{(2)}) \Big)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha}.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{U} = (u_{tl}) \in \mathbb{H}^{n \times n}$, де u_{tl} задається виразом (3.47), позначимо $\hat{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}^2$. Тоді, беручи до уваги рівність $\left|\mathbf{A}^2\right|_\beta^\beta = \left|\mathbf{A}^2\right|_\alpha^\alpha$, маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \frac{\sum_t \sum_k \sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i} (\mathbf{e}_{.t})\right)_\beta^\beta \hat{u}_{tk} \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{e}_{k.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} \left(|\mathbf{A}^2|_\beta^\beta\right)^2 \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_\alpha^\alpha}.$$

Нехай за Лемою 1.5,

$$v_{tj}^{(1)} := \sum_k \hat{u}_{tk} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.} (\mathbf{e}_{k.})\right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.} (\hat{\mathbf{u}}_{t.})\right)_\alpha^\alpha$$

є t-а компонента вектор-стовпця $\mathbf{v}_{.j}^{(1)} = \left[v_{1j}^{(1)}, \ldots, v_{nj}^{(1)}\right]$. Застосування Леми 1.6

$$\sum_t \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet} \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i} (\mathbf{e}_{.t})\right)_\beta^\beta v_{tj}^{(1)} = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i} \left(\mathbf{v}_{.j}^{(1)}\right)\right)_\beta^\beta.$$

дає (3.38) з вектор-стовпцем $\mathbf{v}_{.j}^{(1)}$, що задається рівністю (3.40).

Поклавши за Лемою 1.6,

$$w_{ik}^{(1)} := \sum_t \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i} (\mathbf{e}_{.t})\right)_\beta^\beta \hat{u}_{tk} = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i} (\hat{\mathbf{u}}_{.k})\right)_\beta^\beta$$

є k-а компонента вектор-рядка $\mathbf{w}_{i.}^{(1)} = \left[w_{i1}^{(1)}, \ldots, w_{in}^{(1)}\right]$, за подальшим застосуванням Леми 1.5 одержимо

$$\sum_k w_{ik}^{(1)} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.} (\mathbf{e}_{k.})\right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.} (\mathbf{w}_{i.}^{(1)})\right)_\alpha^\alpha.$$

З чого випливає (3.39) з вектор-рядком $\mathbf{w}_{i.}^{(1)}$, що задається виразом (3.41).

b) Використавши вираз (2.77) для визначникового зображення $\mathbf{A}^d$ у рівності (3.90), маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_k \sum_t \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i} \left(\mathbf{a}_{.t}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left(\left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.t} \left(\mathbf{a}_{.k}^{(m)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_\beta^\beta} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^2)_{j.} (\mathbf{a}_{k.}^{(2)})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha}.$$

Покладемо,

$$a_{ij}^{c,\dagger}=\sum_l\sum_k\sum_t \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.t}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta}\times$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.t}(\mathbf{e}_{.k})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} \left|(\mathbf{A}^{m+1})_\beta^\beta\right|} a_{kl}^{(m+2)} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\big((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{e}_{l.})\big)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha}.$$

Якщо за Лемою 1.6, позначимо

$$g_{tl}:=\sum_l \sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.t}(\mathbf{e}_{.k})\right)_\beta^\beta a_{kl}^{(m+2)}=$$

$$\sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.t}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(m+2)}\right)\right)_\beta^\beta \tag{3.48}$$

l-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{g}_{t.}=[g_{t1},\ldots,g_{tn}]$, то за Лемою 1.5,

$$\sum_l g_{tl}\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\big((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{e}_{l.})\big)_\alpha^\alpha=\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\big((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{g}_{t.})\big)_\alpha^\alpha.$$

З цього випливає, що

$$a_{ij}^{c,\dagger}=\sum_t \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.t}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\big((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{g}_{t.})\big)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha}.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{G}=(g_{tl})\in\mathbb{H}^{n\times n}$, де g_{tl} задаються виразом (3.48). Позначимо $\hat{\mathbf{G}}:=\check{\mathbf{A}}\mathbf{G}=\mathbf{A}^2\mathbf{G}$. Тоді

$$a_{ij}^{c,\dagger}=\frac{\sum_t\sum_k \sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}(\mathbf{e}_{.t})\right)_\beta^\beta \hat{g}_{tk} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\big((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{e}_{k.})\big)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left(|\mathbf{A}^2|_\beta^\beta\right)^2 \sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_\alpha^\alpha}.$$

Якщо позначимо

$$v_{tj}^{(2)}:=\sum_k \hat{a}_{tk}\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.}(\mathbf{e}_{k.})\right)_\alpha^\alpha=\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.}(\hat{\mathbf{g}}_{t.})\right)_\alpha^\alpha$$

– t-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{v}_{.j}^{(2)}=\left[v_{1j}^{(2)},\ldots,v_{nj}^{(2)}\right]$, то

$$\sum_t \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}(\mathbf{e}_{.t})\right)_\beta^\beta v_{tj}^{(2)}=\sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i}\left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta.$$

Отже, будемо мати вираз (3.38) з вектор-стовпцем $\mathbf{v}_{.j}^{(2)}$, що задається (3.42).

Якщо позначимо

$$w_{ik}^{(2)} := \sum_{t} \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right)_{\beta}^{\beta} \hat{g}_{tk} = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{.i} (\hat{\mathbf{g}}_{.k}) \right)_{\beta}^{\beta}$$

– k-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{w}_{i.}^{(2)} = \left[w_{i1}^{(2)}, \ldots, w_{in}^{(2)} \right]$, то

$$\sum_{k} w_{ik}^{(2)} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.} (\mathbf{e}_{k.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.} (\mathbf{w}_{i.}^{(2)}) \right)_{\alpha}^{\alpha}.$$

Таким чином, одержимо вираз (3.39) з вектор-рядком $\mathbf{w}_{i.}^{(2)}$, заданим як (3.43).

□

3.4.2. Визначникові зображення комплексної *CMP*-оберненої.

Теорема 3.12. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_s^{n\times n}$, $\operatorname{Ind} \mathbf{A} = m$ *та* $\operatorname{rank} \mathbf{A}^m = s_1$. *Тоді визначникові зображення її* CMP-*оберненої* $\mathbf{A}^{c,\dagger} = \left(a_{ij}^{c,\dagger}\right)$ *можна подати як*

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{v}_{.j}^{(l)}) \right|_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \right)^2 \sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_{\beta}^{\beta}} \tag{3.49}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{w}_{i.}^{(l)}) \right|_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha} \right)^2 \sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_{\beta}^{\beta}} \tag{3.50}$$

для всіх $l = 1, 2$, *де*

$$\mathbf{v}_{.j}^{(1)} = \left[\sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\widehat{\mathbf{u}}_{t.}) \right|_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \; t = 1, \ldots, n, \tag{3.51}$$

$$\mathbf{w}_{i.}^{(1)} = \left[\sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\widehat{\mathbf{u}}_{.k}) \right|_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \; k = 1, \ldots, n, \tag{3.52}$$

$$\mathbf{v}_{.j}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} (\widetilde{\mathbf{g}}_{t.}) \right|_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \; t = 1, \ldots, n, \tag{3.53}$$

$$\mathbf{w}_{i.}^{(2)} = \left[\sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\widetilde{\mathbf{g}}_{.k}) \right|_\beta^\beta \right] \in \mathbb{H}^{1\times n},\ k = 1, \dots, n. \tag{3.54}$$

Тут $\widehat{\mathbf{u}}_{t.}$ *–* t*-й рядок, а* $\widehat{\mathbf{u}}_{.k}$ *–* k*-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{U}} := \mathbf{UAA}^*$, $\widetilde{\mathbf{g}}_{t.}$ *is the* t*th row and* $\widetilde{\mathbf{g}}_{.k}$ *is the* k*th column of* $\widetilde{\mathbf{G}} := \mathbf{A}^*\mathbf{AG}$, *а матриці* $\mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *та* $\mathbf{G} = (g_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *є такими, що*

$$u_{ij} = \sum_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \left| \left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{j.} (\widehat{\mathbf{a}}_{i.}) \right|_\alpha^\alpha, \quad g_{ij} = \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{i\}} \left| \left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.i} (\widetilde{\mathbf{a}}_{.j}) \right|_\beta^\beta,$$

. де $\widehat{\mathbf{a}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widehat{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^*\mathbf{A}^{m+1}$, *а* $\widetilde{\mathbf{a}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^{m+1}\mathbf{A}^*$.

Доведення. Нехай $\mathbf{Q}_A = (q_{il}^A)$, $\mathbf{A}^d = (a_{il}^d)$ та $\mathbf{P}_A = (p_{il}^A)$. За виразом (3.31), маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{il}^A a_{lk}^d p_{kj}^A. \tag{3.55}$$

а) Використавши вирази (2.89), (2.31) і (2.33) для визначникових зображень матриць $\mathbf{A}^d$, $\mathbf{Q}_A$ та $\mathbf{P}_A$, відповідно, маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_l \sum_t \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\dot{\mathbf{a}}_{.t}) \right|_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} \left| \mathbf{A}^*\mathbf{A} \right|_\beta^\beta} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}\{l\}} \left| (\mathbf{A}^{m+1})_{l.} \left(\mathbf{a}_{t.}^{(m)}\right) \right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} \left| \mathbf{A}^{m+1} \right|_\alpha^\alpha} \times \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{AA}^*)_{j.} (\ddot{\mathbf{a}}_{l.}) \right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} \left| \mathbf{AA}^* \right|_\alpha^\alpha},$$

де $\dot{\mathbf{a}}_{.t}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\ddot{\mathbf{a}}_{l.}$ – l-й рядок матриці $\mathbf{AA}^*$, а $\mathbf{a}_{t.}^{(m)}$ – t-й рядок матриці $\mathbf{A}^m$. Очевидно, що

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \frac{\sum_l \sum_t \sum_k \sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right|_\beta^\beta \widehat{a}_{tk} \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}\{l\}} \left| \left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{l.} (\mathbf{e}_{k.}) \right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} \left| \mathbf{A}^*\mathbf{A} \right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} \left| \mathbf{A}^{m+1} \right|_\alpha^\alpha} \times \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{AA}^*)_{j.} (\ddot{\mathbf{a}}_{l.}) \right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} \left| \mathbf{AA}^* \right|_\alpha^\alpha},$$

де $\mathbf{e}_{.t}$ та $\mathbf{e}_{k.}$ – t-й одиничні вектор-рядок і вектор-стовпець, а $\widehat{a}_{tk}$ – (tk)-й елемент матриці $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}^{m+1}$. Позначимо

$$u_{tl} := \sum_k \widehat{a}_{tk} \sum_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \left| \left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{l.} (\mathbf{e}_{k.}) \right|_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha \in I_{s_1,n}\{j\}} \left| \left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{l.} (\widehat{\mathbf{a}}_{t.}) \right|_\alpha^\alpha \tag{3.56}$$

– t-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{u}_{.l} = [u_{1l}, \ldots, u_{nl}]$. Оскільки

$$\sum_t \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right|_\beta^\beta u_{tl} = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{u}_{.l}) \right|_\beta^\beta,$$

то

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_l \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{u}_{.l}) \right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\ddot{\mathbf{a}}_{l.}) \right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left| \mathbf{A}^*\mathbf{A} \right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} \left| \mathbf{A}^{m+1} \right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} \left| \mathbf{A}\mathbf{A}^* \right|_\alpha^\alpha}.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{U} = (u_{tl}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, елементи u_{tl} якої задаються умовою (3.56), і позначимо $\widehat{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{A}^*$. Тоді, враховуючи рівність $|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta = |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha$, маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \frac{\sum_t \sum_k \sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right|_\beta^\beta \widehat{u}_{tk} \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{e}_{k.}) \right|_\alpha^\alpha}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} \left| \mathbf{A}^*\mathbf{A} \right|_\beta^\beta \right)^2 \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} \left| \mathbf{A}^{m+1} \right|_\alpha^\alpha}.$$

Якщо покладемо

$$v_{tj}^{(1)} := \sum_k \widehat{u}_{tk} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{e}_{k.}) \right|_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left| (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\widehat{\mathbf{u}}_{t.}) \right|_\alpha^\alpha$$

як t-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{v}_{.j}^{(1)} = \left[v_{1j}^{(1)}, \ldots, v_{nj}^{(1)} \right]$. Тоді з того, що

$$\sum_t \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right|_\beta^\beta v_{tj}^{(1)} = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{v}_{.j}^{(1)} \right) \right|_\beta^\beta.$$

слідує (3.49) з вектор-стовпцем $\mathbf{v}_{.j}^{(1)}$, що задається рівнянням (3.51).

Якщо спочатку покладемо

$$w_{ik}^{(1)} := \sum_t \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\mathbf{e}_{.t}) \right|_\beta^\beta \widehat{u}_{tk} = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left| (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} (\widehat{\mathbf{u}}_{.k}) \right|_\beta^\beta$$

як k-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{w}_{i.}^{(1)} = \left[w_{i1}^{(1)}, \ldots, w_{in}^{(1)}\right]$, тоді з рівності

$$\sum_{k} w_{ik}^{(1)} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.}(\mathbf{e}_{k.})\right|_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_{j.}(\mathbf{w}_{i.}^{(1)})\right|_{\alpha}^{\alpha},$$

випливає (3.50) з вектор-рядком $\mathbf{w}_{i.}^{(1)}$, що задається рівністю (3.52).

b) Використавши визначникове зображення (2.88) для матриці Дразіна $\mathbf{A}^d$ в умові (3.90), одержимо

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_{k}\sum_{t} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\dot{\mathbf{a}}_{.t})\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}\{t\}} \left|\left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.t}\left(\mathbf{a}_{.k}^{(m)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_{\beta}^{\beta}} \times$$
$$\frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{k.})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Тоді,

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_{l}\sum_{k}\sum_{t} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\dot{\mathbf{a}}_{.t})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \times$$
$$\frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}\{t\}} \left|\left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.t}(\mathbf{e}_{.k})\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_{\beta}^{\beta}} \widetilde{a}_{kl} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{l.})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

де $\mathbf{e}_{l.}$ та $\mathbf{e}_{.k}$ – одиничні вектор-рядок і вектор-стовпець, а $\widetilde{a}_{kl}$ – (kl)-й елемент матриці $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{m+1}\mathbf{A}^*$. Позначивши

$$g_{tl} := \sum_{l} \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{t\}} \left|\left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.t}(\mathbf{e}_{.k})\right|_{\beta}^{\beta} \widetilde{a}_{kl} = \sum_{\beta \in J_{s_1,n}\{t\}} \left|\left(\mathbf{A}^{m+1}\right)_{.t}(\widetilde{\mathbf{a}}_{.l})\right|_{\beta}^{\beta} \tag{3.57}$$

як l-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{g}_{t.} = [g_{t1}, \ldots, g_{tn}]$, одержимо

$$\sum_{l} g_{tl} \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{l.})\right|_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{g}_{t.})\right|_{\alpha}^{\alpha}.$$

З цього випливає

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \sum_{t} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\dot{\mathbf{a}}_{.t})\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{j.}(\mathbf{g}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{m+1}|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{G} = (g_{tl}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, де g_{tl} задаються виразом (3.57), і позначимо $\widetilde{\mathbf{G}} := \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{G}$. Тоді

$$a_{ij}^{c,\dagger} = \frac{\sum_t \sum_k \sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\,(\mathbf{e}_{.t})\right|_\beta^\beta \widetilde{g}_{tk} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{k.})\right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} \left(\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta\right)^2 \sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} \left|\mathbf{A}^{m+1}\right|_\alpha^\alpha}.$$

Аналогічно вищевикладеному, позначивши

$$v_{tj}^{(2)} := \sum_k \widetilde{g}_{tk} \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}\,(\mathbf{e}_{k.})\right|_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}\,(\widetilde{\mathbf{g}}_{t.})\right|_\alpha^\alpha$$

як t-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{v}_{.j}^{(2)} = \left[v_{1j}^{(2)}, \ldots, v_{nj}^{(2)}\right]$, маємо

$$\sum_t \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\,(\mathbf{e}_{.t})\right|_\beta^\beta v_{tj}^{(2)} = \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)}\right)\right|_\beta^\beta.$$

Таким чином, одержимо вираз (3.49) з вектор-стовпцем $\mathbf{v}_{.j}^{(2)}$ заданим у (3.53).

Якщо позначимо

$$w_{ik}^{(2)} := \sum_t \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\,(\mathbf{e}_{.t})\right|_\beta^\beta \widetilde{g}_{tk} = \sum_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\,(\widetilde{\mathbf{g}}_{.k})\right|_\beta^\beta$$

як k-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{w}_{i.}^{(2)} = \left[w_{i1}^{(2)}, \ldots, w_{in}^{(2)}\right]$, тоді

$$\sum_k w_{ik}^{(2)} \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}\,(\mathbf{e}_{k.})\right|_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}\,(\mathbf{w}_{i.}^{(2)})\right|_\alpha^\alpha.$$

Отже, кінцево маємо (3.50) з вектор-рядком $\mathbf{w}_{i.}^{(2)}$, що задається умовою (3.54).

$\square$

3.5. Зважені кватерніонові *EP*-серцевинні обернені матриці та їх визначникові зображення.

3.5.1. Зважені кватерніонові *EP*-серцевинні обернені матриці.

W-зважена EP-серцевинна обернена матриця може бути узагальнена на множину кватерніонових матриць наступним чином.

Означення 3.8. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *будуть ненульовими матрицями з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$. *Тоді права W-зважена EP-серцевинна обернена матриці* $\mathbf{A}$ *є єдиним розв'язком системи*

$$\mathbf{WAWX} = (\mathbf{WA})^k \left[(\mathbf{WA})^k\right]^{\dagger}, \quad \mathcal{R}_r(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{R}_r\left((\mathbf{AW})^k\right).$$

Будемо позначати її як $\mathbf{A}^{\oplus,W,r}$.

Відповідно до [61], права W-зважена EP-серцевинна обернена над тілом кватерніонів може бути охарактеризована наступним чином.

Теорема 3.13. *Нехай* $\mathbf{A},\ \mathbf{X} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *будуть ненульовими матрицями з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$. *Наступні твердження еквівалентні.*

(i) $\mathbf{X}$ *– права W-зважена EP-серцевинна обернена для матриці* $\mathbf{A}$.

(ii) $\mathbf{XW}(\mathbf{AW})^{k+1} = (\mathbf{AW})^k,\ \mathbf{AWXWX} = \mathbf{X},\ (\mathbf{WAWX})^* = \mathbf{WAWX}$.

(iii)

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\left[(\mathbf{WA})^{\oplus}\right]^2. \tag{3.58}$$

Доведення. Доведення аналогічне доведенню для випадку комплексних матриць ([61, Теорема 2.2]) □

Пропонується також розглянути ліву W-зважену *EP*-серцевинну обернену.

Означення 3.9. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *будуть ненульовими матрицями з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$. *Тоді ліва W-зважена EP-серцевинна обернена матриці* $\mathbf{A}$ *є єдиним розв'язком системи*

$$\mathbf{XWAW} = \left[(\mathbf{AW})^k\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^k, \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{R}_l\left((\mathbf{WA})^k\right). \tag{3.59}$$

Вона позначаєтьcя як $\mathbf{A}^{\oplus,W,l}$.

Теорема 3.14. *Нехай* $\mathbf{A},\ \mathbf{X} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *будуть ненульовими матрицями з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$. *Наступні твердження є еквівалентними.*

(i) $\mathbf{X} = \left[(\mathbf{AW})_{\oplus}\right]^2\mathbf{A}$.

(ii) $\mathbf{X}$ *є ліва W-зважена EP-серцевинна обернена для матриці* $\mathbf{A}$.

(iii) $\mathbf{X}$ *є единим розв'язком системи*

$$(\mathbf{WA})^{k+1}\,\mathbf{WX} = (\mathbf{WA})^{k},\ \mathbf{XWXWA} = \mathbf{X},\ (\mathbf{XWAW})^{*} = \mathbf{XWAW}. \quad (3.60)$$

Доведення. $(i) \mapsto (ii)$ Покажемо, що $\mathbf{X} = \left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{A}$ задовольняє умову (3.59). Дійсно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{XWAW} &= \left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{AWAW} = (\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\,\mathbf{AW} = \\
&= \left[(\mathbf{AW})^{k}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{k}(\mathbf{AW})^{d}\,\mathbf{AW} = \left[(\mathbf{AW})^{k}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{k}, \\
\left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{A} &= \left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^3\mathbf{AWA} = \ldots = \left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^{k+2}(\mathbf{AW})^{k}\,\mathbf{A} = \\
&= \left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^{k+2}\mathbf{A}\,(\mathbf{WA})^{k}, \Longleftrightarrow \\
&\mathcal{R}_l(\left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{R}_l\left((\mathbf{WA})^{k}\right).
\end{aligned}$$

$(ii) \mapsto (iii)$ Доведемо, що $\mathbf{X} = \left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{A}$ задовольняє рівняння (3.60).

Оскільки $(\mathbf{WA})^{k+1}\,\mathbf{W} = \mathbf{W}\,(\mathbf{AW})^{k+1}$ і беручи до уваги Лемму 3.4, $(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}} = \left((\mathbf{AW})^{k}\right)^{\dagger}(\mathbf{AW})^{k}(\mathbf{AW})^{d}$, маємо

$$\begin{aligned}
(\mathbf{WA})^{k+1}\,\mathbf{W}\left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{A} =& \mathbf{W}\left[(\mathbf{AW})^{k+1}(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right](\mathbf{WA})_{\textcircled{\dagger}}\,\mathbf{A} = \\
=& \mathbf{W}\,(\mathbf{AW})^{k}\left((\mathbf{AW})^{k}\right)^{\dagger}(\mathbf{AW})^{k}(\mathbf{AW})^{d}\,\mathbf{A} = \\
=& \mathbf{W}\,(\mathbf{AW})^{k}(\mathbf{AW})^{d}\,\mathbf{A} = \\
=& (\mathbf{WA})^{k+1}(\mathbf{WA})^{d} = \\
=& (\mathbf{WA})^{k}.
\end{aligned}$$

За Лемою 3.4 і враховуючи, що $\left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{AW} = (\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}$, одержимо

$$\begin{aligned}
\left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{AW}\left(\left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{AW}\right)\mathbf{A} &= \left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{AW}\,(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\,\mathbf{A} = \\
&= \left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\left(\left[(\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\right]^2\mathbf{AWAW}\right)^{*} = \left((\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\,\mathbf{AW}\right)^{*} = (\mathbf{AW})_{\textcircled{\dagger}}\,\mathbf{AW}.$$

Тепер доведемо єдиність $\mathbf{X}$. Нехай

$$(\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{WX} = (\mathbf{WA})^{k},\ \mathbf{XWXWA} = \mathbf{X},\ (\mathbf{XWAW})^{*} = \mathbf{XWAW},$$
$$\text{and } \mathbf{X} = \left[(\mathbf{AW})_{\oplus}\right]^{2}\mathbf{A}.$$

Припустимо, що існує також інша ліва W-зважена EP-серцевинна обернена $\mathbf{Y}$ така, що

$$(\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{WY} = (\mathbf{WA})^{k},\ \mathbf{YWYWA} = \mathbf{Y},\ \text{and } (\mathbf{YWAW})^{*} = \mathbf{YWAW}.$$

Покажемо, що $\mathbf{Y} = \mathbf{X} = \left[(\mathbf{AW})_{\oplus}\right]^{2}\mathbf{A}$. Отже,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} =& \mathbf{YWYWA} = \mathbf{Y}(\mathbf{WY})^{2}(\mathbf{WA})^{2} = \mathbf{Y}(\mathbf{WY})^{k}(\mathbf{WA})^{k} =\\ &= \mathbf{Y}(\mathbf{WY})^{k}(\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{WX} = (\mathbf{YW})^{k+1}(\mathbf{AW})^{k+1}\mathbf{X} = (\mathbf{YWAW})^{k+1}\mathbf{X} =\\ &= \left(\left[(\mathbf{AW})^{k}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{k}\right)^{k+1}\mathbf{X} = \left[(\mathbf{AW})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{2k+1}\left[(\mathbf{AW})_{\oplus}\right]^{2}\mathbf{A}.\end{aligned}$$

За Лемою 3.4, $(\mathbf{AW})_{\oplus} = \left[(\mathbf{AW})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{2k+1}(\mathbf{AW})^{d}$.

Таким чином,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \left[(\mathbf{AW})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{2k+1}\left[(\mathbf{AW})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{2k+1}(\mathbf{AW})^{d}(\mathbf{AW})_{\oplus}\mathbf{A} =\\ &= \left[(\mathbf{AW})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{2k+1}(\mathbf{AW})^{d}(\mathbf{AW})_{\oplus}\mathbf{A} = \left[(\mathbf{AW})_{\oplus}\right]^{2}\mathbf{A}.\end{aligned}$$

і з єдиності $\mathbf{X}$ випливає $(iii) \mapsto (i)$. □

3.5.2. Визначникові зображення кватерніонових зважених *EP*- серцевинних обернених.

У цьому пункті розглянемо визначникові зображення W-зважених кватерніонових *EP*-серцевинних обернених.

Теорема 3.15. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \neq 0 \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$, $\mathrm{rank}(\mathbf{WA})^{k} = s$. *Позначимо* $\mathbf{WA} := \mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. *Тоді права W-зважена EP-серцевинна обернена* $\mathbf{A}^{\oplus,W,r} = \left(a_{ij}^{\oplus,W,r}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *має визначникове зображення*

$$a_{ij}^{\oplus,W,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_{j}\left(\left(\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right)_{j.}\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}\left|\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^{2}}, \tag{3.61}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ *–* i*–й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{U}^{k}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}$*. Матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{if})$ *така, що*

$$\phi_{if} = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_{f}\left(\left(\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right)_{f.}\left(\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\widetilde{\mathbf{u}}_{i\,.}$ *–* i*–й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{A}\mathbf{U}^{k}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}$*.*

Доведення. За представленням (3.58) для матриці $\mathbf{A}^{\oplus,W,r}$, маємо

$$a_{ij}^{\oplus,W,r} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{f=1}^{n} a_{il} u_{lf}^{\oplus,r} u_{fj}^{\oplus,r}. \tag{3.62}$$

Застосування визначникового зображення (3.12) для $\mathbf{U}^{\oplus}$ дає

$$\phi_{if} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} u_{lf}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_{f}\left(\left(\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right)_{f.}\left(\hat{\mathbf{u}}_{l.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} \left|\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_{f}\left(\left(\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right)_{f.}\left(\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} \left|\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\hat{\mathbf{u}}_{l.}$ – l–й рядок матриці $\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^{k}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}$ та $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ – i–й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{A}\mathbf{U}^{k}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}$. Позначимо

$$\phi_{if} = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_{f}\left(\left(\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right)_{f.}\left(\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}.$$

Підставивши ϕ_{if} у вираз (3.62), маємо

$$a_{ij}^{\oplus,W,r} = \sum_{l=1}^{n} \phi_{if} u_{fj}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{f=1}^{n} \phi_{if} \sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_{j}\left(\left(\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right)_{j.}\left(\widehat{\mathbf{u}}_{f.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{s,n}} \left|\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^{2}}.$$

Поклавши $\sum\limits_{f=1}^{n} \phi_{if}\widehat{\mathbf{u}}_{f.} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ як i–й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{U}^{k}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^{*}$ одержимо (3.61). □

Аналогічно, можна довести теорему про визначникові зображення лівої W-зваженої кватерніонової *EP*-серцевинної оберненої.

Теорема 3.16. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \neq 0 \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$, $\mathrm{rank}(\mathbf{AW})^k = s$. *Позначимо* $\mathbf{AW} := \mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$. *Тоді ліва W-зважена EP-серцевинна обернена* $\mathbf{A}^{\oplus,W,l} = \left(a_{ij}^{\oplus,W,l}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *покомпонентно може бути виражена як*

$$a_{ij}^{\oplus,W,l} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^{k+1}\right)_{.i} (\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{s,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.j}$ – j–*ий стовпець матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^k \boldsymbol{\Psi}$. *Матриця* $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{lj}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *є така, що*

$$\psi_{lj} = \sum_{\beta\in J_{s,m}\{l\}} \mathrm{cdet}_l \left(\left(\left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^{k+1}\right)_{.l} (\widetilde{\mathbf{v}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{v}}_{.j}$ – j–*ий стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{V}} = \left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^k \mathbf{A}$.

3.5.3. Визначникові зображення зважених *EP*-серцевинних обернених для комплексних матриць. Визначникові зображення зважених правої та лівої *EP*-серцевинних обернених для комплексних матриць легко отримати з Теорем 3.15 та 3.16, відповідно, поклавши замість стовпцевих та рядкових некомутативних визначників - звичайні визначники.

Теорема 3.17. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \neq 0 \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$, $\mathrm{rk}(\mathbf{WA})^k = s$. *Позначимо* $\mathbf{WA} := \mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Тоді права W-зважена EP-серцевинна обернена* $\mathbf{A}^{\oplus,W,r} = \left(a_{ij}^{\oplus,W,r}\right) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *має визначникове зображення*

$$a_{ij}^{\oplus,W,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \left|\left(\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^*\right)_{j.} (\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.})\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2}, \tag{3.63}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ – i–*й рядок матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{U}^k\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^*$. *Матриця* $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{if})$ *така, що*

$$\phi_{if} = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{f\}} \left|\left(\mathbf{U}^{k+1}\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^*\right)_{f.} (\widetilde{\mathbf{u}}_{i.})\right|_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ – i–*й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{A}\mathbf{U}^k\left(\mathbf{U}^{k+1}\right)^*$.

Теорема 3.18. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \neq 0 \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$, $\mathrm{rk}(\mathbf{AW})^k = s$. *Позначимо* $\mathbf{AW} := \mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$. *Тоді ліва W-зважена EP-серцевинна обернена* $\mathbf{A}^{\oplus,W,l} = \left(a_{ij}^{\oplus,W,l}\right) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *покомпонентно може бути виражена як*

$$a_{ij}^{\oplus,W,l} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,m}\{i\}} \left| \left(\left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^{k+1} \right)_{.i} (\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.j}) \right|_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{s,m}} \left| \left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^{k+1} \right|_{\beta}^{\beta} \right)^2},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.j}$ *–* j*–ий стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Psi}} = \left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^k \mathbf{\Psi}$. *Матриця* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{lj}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *є така, що*

$$\psi_{lj} = \sum_{\beta\in J_{s,m}\{l\}} \left| \left(\left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^{k+1} \right)_{.l} (\widetilde{\mathbf{v}}_{.j}) \right|_{\beta}^{\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{v}}_{.j}$ *–* j*–ий стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{V}} = \left(\mathbf{V}^{k+1}\right)^* \mathbf{V}^k \mathbf{A}$.

Оскільки, отримані визначникові зображення зважених EP-серцевинних обернених для комплексних матриць також є єдиним відомим результатом [128], то цим підтверджується його актуальність і новизна.

3.6. Зважені кватерніонові *MPD* та *DMP*-обернені матриці та їх визначникові зображення.

Нещодавно у роботі [174] Менг розширив поняття DMP-оберненої комплексної квадратної матриці до прямокутних матриць, давши означення зваженої DMP-оберненої. У цьому підрозділі це поняття узагальнюється на множину кватерніонових матриць.

3.6.1. Кватерніонові W-зважені *DMP* та *MPD*-обернені. Аналогічно до [174, Означення 2.2], маємо.

Означення 3.10. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *та* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *будуть ненульовими матрицями. Зваженою DMP-оберненою (WDMP) матриці* $\mathbf{A}$ *по відношенню до*

$\mathbf{W}$ *називається матриця*

$$\mathbf{A}^{d,\dagger,W} = \mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}. \tag{3.64}$$

Наступну теорему можна довести аналогічно до [174, Теорема 2.1].

Теорема 3.19. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *– ненульові матриці з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{W}\mathbf{A}), \mathrm{Ind}(\mathbf{A}\mathbf{W})\}$. *Матриця* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{d,\dagger,W}$ *є единим розв'язком системи*

$$\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X},\ \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}\mathbf{A},\ (\mathbf{W}\mathbf{A})^{k+1}\mathbf{X} = (\mathbf{W}\mathbf{A})^{k+1}\mathbf{A}^{\dagger}. \tag{3.65}$$

Введемо також поняття зваженою *MPD*-оберненої матриці.

Теорема 3.20. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *– ненульові матриці з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{W}\mathbf{A}), \mathrm{Ind}(\mathbf{A}\mathbf{W})\}$. *Тоді матриця* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}$ *є единим розв'язком системи*

$$\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X},\ \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W},\ \mathbf{X}(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1} = \mathbf{A}^{\dagger}(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1}. \tag{3.66}$$

Доведення. З Означення 1.17 матриці Мура-Пенроуза та Означення 2.5 зваженої матриці Дразіна, а також беручи до уваги її представлення (2.93), маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A})\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W} =& \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W})\mathbf{W} = \\
=& \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}, \\
\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W} =& \mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}, \\
\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1} =& \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\left((\mathbf{A}\mathbf{W})^{d}\right)^{2}\mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1} = \\
=& \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{W})^{d}\mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{W})^{d}(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1} = \\
=& \mathbf{A}^{\dagger}(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1}.
\end{aligned}$$

Це означає, що $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}$ є розв'язком системи рівнянь (3.66).

Щоб довести єдиність, припустимо, що існують дві матриці $\mathbf{X}_1$ та $\mathbf{X}_2$, які є розв'язками системи (3.67). Використовуючи повторне застосування рівняння (3.67) та Означення 2.5, одержимо

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 =& \mathbf{X}_1\mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W} = \mathbf{X}_1\,(\mathbf{A}\mathbf{W})^{2}\left(\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}\right)^{2} = \ldots = \\
=& \mathbf{X}_1\,(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1}\left(\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}\right)^{k+1} = \mathbf{A}^{\dagger}\,(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1}\left(\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}\right)^{k+1} = \\
=& \mathbf{X}_2\,(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1}\left(\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}\right)^{k+1} = \mathbf{X}_2\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W} = \mathbf{X}_2\mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2.
\end{aligned}$$

Що й завершує доведення. $\square$

Означення 3.11. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *будуть ненульовими матрицями. Зваженою MPD-оберненою (WMPD) матриці* $\mathbf{A}$ *по відношенню до* $\mathbf{W}$ *називаетъся матриця*

$$\mathbf{A}^{\dagger,d,W} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}. \tag{3.67}$$

3.6.2. Визначникові зображення кватерніонових W-зважених *DMP* та *MPD*-обернених. Розглянемо визначникові зображення *WDMP*-оберненої в залежності від ермітовості матриці $\mathbf{U} := \mathbf{W}\mathbf{A}$.

Теорема 3.21. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *– ненульові матриці з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$ *та* $\mathrm{rank}(\mathbf{WA})^k = \mathrm{rank}\,\mathbf{U}^k = r_1$. *Тоді визначникові зображення WDMP-оберненої* $\mathbf{A}^{d,\dagger,W} = \left(a_{ij}^{d,\dagger,W}\right)$ *є наступними.*

(i) Якщо матриця $\mathbf{WA}$ *є довільною, тоді*

$$a_{ij}^{d,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}^{(1)})\Big)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|_{\alpha}^{\alpha} \left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2}, \tag{3.68}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}^{(1)}$ *– i-й рядок* $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1(\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{A}^*$. *Матриця* $\boldsymbol{\Omega}_1 = (\omega_{is}^{(1)})$ *є така, що*

$$\omega_{is}^{(1)} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \mathrm{rdet}_s\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{s.}(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}, \tag{3.69}$$

де $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ *– i-й рядок матриці* $\widehat{\boldsymbol{\Phi}} := \mathbf{WA\Phi U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^* \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *а матриця* $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{lq}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *задаєтъся як*

$$\phi_{iq} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{rdet}_q\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{q.}(\check{\mathbf{u}}_{l\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha}. \tag{3.70}$$

Тут $\check{\mathbf{u}}_{l\,.}$ *– l-й рядок матриці* $\mathbf{U}^k(\mathbf{U}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

(ii) Якщо матриця $\mathbf{WA}$ *є ермітовою, тоді*

$$a_{ij}^{d,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}^{(2)})\Big)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.71}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}^{(2)}$ – *i-й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{\Omega}}_2 = \mathbf{\Omega}_2\mathbf{WAA}^*$. *Матриця* $\mathbf{\Omega}_2 = (\omega_{is}^{(2)})$ *є така, що*

$$\omega_{is}^{(2)} := \sum_{\alpha \in I_{r_1,n}\{s\}} \mathrm{rdet}_s \left((\mathbf{WA})^{k+2}_{s.}(\widehat{\mathbf{u}}_{i.}) \right)^{\alpha}_{\alpha},$$

де $\widehat{\mathbf{u}}_{i.}$ – *i-й рядок матриці* $\widehat{\mathbf{U}} = (\mathbf{WA})^{k+1}$.

Доведення. За Означенням 3.10 *WDMP*-оберненої, маємо

$$a_{ij}^{d,\dagger,W} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\sum_{f=1}^{m} w_{it}a_{ts}^{d,W}w_{sf}p_{fj}^{A}, \tag{3.72}$$

де $\mathbf{A}^{d,W} = (a_{ts}^{d,W}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ та $\mathbf{P}_A = (p_{fj}^{A}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$.

(i) Позначимо $\mathbf{W}_1 := \mathbf{WAA}^* = (w_{sj}^{(1)})$. Застосовуючи вираз (2.16) для визначникового зображення проективної матриці $\mathbf{P}_A$, одержимо

$$\sum_{f=1}^{m} w_{sf}p_{fj}^{A} = \sum_{f=1}^{m} w_{sf}\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{f.}))^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|^{\alpha}_{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(1)})\Big)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|^{\alpha}_{\alpha}}. \tag{3.73}$$

Підставивши вираз (3.73) у рівняння (3.72) та застосувавши (2.98) для визначникового зображення W-зваженої матриці Дразіна $\mathbf{A}^{d,W}$, маємо

$$a_{ij}^{d,\dagger,W} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \mathrm{rdet}_s\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{s.}(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_{i.})\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}\right)^2} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(2)})\Big)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{3.74}$$

де $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\widehat{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{WA\Phi U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^* \in \mathbb{H}^{m\times n}$, а $\mathbf{w}_{s.}^{(2)}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{W}_2 = \mathbf{U}^k\mathbf{WAA}^* = (\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{A}^*$. Тут матриця $\mathbf{\Phi} = (\phi_{lq}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є такою, що

$$\phi_{lq} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{rdet}_q\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{q.}(\check{\mathbf{u}}_{l.})\right)^{\alpha}_{\alpha},$$

де $\check{\mathbf{u}}_{l.}$ – l-й рядок матриці $\mathbf{U}^k(\mathbf{U}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Позначимо

$$\omega_{is}^{(1)} := \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{s.}(\widehat{\phi}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}$$

і побудуємо матрицю $\mathbf{\Omega}_1 = (\omega_{is}^{(1)})$. Оскільки

$$\sum_{s=1}^{n}\omega_{is}^{(1)}\sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(3)})\Big)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}^{(1)})\Big)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}^{(1)}$ – i-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}}_1 = \mathbf{\Omega}_1\mathbf{W}_3 = \mathbf{\Omega}_1(\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{A}^*$, то з рівності (3.74) випливає (3.68).

(ii) Застосування визначникового зображення (2.128) W-зваженої матриці Дразіна $\mathbf{A}^{d,W}$ у виразі (3.72) дає

$$a_{ij}^{d,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left((\mathbf{WA})_{s.}^{k+2}(\widehat{\mathbf{u}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(2)})\Big)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}}\left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|_{\alpha}^{\alpha}\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}}|\mathbf{AA}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.75}$$

де $\widehat{\mathbf{u}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\widehat{\mathbf{U}} := (\mathbf{WA})^{k+1} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ і $\mathbf{w}_{s.}^{(2)}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{W}_2 = \mathbf{U}^k\mathbf{WAA}^* = (\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{A}^*$. Позначимо

$$\omega_{is}^{(2)} := \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left((\mathbf{WA})_{s.}^{k+2}(\widehat{\mathbf{u}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}$$

і побудуємо матрицю $\mathbf{\Omega}_2 = (\omega_{is}^{(2)})$. Оскільки

$$\sum_{s=1}^{n}\omega_{is}^{(2)}\sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\boldsymbol{w}_{s.}^{(2)})\Big)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}^{(2)})\Big)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}^{(2)}$ – i-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}}_2 = \mathbf{\Omega}_2\mathbf{W}_2 = \mathbf{\Omega}_2(\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{A}^*$, то з рівності (3.75) випливає (3.71).

$\square$

Для *WMPD*-оберненої маємо аналогічно.

Теорема 3.22. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *– ненульові матриці з* $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{WA}), \operatorname{Ind}(\mathbf{AW})\}$ *та* $\operatorname{rank}(\mathbf{AW})^k = \operatorname{rank}\mathbf{V}^k = r_1$. *Тоді визначникові зображення її WMPD-оберненої* $\mathbf{A}^{\dagger,d,W} = \left(a_{ij}^{\dagger,d,W}\right)$ *мають вираз.*

(i) Якщо матриця $\mathbf{V} := \mathbf{AW}$ *– довільна, тоді*

$$a_{ij}^{\dagger,d,W} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}^{(1)} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,m}} \left| \left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right|_\beta^\beta} \tag{3.76}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}^{(1)}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}}_1 = \mathbf{A}^*(\mathbf{AW})^{k+1}\mathbf{\Upsilon}_1$*. Матриця* $\mathbf{\Upsilon}_1 = (\upsilon_{tj}^{(1)})$ *визначається як*

$$\upsilon_{tj}^{(1)} := \sum_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right)_{.\,t} \left(\widehat{\psi}_{.j} \right) \right)_\beta^\beta,$$

де $\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{\Psi}} := (\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{2k}\mathbf{\Psi}\mathbf{AW} \in \mathbb{H}^{m\times n}$*. Тут матриця* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{s\,l}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *є така, що*

$$\psi_{s\,l} = \sum_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{s\}} \mathrm{cdet}_s \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right)_{.\,s} (\hat{\mathbf{v}}_{.\,l}) \right)_\beta^\beta,$$

де $\hat{\mathbf{v}}_{.l}$ *–* l*-й стовпець матриці* $(\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^k =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m\times m}$.

(ii) Якщо матриця $\mathbf{AW}$ *– ермітова, то*

$$a_{ij}^{\dagger,d,W} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}^{(2)} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta \left(\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,m}} \left| (\mathbf{AW})^{k+2} \right|_\beta^\beta \right)^2} \tag{3.77}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}^{(2)}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}}_2 = \mathbf{A}^*(\mathbf{AW})^{k+1}\mathbf{\Upsilon}_2$*. Матриця* $\mathbf{\Upsilon}_2 = (\upsilon_{sj}^{(2)})$ *задається як*

$$\upsilon_{sj}^{(2)} = \sum_{\beta \in J_{r_1,m}\{s\}} \mathrm{cdet}_s \left((\mathbf{AW})_{.s}^{k+2} (\widetilde{\mathbf{v}}_{.j}) \right)_\beta^\beta,$$

де $\widetilde{\mathbf{v}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{V}} = (\mathbf{AW})^{k+1}$.

Доведення. За представленням (3.67) *WMPD*-оберненої, маємо

$$a_{ij}^{\dagger,d,W} = \sum_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \sum_{f=1}^{m} q_{if}^{A} w_{ft} a_{ts}^{d,W} w_{sf}, \tag{3.78}$$

де $\mathbf{A}^{d,W} = (a_{ts}^{d,W}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ та $\mathbf{Q}_A = (q_{if}^{A}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

(i) Позначимо $\mathbf{W}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{W} = (w^{(1)}_{sj})$. Застосування виразу (2.14) для визначникового зображення проективної матриці $\mathbf{Q}_A$ дає

$$\sum_{l=1}^{n} q_{il}^{A} w_{lt} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\dot{\mathbf{a}}_{.\,l}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} w_{lt} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{w}^{(1)}_{.\,t}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}}. \tag{3.79}$$

Підставивши (3.79) у (3.78) та застосувавши (2.99) для визначникового зображення W-зваженої матриці Дразіна $\mathbf{A}^{d,W}$, одержимо

$$a_{ij}^{\dagger,d,W} = \sum_{t=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{w}^{(2)}_{.\,t}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,t} \left(\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}} \left| \left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta} \right)^2}, \tag{3.80}$$

де $\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{.\,j}$ – j–й стовпець матриці $\widehat{\boldsymbol{\Psi}} := (\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{2k}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{A}\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ і $\mathbf{w}^{(2)}_{.\,t}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{W}_2 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{V}^k = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{W}\right)^{k+1} \in \mathbb{H}^{m\times m}$. Тут матриця $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{s\,l}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ є такою, що

$$\psi_{s\,l} = \sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{s\}} \mathrm{cdet}_s \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,s} \left(\hat{\mathbf{v}}_{.\,l}\right)\right)_{\beta}^{\beta}.$$

Тут $\hat{\mathbf{v}}_{.\,l}$ – l-й стовпець матриці $(\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^k =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m\times m}$. Позначимо

$$\upsilon_{tj}^{(1)} := \sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,t} \left(\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{.\,j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

і побудуємо матрицю $\boldsymbol{\Upsilon}_1 = (\upsilon^{(1)}_{tj})$. Беручи до уваги те, що

$$\sum_{t=1}^{m} \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{w}^{(2)}_{.\,t}\right)\right)_{\beta}^{\beta} \upsilon_{tj}^{(1)} = \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}^{(1)}_{.\,j}\right)\right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}^{(1)}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}}_1 = \mathbf{W}_2\mathbf{\Upsilon}_1 = \mathbf{A}^*(\mathbf{AW})^{k+1}\mathbf{\Upsilon}_1$, з виразу (3.80) випливає (3.76).

(ii) Застосування визначникового зображення (2.126) W-зваженої матриці Дразіна $\mathbf{A}^{d,W}$ у виразі (3.78) дає

$$a_{ij}^{\dagger,d,W} = \sum_{t=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{w}_{.t}^{(2)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left((\mathbf{AW})_{.t}^{k+2} \left(\widetilde{\mathbf{v}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}} \left| (\mathbf{AW})^{k+2} \right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{3.81}$$

де $\mathbf{w}_{.t}^{(2)}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{W}_2 = \mathbf{A}^*\mathbf{AWV}^k = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{AW}\right)^{k+1} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ і $\widetilde{\mathbf{v}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{V}} = (\mathbf{AW})^{k+1}$. Побудуємо матрицю $\mathbf{\Upsilon}_2 = (\upsilon_{tj}^{(2)})$, where

$$\upsilon_{tj}^{(2)} := \sum_{\beta\in J_{r_1,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left((\mathbf{AW})_{.t}^{k+2} \left(\widetilde{\mathbf{v}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}.$$

Тоді з виразу (3.81) випливає (3.77).

□

Теореми 3.21 і 3.22 дають визначникові зображення W-зважених *DMP* та *MPD*-обернених над тілом кватерніонів. Для кращого їх розуміння, дамо покроковий алгоритм знаходження однієї з них, наприклад, *WDMP*-оберненої з Теореми 3.21 випадку (i). Аналогічно, з умов Теорем 3.21 і 3.22, можна записати алгоритми знаходження інших визначникових зображень.

Алгоритм 3.1. *1. Прямим множенням обчислюємо матрицю* $\check{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^k(\mathbf{U}^{2k+1})^*$.

2. *Знаходимо* ϕ_{iq} *за формулою (3.70) для всіх* $i, q = 1, \dots, n$ *і будуємо матрицю* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq})$.
3. *Обчислюємо матрицю* $\widehat{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{WA\Phi U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^*$.
4. *За формулою (4.72), знаходимо* $\omega_{is}^{(1)}$ *для всіх* $i, s = 1, \dots, n$ *і будуємо матрицю* $\mathbf{\Omega}_1 = (\omega_{is}^{(1)})$.
5. *Обчислюємо матрицю* $\widetilde{\mathbf{\Omega}}_1 := \mathbf{\Omega}_1\left(\mathbf{W\Omega}_1\right)^{k+1}\mathbf{A}^*$.
6. *Знаходимо* $a_{ij}^{d,\dagger,W}$ *за формулою (3.68) для всіх* $i = 1, \dots, m$ *та* $j = 1, \dots, n$.

3.6.3. Визначникові зображення W-зважених *DMP* та *MPD*- обернених для комплексних матриць.

Теорема 3.23. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}_r$, $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *– ненульова матриця з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$ *та* $\mathrm{rank}(\mathbf{WA})^k = \mathrm{rank}\,\mathbf{U}^k = r_1$. *Тоді WDMP-обернена* $\mathbf{A}^{d,\dagger,W} = \left(a^{d,\dagger,W}_{ij}\right)$ *має визначникове зображення*

$$a^{d,\dagger,W}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|(\mathbf{AA}^*)_{j.}(\widetilde{\omega}_{i.})\right|^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{3.82}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{WAA}^*$. *Матриця* $\mathbf{\Omega} = (\omega_{is})$ *є така, що*

$$\omega_{is} := \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}_{s.}(\widehat{\mathbf{u}}_{i.})\right|^{\alpha}_{\alpha},$$

де $\widehat{\mathbf{u}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widehat{\mathbf{U}} = (\mathbf{WA})^{k+1}$.

Доведення. За Означенням 3.10 *WDMP*-оберненої, маємо

$$a^{d,\dagger,W}_{ij} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\sum_{f=1}^{m} w_{it} a^{d,W}_{ts} w_{sf} p^{A}_{fj},$$

де $\mathbf{A}^{d,W} = (a^{d,W}_{ts}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ та $\mathbf{P}_A = (p^A_{fj}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Застосування визначникових зображень (2.130) і (2.33) для W-зваженої матриці Дразіна $\mathbf{A}^{d,W}$ та проективної матриці $\mathbf{P}_A$ дає

$$a^{d,\dagger,W}_{ij} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}_{s.}(\widehat{\mathbf{u}}_{i.})\right|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|(\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{w}^{(2)}_{s.})\right|^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{3.83}$$

де $\widehat{\mathbf{u}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\widehat{\mathbf{U}} := (\mathbf{WA})^{k+1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ і $\mathbf{w}^{(2)}_{s.}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{W}_2 = \mathbf{WAA}^*$. Позначимо

$$\omega_{is} := \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}_{s.}(\widehat{\mathbf{u}}_{i.})\right|^{\alpha}_{\alpha}$$

і побудуємо матрицю $\mathbf{\Omega} = (\omega_{is})$. Оскільки

$$\sum_{s=1}^{n} \omega_{is} \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|(\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{w}^{(2)}_{s.})\right|^{\alpha}_{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|(\mathbf{AA}^*)_{j.}(\widetilde{\omega}_{i.})\right|^{\alpha}_{\alpha},$$

де $\widetilde{\omega}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{W}_2 = \mathbf{\Omega}\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^*$, то з (3.83) випливає (3.82).

□

Для комплексної *WMPD*-оберненої маємо аналогічно.

Теорема 3.24. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *– ненульові матриці з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$ *та* $\mathrm{rank}(\mathbf{AW})^k = \mathrm{rank}\,\mathbf{V}^k = r_1$. *Тоді її WMPD-обернена* $\mathbf{A}^{\dagger,d,W} = \left(a_{ij}^{\dagger,d,W}\right)$ *має визначникове зображення*

$$a_{ij}^{\dagger,d,W} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}\right)\right|_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta \left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}} \left|(\mathbf{AW})^{k+2}\right|_\beta^\beta\right)^2}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{\Upsilon}$. *Матриця* $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{sj})$ *задається як*

$$\upsilon_{sj} = \sum_{\beta\in J_{r_1,m}\{s\}} \left|(\mathbf{AW})_{.s}^{k+2}\left(\widetilde{\mathbf{v}}_{.j}\right)\right|_\beta^\beta,$$

де $\widetilde{\mathbf{v}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{V}} = (\mathbf{AW})^{k+1}$.

3.7. Кватерніонова зважена *CMP*-обернена матриця та її визначникові зображення.

Нещодавно Мосіч [182] ввела поняття *CMP*-зваженої оберненої для комплексної прямокутної матриці, яке можна узагальнити на множину кватерніонових матриць без будь-яких змін.

3.7.1. Кватерніонова зважена *CMP*-обернена. Аналогічно як в [182, Теорема 2.1], має місце

Лема 3.9. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *буде ненульовою матрицею. Система рівнянь*

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AX} = \mathbf{AWA}^{d,W}\mathbf{WAA}^\dagger,\ \mathit{and}\ \mathbf{XA} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{AWA}^{d,W}\mathbf{WA}.$$

має єдиний розв'язок, який може бути виражений як $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{AWA}^{d,W}\mathbf{WAA}^\dagger$.

Означення 3.12. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *буде ненульовою матрицею. CMP-зважена обернена (WCMP) для матриці* $\mathbf{A}$ *стосовно ваги* $\mathbf{W}$ *визначається як*

$$\mathbf{A}^{c,\dagger,W} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^{d,W}\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}. \tag{3.84}$$

3.7.2. Визначникові зображення кватерніонової зваженої *CMP* -оберненої.

Теорема 3.25. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *буде ненульовою матрицею з* $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{WA}), \operatorname{Ind}(\mathbf{AW})\}$. *Тоді визначникові зображення CMP-зваженої оберненої* $\mathbf{A}^{c,\dagger,W} = \left(a_{ij}^{c,\dagger,W}\right)$ *мають наступний вираз.*

(i) Якщо $\operatorname{rank}(\mathbf{WA})^k = \operatorname{rank}\mathbf{U}^k = r_1$, *тоді*

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\right)^2 \left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2}, \tag{3.85}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}$ – i*–й рядок матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{WA})^{k+1}\mathbf{A}^*$. *Матриця* $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{iz})$ *є така, що*

$$\omega_{iz} = \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\boldsymbol{\phi}_{.z}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}. \tag{3.86}$$

Тут $\boldsymbol{\phi}_{.z}^{(1)}$ – z*–й стовпець матриці* $\boldsymbol{\Phi}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{W}\widehat{\boldsymbol{\Phi}} = (\widehat{\phi}_{tz})$ *і*

$$\widehat{\phi}_{tz} := \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{z\}} \operatorname{rdet}_z\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{z.}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}, \tag{3.87}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{t.}$ – t*-й рядок матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} := \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^* \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *а матриця* $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{lq}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *задається як*

$$\phi_{lq} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{q\}} \operatorname{rdet}_q\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{q.}(\check{\mathbf{u}}_{l.})\right)_{\alpha}^{\alpha}. \tag{3.88}$$

Тут $\check{\mathbf{u}}_{l.}$ – l*-й рядок матриці* $\mathbf{U}^k(\mathbf{U}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}(\mathbf{AW})^k = \operatorname{rank}\mathbf{V}^k = r_1$, *тоді*

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2 \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}} \left|(\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} \tag{3.89}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*(\mathbf{AW})^{k+1}\boldsymbol{\Upsilon}$*. Матриця* $\boldsymbol{\Upsilon} = (\upsilon_{zj})$ *задається як*

$$\upsilon_{zj} = \sum_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\boldsymbol{\psi}^{(1)}_{z.})\Big)^{\alpha}_{\alpha},$$

де $\boldsymbol{\psi}^{(1)}_{z.}$ *–* z*-й рядок матриці* $\boldsymbol{\Psi}^{(1)} = \widehat{\boldsymbol{\Psi}}\mathbf{WAA}^*$*. Тут* $\widehat{\boldsymbol{\Psi}} = (\widehat{\psi}_{zs})$ *є такою, що*

$$\widehat{\psi}_{zs} := \sum_{\beta \in J_{r_1,\, m}\{z\}} \mathrm{cdet}_z\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\ z}\left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.\ s}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.\ s}$ *–* s*-й стовпець матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} := (\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{2k}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$*, а матриця* $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{lt}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *визначається як*

$$\psi_{lt} = \sum_{\beta \in J_{r_1,m}\{l\}} \mathrm{cdet}_l\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\ l}(\hat{\mathbf{v}}_{.\ t})\right)^{\beta}_{\beta}.$$

Тут $\hat{\mathbf{v}}_{.\ t}$ *–* t*-й стовпець матриці* $(\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^k =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m\times m}$*.*

Доведення. Враховуючи представлення (3.84), маємо

$$a^{c,\dagger,W}_{ij} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\sum_{f=1}^{m} q^A_{il} w_{lt} a^{d,W}_{ts} w_{sf} p^A_{fj}, \tag{3.90}$$

де $\mathbf{Q}_A = (q^A_{il}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ і $\mathbf{P}_A = (p^A_{fj}) \in \mathbb{H}^{m\times m}$ – проективні матриці, $\mathbf{A}^{d,W} = (a^{d,W}_{ts}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$– зважена матриця Дразіна.

(i) Позначимо $\mathbf{W}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{AW} = (w^{(1)}_{it})$ і $\mathbf{W}_2 := \mathbf{WAA}^* = (w^{(2)}_{sj})$. Застосовуючи визначникові зображення (2.14) і (2.16) для матриць $\mathbf{Q}_A$ and $\mathbf{P}_A$, відповідно, одержимо

$$\sum_{l=1}^{n} q^A_{il} w_{lt} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\ i}(\dot{\mathbf{a}}_{.\ l})\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta}} w_{lt} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\ i}\left(\mathbf{w}^{(1)}_{.\ t}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta}}, \tag{3.91}$$

$$\sum_{f=1}^{m} w_{sf} p_{fj}^{A} = \sum_{f=1}^{m} w_{sf} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{f.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(2)})\Big)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{3.92}$$

Підставивши (3.91) і (3.92) у вираз (3.90), позначивши $\mathbf{W}_3 = (\mathbf{W}\mathbf{A})^{k+1}\mathbf{A}^*$ та застосувавши (2.98) для визначникового зображення $\mathbf{A}^{d,W}$, одержимо

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{z=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,n}\{z\}} \mathrm{rdet}_z\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{z.}(\widetilde{\phi}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right) u_{zs}^{(k)}}{\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(2)})\Big)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{t=1}^{m}\sum_{z=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,n}\{z\}} \mathrm{rdet}_z\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{z.}(\widetilde{\phi}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{z.}^{(3)})\Big)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{3.93}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{t.}$ – t-й рядок матриці $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} := \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^* \in \mathbb{H}^{m\times n}$, а матриця $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{lq}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ є такою, що

$$\phi_{lq} = \sum_{\alpha \in I_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{rdet}_q\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{q.}(\check{\mathbf{u}}_{l.})\right)_{\alpha}^{\alpha}.$$

Тут $\check{\mathbf{u}}_{l.}$ is the l-th row of $\mathbf{U}^k(\mathbf{U}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. Позначимо

$$\widehat{\phi}_{tz} := \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{z\}} \mathrm{rdet}_z\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\right)_{z.}(\widetilde{\phi}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}$$

і побудуємо матрицю $\widehat{\mathbf{\Phi}} = (\widehat{\phi}_{tz})$. Нехай

$$\omega_{iz} = \sum_{t=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\widehat{\phi}_{tz} = \\ = \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\boldsymbol{\phi}_{.\,z}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\boldsymbol{\phi}_{.\,z}^{(1)}$ – z-й стовпець матриці $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{W}_1\widehat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{W}\widehat{\mathbf{\Phi}}$ і побудуємо матрицю $\mathbf{\Omega} = (\omega_{iz})$. Враховуючи, що $\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha} = \sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}$, і

$$\sum_{z=1}^{n}\omega_{iz}\sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{z.}^{(3)})\right)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}))_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{W}_3 = \mathbf{\Omega}(\mathbf{W}\mathbf{A})^{k+1}\mathbf{A}^*$, з (3.93) слідує (3.85).

(ii) Застосувавши визначникове зображення (2.99) для $\mathbf{A}^{d,W}$, для проективних матриць $\mathbf{Q}_A$ та $\mathbf{P}_A$ визначникові зображення ті ж як і вище, одержимо

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}}\times \\ \frac{\sum\limits_{z=1}^{m} v_{tz}^{(k)}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}\{z\}} \mathrm{cdet}_z\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,z}\left(\widetilde{\psi}_{.\,s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2}\times \\ \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(2)})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$
= \sum_{z=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{w}^{(3)}_{.\,z} \right) \right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta}} \times
$$

$$
\frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{z\}} \operatorname{cdet}_z \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1} \right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right)_{.\,z} \left(\widetilde{\psi}_{.\,s} \right) \right)^{\beta}_{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,m}} \left| \left(\mathbf{V}^{2k+1} \right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right|^{\beta}_{\beta} \right)^2} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \Big((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{w}^{(2)}_{s\,.}) \Big)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|^{\alpha}_{\alpha}}
\tag{3.94}
$$

де $\mathbf{w}^{(3)}_{.\,z}$ – z-й стовпець матриці $\mathbf{W}_3 := \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1}$ і $\mathbf{w}^{(2)}_{s.}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{W}_2 := \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^* = (w^{(2)}_{sj})$. Позначимо

$$
\widehat{\psi}_{zs} := \sum_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{z\}} \operatorname{cdet}_z \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1} \right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right)_{.\,z} \left(\widetilde{\psi}_{.\,s} \right) \right)^{\beta}_{\beta}
$$

і побудуємо матрицю $\widehat{\mathbf{\Psi}} = (\widehat{\psi}_{zs})$. Тоді введемо

$$
\upsilon_{zj} = \sum_{s=1}^{n} \widehat{\psi}_{zs} \sum_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \Big((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\mathbf{w}^{(2)}_{s.}) \Big)^{\alpha}_{\alpha} = \sum_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \Big((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.} (\boldsymbol{\psi}^{(1)}_{z.}) \Big)^{\alpha}_{\alpha},
$$

де $\boldsymbol{\psi}^{(1)}_{z.}$ – z-й рядок матриці $\mathbf{\Psi}^{(1)} = \widehat{\mathbf{\Psi}}\mathbf{W}_2 = \widehat{\mathbf{\Psi}}\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ і побудуємо матрицю $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{zj})$. Враховуючи те, що

$$
\sum_{z=1}^{n} \sum_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{w}^{(3)}_{.z} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \upsilon_{zj} = \sum_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta},
$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{W}_3\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+1}\mathbf{\Upsilon}$, кінцево, з (3.94) випливає (3.89). □

Простіші вирази визначникових зображень *WCMP*-оберненої можуть бути отримані у випадках, що мають ермітовість.

Теорема 3.26. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *– ненульова матриця з* $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{W}\mathbf{A}), \operatorname{Ind}(\mathbf{A}\mathbf{W})\}$. *Тоді її WCMP-обернена* $\mathbf{A}^{c,\dagger,W} = \left(a^{c,\dagger,W}_{ij} \right)$ *має наступні визначникові зображення*

(i) *Якщо матриця* $\mathbf{WA}$ – *ермітова і* $\mathrm{rank}(\mathbf{WA})^k = r_1$, *тоді*

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\right)^2 \sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,n}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|_{\alpha}^{\alpha}} \tag{3.95}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}$ – i*-й рядок матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{WAA}^*$. *Матриця* $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{is})$ *покомпонентно визначається як*

$$\omega_{is} = \sum_{\alpha \in I_{r_1,n}\{s\}} \mathrm{rdet}_s \left((\mathbf{WA})_{s.}^{k+2}(\boldsymbol{\phi}_{i.}^{(1)})\right)_{\alpha}^{\alpha}.$$

Тут $\boldsymbol{\phi}_{i.}^{(1)}$ – i*-й рядок матриці* $\boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{A}\,(\mathbf{WA})^k$ *і матриця* $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{it})$ *є такою, що*

$$\phi_{it} := \sum_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}$ – t*-й стовпець матриці* $\mathbf{W}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{AW}$.

(ii) *Якщо* $\mathbf{AW}$ – *ермітова і* $\mathrm{rank}(\mathbf{AW})^k = r_1$, *тоді*

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2 \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,m}} \left|(\mathbf{AW})^{k+2}\right|_{\beta}^{\beta}} \tag{3.96}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{AW}\boldsymbol{\Upsilon}$. *Матриця* $\boldsymbol{\Upsilon} = (\upsilon_{tj})$ *задається як*

$$\upsilon_{tj} = \sum_{\beta \in J_{r_1,m}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left((\mathbf{AW})_{.\,t}^{k+2}\left(\boldsymbol{\psi}_{.j}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\boldsymbol{\psi}_{.j}^{(1)}$ – j*-й стовпець матриці* $\boldsymbol{\Psi}^{(1)} = (\mathbf{AW})^k\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}$. *Тут матриця* $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{sj})$ *є такою, що*

$$\psi_{sj} := \sum_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(2)})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\mathbf{w}_{s.}^{(2)}$ – s*-й рядок матриці* $\mathbf{W}_2 = \mathbf{WAA}^* = (w_{sj}^{(2)})$.

Доведення. (i) Враховуючи (3.84) і застосовуючи визначникові зображення (2.14) і (2.16) для проективних матриць $\mathbf{Q}_A$ і $\mathbf{P}_A$, відповідно, та (2.128) для $\mathbf{A}^{d,W}$, маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger,W}=\sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}}\times$$
$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}}\operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{WA}\right)_{s.}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{u}}_{t.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}}\left|\left(\mathbf{WA}\right)^{k+2}\right|_{\alpha}^{\alpha}}\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{AA}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{w}_{s.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}}\left|\mathbf{AA}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},\qquad(3.97)$$

де $\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{W}_1=\mathbf{A}^*\mathbf{AW}$, $\bar{\mathbf{u}}_{t.}$ – t-й рядок матриці $\bar{\mathbf{U}}=\mathbf{A}(\mathbf{WA})^k$ та $\mathbf{w}_{s.}^{(2)}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{W}_2=\mathbf{WAA}^*$. Позначимо

$$\phi_{it}:=\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

і побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi}=(\phi_{it})$. Нехай

$$\omega_{is}=\sum_{t=1}^{n}\phi_{it}\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}}\operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{WA}\right)_{s.}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{u}}_{t.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}=$$
$$=\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}}\operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{WA}\right)_{s.}^{k+2}\left(\boldsymbol{\phi}_{i.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\boldsymbol{\phi}_{i.}^{(1)}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{\Phi}_1=\mathbf{\Phi A}\left(\mathbf{WA}\right)^k$, і побудуємо матрицю $\mathbf{\Omega}=(\omega_{is})$. Враховуючи, що $\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}}\left|\mathbf{AA}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}=\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}$, і

$$\sum_{s=1}^{n}\omega_{is}\sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{AA}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{w}_{s.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}=\sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{AA}^*\right)_{j.}\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}}=\mathbf{\Omega W}_2=\mathbf{\Omega WAA}^*$, з (3.97) випливає (3.95).

(ii) Застосувавши визначникові зображення (2.128) для матриці $\mathbf{A}^{d,W}$ і ті самі, що й вище для $\mathbf{Q}_A$ і $\mathbf{P}_A$, маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger,W}=\sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}}\times$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}}\operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{AW}\right)_{.\,t}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.\,s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}}\left|\left(\mathbf{AW}\right)^{k+2}\right|_{\beta}^{\beta}}\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\Big(\left(\mathbf{AA}^*\right)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(2)})\Big)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}}\left|\mathbf{AA}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},\quad(3.98)$$

де $\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{W}_1:=\mathbf{A}^*\mathbf{AW}$, $\bar{\mathbf{v}}_{.\,s}$ – s-й стовпець матриці $\bar{\mathbf{V}}=(\mathbf{AW})^k\mathbf{A}$ та $\mathbf{w}_{s.}^{(2)}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{W}_2:=\mathbf{WAA}^*$. Позначимо

$$\psi_{sj}:=\sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\Big(\left(\mathbf{AA}^*\right)_{j.}(\mathbf{w}_{s.}^{(2)})\Big)_{\alpha}^{\alpha}$$

і побудуємо матрицю $\mathbf{\Psi}=(\psi_{sj})$. Нехай

$$\begin{aligned}\upsilon_{tj}=&\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}}\operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{AW}\right)_{.t}^{k+2}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\psi_{sj}=\\ =&\sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}}\operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{AW}\right)_{.t}^{k+2}\left(\boldsymbol{\psi}_{.j}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta},\end{aligned}$$

де $\boldsymbol{\psi}_{.j}^{(1)}$ – j-й стовпець $\mathbf{\Psi}^{(1)}=(\mathbf{AW})^k\mathbf{A\Psi}$ і побудуємо матрицю $\mathbf{\Upsilon}=(\upsilon_{tj})$. Враховуючи

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{w}_{.t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\upsilon_{tj}=\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}}=\mathbf{A}^*\mathbf{AW\Upsilon}$, з виразу (3.98) слідує (3.96). □

Теореми 3.25 і 3.27 дають визначникові зображення *WCMP*-оберненоъ над тілом кватерніонів. Для кращого їх розуміння, дамо покроковий алгоритм знаходження однієї з них, наприклад, випадку (i) з Теореми 3.25. Аналогічно, з умов Теорем, можна записати алгоритми знаходження інших визначникових зображень.

Алгоритм 3.2. *1. Обчислюємо матрицю* $\check{\mathbf{U}}=\mathbf{U}^k(\mathbf{U}^{2k+1})^*$.

2. *Знаходимо* ϕ_{lq} *за формулою (4.57) для всіх* $l = 1, \dots, n$ *і* $q = 1, \dots, n$ *і будуємо матрицю* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{lq})$.
3. *Обчислюємо матрицю* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{A\Phi U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^*$.
4. *Знаходимо* $\widehat{\phi}_{tz}$ *за формулою (3.87) для всіх* $t = 1, \dots, m$ *і* $z = 1, \dots, n$ *і будуємо матрицю* $\widehat{\mathbf{\Phi}} = (\widehat{\phi}_{tz})$.
5. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{AW}\widehat{\mathbf{\Phi}}$.
6. *За формулою (4.73) знаходимо* ω_{iz} *для всіх* $i = 1, \dots, m$ *і* $z = 1, \dots, n$ *і будуємо матрицю* $\mathbf{\Omega} = (\omega_{iz})$.
7. *Нарешті, знайдимо* $a_{ij}^{c,\dagger,W}$ *за формулою (3.85) для всіх all* $i = 1, \dots, m$ *і* $j = 1, \dots, n$.

3.7.3. Визначникові зображення зваженої *CMP* -оберненої для комплексних матриць.

Теорема 3.27. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *і* $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *– ненульова матриця з* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}), \mathrm{Ind}(\mathbf{AW})\}$. *Тоді її WCMP-обернена* $\mathbf{A}^{c,\dagger,W} = \left(a_{ij}^{c,\dagger,W}\right)$ *має наступні визначникові зображення*

(i) Якщо $\mathrm{rank}(\mathbf{WA})^k = r_1$, *тоді*

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|(\mathbf{AA}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i\,.})\right|_\alpha^\alpha}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta\right)^2 \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|_\alpha^\alpha} \tag{3.99}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i\,.}$ *– i-й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega WAA}^*$. *Матриця* $\mathbf{\Omega} = (\omega_{is})$ *покомпонентно визначаєтьс як*

$$\omega_{is} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \left|(\mathbf{WA})_{s.}^{k+2}(\boldsymbol{\phi}_{i.}^{(1)})\right|_\alpha^\alpha.$$

Тут $\boldsymbol{\phi}_{i.}^{(1)}$ *– i-й рядок* $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi A}\,(\mathbf{WA})^k$, *а матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{it})$ *є такою, що*

$$\phi_{it} := \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}\right)\right|_\beta^\beta,$$

де $\mathbf{w}_{.\,t}^{(1)}$ *– t-й стовпець матриці* $\mathbf{W}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{AW}$.

(ii) Якщо $\mathbf{AW}$ *– ермітова і* $\operatorname{rank}(\mathbf{AW})^k = r_1$*, тоді*

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}\right)\right|_\beta^\beta}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha\right)^2 \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}} \left|(\mathbf{AW})^{k+2}\right|_\beta^\beta} \tag{3.100}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.\,j}$ *–* j*-й стовпець* $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{AW}\boldsymbol{\Upsilon}$*. Матриця* $\boldsymbol{\Upsilon} = (\upsilon_{tj})$ *задається як*

$$\upsilon_{tj} = \sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}} \left|(\mathbf{AW})^{k+2}_{.\,t}\left(\boldsymbol{\psi}^{(1)}_{.j}\right)\right|_\beta^\beta,$$

де $\boldsymbol{\psi}^{(1)}_{.\,j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\boldsymbol{\Psi}^{(1)} = (\mathbf{AW})^k\mathbf{A}\boldsymbol{\Psi}$*. Тут матриця* $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{sj})$ *є такою, що*

$$\psi_{sj} := \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|(\mathbf{AA}^*)_{j.}(\mathbf{w}^{(2)}_{s\,.})\right|_\alpha^\alpha,$$

де $\mathbf{w}^{(2)}_{s.}$ *–* s*-й рядок матриці* $\mathbf{W}_2 = \mathbf{WAA}^* = (w^{(2)}_{sj})$*.*

Доведення. (i) Враховуючи (3.84) і застосовуючи визначникові зображення (2.31) і (2.33) для матриць $\mathbf{Q}_A$ і $\mathbf{P}_A$, відповідно, та (2.128) для $\mathbf{A}^{d,W}$, маємо

$$a_{ij}^{c,\dagger,W} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}^{(1)}_{.\,t}\right)\right|_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta} \times$$
$$\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}_{s\,.}(\bar{\mathbf{u}}_{t.})\right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|_\alpha^\alpha} \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \left|(\mathbf{AA}^*)_{j\,.}(\mathbf{w}^{(2)}_{s\,.})\right|_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{AA}^*|_\alpha^\alpha}, \tag{3.101}$$

де $\mathbf{w}^{(1)}_{.\,t}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{W}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{AW}$, $\bar{\mathbf{u}}_{t\,.}$ – t-й рядок матриці $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{A}(\mathbf{WA})^k$ та $\mathbf{w}^{(2)}_{s.}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{W}_2 = \mathbf{WAA}^*$. Позначимо

$$\phi_{it} := \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}^{(1)}_{.t}\right)\right|_\beta^\beta$$

і побудуємо матрицю $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{it})$. Нехай

$$\omega_{is} = \sum_{t=1}^{n} \phi_{it} \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}_{s\,.}(\bar{\mathbf{u}}_{t\,.})\right|_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{s\}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}_{s\,.}(\boldsymbol{\phi}^{(1)}_{i\,.})\right|_\alpha^\alpha,$$

де $\boldsymbol{\phi}^{(1)}_{i\,.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}\mathbf{A}\left(\mathbf{W}\mathbf{A}\right)^k$, і побудуємо матрицю $\mathbf{\Omega} = (\omega_{is})$. Враховуючи, що $\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|^{\alpha}_{\alpha} = \sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta}$, і

$$\sum_{s=1}^{n}\omega_{is}\sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j\,.}(\mathbf{w}^{(2)}_{s\,.})\right|^{\alpha}_{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j\,.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i\,.})|^{\alpha}_{\alpha},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{W}_2 = \mathbf{\Omega}\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^*$, з (3.101) випливає (3.99).

(ii) Застосувавши визначникові зображення (2.128) для матриці $\mathbf{A}^{d,W}$ і ті самі, що й вище для $\mathbf{Q}_A$ і $\mathbf{P}_A$, маємо

$$a^{c,\dagger,W}_{ij} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}^{(1)}_{.\,t}\right)\right|^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta}}\times$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+2}_{.\,t}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.\,s}\right)\right|^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+2}\right|^{\beta}_{\beta}}\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j\,.}(\mathbf{w}^{(2)}_{s\,.})\right|^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}}|\mathbf{A}\mathbf{A}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \qquad (3.102)$$

де $\mathbf{w}^{(1)}_{.\,t}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{W}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{W}$, $\bar{\mathbf{v}}_{.\,s}$ – s-й стовпець $\bar{\mathbf{V}} = (\mathbf{A}\mathbf{W})^k\mathbf{A}$ та $\mathbf{w}^{(2)}_{s.}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{W}_2 := \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^*$. Позначимо

$$\psi_{sj} := \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{w}^{(2)}_{s.})\right|^{\alpha}_{\alpha}$$

і побудуємо матрицю $\mathbf{\Psi} = (\psi_{sj})$. Нехай

$$\upsilon_{tj} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+2}_{.\,t}\left(\bar{\mathbf{v}}_{.\,s}\right)\right|^{\beta}_{\beta}\psi_{sj} = \sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{W})^{k+2}_{.\,t}\left(\boldsymbol{\psi}^{(1)}_{.\,j}\right)\right|^{\beta}_{\beta},$$

де $\boldsymbol{\psi}^{(1)}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{\Psi}^{(1)} = (\mathbf{A}\mathbf{W})^k\mathbf{A}\mathbf{\Psi}$, і побудуємо матрицю $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{tj})$. Враховуючи

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{w}^{(1)}_{.t}\right)\right|^{\beta}_{\beta}\upsilon_{tj} = \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.\,j}\right)|^{\beta}_{\beta},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{\Upsilon}$, з виразу (3.102) слідує (3.100). $\square$

3.8. Приклади визначникового зображення серцевинної оберненої та її узагальнень над тілом кватерніонів.

1. Нехай задано матрицю $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & -\mathbf{j} \\ 0 & \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}$. Оскільки, $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ \mathbf{k} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, то (визначниковий) $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$. Аналогічно,

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{j} & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 1-\mathbf{j} & 0 \\ -\mathbf{k} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^2\left(\mathbf{A}^2\right)^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2\mathbf{i} \\ 0 & 2 & 0 \\ -2\mathbf{i} & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

і $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^2) = 2$. Отже, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$ і будемо шукати її праву $\mathbf{A}^{\oplus}$ та ліву серцевинні обернені $\mathbf{A}_{\oplus}$ за формулами (3.14) та (3.15), відповідно. Оскільки

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2)^* = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i}+\mathbf{k} & 0 \\ -2\mathbf{k} & 0 & -2\mathbf{j} \\ 0 & -1+\mathbf{j} & 0 \end{bmatrix},$$

то за формулою (3.14)

$$a_{11}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{2,3}\{1\}} \operatorname{rdet}_1\left(\left(\mathbf{A}^2\left(\mathbf{A}^2\right)^*\right)_{1.}(\hat{\mathbf{a}}_{1.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{2,3}} \left|\mathbf{A}^2\left(\mathbf{A}^2\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$\frac{1}{8}\left(\operatorname{rdet}_1\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i}+\mathbf{k} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \operatorname{rdet}_1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\mathbf{i} & 2 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Продовжуючи, аналогічно, одержимо

$$\mathbf{A}^{\oplus} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5\mathbf{i}+0.5\mathbf{k} & 0 \\ -0.5\mathbf{k} & 0 & -0.5\mathbf{j} \\ 0 & -0.5+0.5\mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}.$$

Так само, за формулою (3.15), можемо знайти

$$\mathbf{A}_{\oplus} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5\mathbf{i} & 0 \\ 0.5\mathbf{i}-0.5\mathbf{k} & 0 & 0.5-0.5\mathbf{j} \\ 0 & 0.5\mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Нехай задано матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} & 0 \\ \mathbf{k} & 1 & \mathbf{i} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathbf{k} & -\mathbf{j} \end{bmatrix}, \ \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{j} & \mathbf{k} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

Оскільки,

$$\mathbf{V} = \mathbf{AW} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & -\mathbf{j} & 0 & \mathbf{i} \\ -1-\mathbf{j} & \mathbf{i}+\mathbf{k} & \mathbf{j} & 1+\mathbf{j} \\ \mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{i}+\mathbf{k} & 1-\mathbf{j} & \mathbf{i} & \mathbf{i}-\mathbf{k} \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \mathbf{WA} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2\mathbf{k} & -2\mathbf{j} \\ 2\mathbf{k} & 3 & 2\mathbf{i} \\ 2\mathbf{j} & -2\mathbf{i} & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} & 0 & -\mathbf{j} \\ -\mathbf{i} & 3 & \mathbf{k} & 3\mathbf{k} \\ 0 & -\mathbf{k} & 1 & 1 \\ \mathbf{j} & -3\mathbf{k} & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

і $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 3$, $\operatorname{rank}\mathbf{W} = 3$, $\operatorname{rank}\mathbf{V} = 3$, $\operatorname{rank}\mathbf{V}^3 = \operatorname{rank}\mathbf{V}^2 = 2$, $\operatorname{rank}\mathbf{U}^2 = \operatorname{rank}\mathbf{U} = 2$, то $\operatorname{Ind}\mathbf{V} = 2$, $\operatorname{Ind}\mathbf{U} = 1$, і $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{AW}), \operatorname{Ind}(\mathbf{WA})\} = 2$.

Будемо шукати *WDMP*-обернену до матриці $\mathbf{A}$ за Алгоритмом 3.1.

1. Обчислимо матрицю $\check{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^2(\mathbf{U}^5)^*$. Маємо

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{i}+\mathbf{k} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U}^5 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 2+3\mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \operatorname{rank}\mathbf{U}^2 = 2,$$

$$\check{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^2(\mathbf{U}^5)^* = \begin{bmatrix} 6\mathbf{i}-\mathbf{k} & 1+\mathbf{j} & 0 \\ -2+3\mathbf{j} & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. За формулою (3.70) знаходимо ϕ_{iq} для всіх $i, q = 1, 2, 3$. Отже,

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & -2-\mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Обчислимо,

$$\widehat{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{U}^4(\mathbf{U}^5)^* = \begin{bmatrix} 6\mathbf{i}-\mathbf{k} & 1+\mathbf{j} & 0 \\ -2+3\mathbf{j} & \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. За формулою (4.72) знаходимо $\omega_{is}^{(1)}$ для всіх $i, s = 1,2,3$. Маємо $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Phi}$.

5. Обчислимо матрицю

$$\widetilde{\mathbf{\Omega}}_1 := \mathbf{\Omega}_1\mathbf{U}^3\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{k} & 1 & 1 \\ -\mathbf{i} & 1 & 0 & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Нарешті, знаходимо $a_{ij}^{d,\dagger,W}$ за формулою (3.68) для всіх $i = 1,\dots,4$ і $j = 1,2,3$. Отже,

$$a_{11}^{d,\dagger,W} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{3,4}\{1\}} \operatorname{rdet}_1((\mathbf{AA}^*)_{1.}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{1.}))_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in I_{3,4}} |\mathbf{AA}^*|_\alpha^\alpha \left(\sum\limits_{\alpha\in I_{2,3}} |\mathbf{U}^5\,(\mathbf{U}^5)^*|_\alpha^\alpha\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{rdet}_1\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{k} & 1 \\ -\mathbf{i} & 3 & \mathbf{k} \\ 0 & -\mathbf{k} & 1 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{rdet}_1\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{j} & -3\mathbf{k} & 3 \end{bmatrix} + \operatorname{rdet}_1\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{k} & 1 \\ -\mathbf{i} & 3 & 3\mathbf{k} \\ \mathbf{j} & -3\mathbf{k} & 3 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$\mathbf{A}^{d,\dagger,W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.9. Висновки до розділу

У цьому розділі вводяться поняття, вивчається характеризації, та отримуються визначникові зображення для серцевинної оберненої матриці та її узагальнень. При цьому:

1. Доведені теореми про характеризацію лівої W-зваженої EP-серцевинної оберненої матриці, зваженої MPD-оберненої матриці.
2. У рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників отримано визначникові зображення кватерніонових правої та лівої серцевинних обернених, правої та лівої EP-серцевинних обернених, DMP- та MPD-обернених, CMP-оберненої, зважених правої та лівої EP-обернених, зважених DMP- та MPD-обернених і зваженої CMP-оберненої.
3. Побудовано нові визначникові зображення комплексних серцевинної оберненої матриці та її узагальнень.

Результати цього розділу опубліковані у роботах [126–130].

РОЗДІЛ 4

Правила Крамера для кватерніонових узагальнених матричних рівнянь типу Сильвестра та їх систем

Узагальнені обернені матриці є важливими інструментами розв'язку матричних рівнянь, оскільки їх розв'язки можна подати у термінах узагальнених обернених матриць. У цьому розділі розглядаються кватерніонові двосторонні матричні рівняння та його часткові випадки, узагальнене кватерніонове матричне рівняння Сильвестра та його часткові і деякі особливі випадки, система кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь, її часткові і деякі особливі випадки. Використовуючи визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза та проективних матриць, які були отримані у другому розділі, будуються аналоги правила Крамера для їх розв'язків.

4.1. Правило Крамера для кватерніонового двостороннього матричного рівняння.

4.1.1. Правило Крамера для кватерніонового двостороннього матричного рівняння та його часткових випадків.

Означення 4.1. *Розглянемо матричне рівняння*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}, \tag{4.1}$$

де матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times s}$ *– задані,* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times s}$ *є невідомою. Введемо множину матриць* $H_R = \{\mathbf{X}|\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times s},\ \min\|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\| = a\}$, *де* $a \geq 0 \in \mathbb{R}$ *і* $\|\mathbf{A}\|$ *– норма Фробеніуса матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. *Матриці* $\mathbf{X} \in H_R$ *називаються нормальними розв'язками рівняння (4.1). Якщо* $\mathbf{X}_{LS} = \min_{\mathbf{X}\in H_R}\|\mathbf{X}\|$, *тоді* $\mathbf{X}_{LS}$ *є нормальними розв'язками рівняння (4.1) з мінімальною нормою.*

Очевидно, коли $a = 0$, то $\mathbf{X} \in H_R$ розв'язком рівняння (4.1), коли $a > 0$, то максимально наближеним псевдорозв'язком.

Теорема 4.1. *[20, 87] Рівняння (4.1) є сумісним тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B} = \mathbf{B}$. *У цьому випадку загальний розв'язок задається як* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B} + \mathbf{L}_A\mathbf{V}$, *де* $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n\times s}$ *– довільна матриця відповідних розмірів. При цьому, нормальним розв'язком з мінімальною нормою є*

$$\mathbf{X}_{LS} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}. \tag{4.2}$$

Якщо виконується умова сумісності рівняння (4.1), тоді (4.2) є його частковим розв'язком.

Теорема 4.2. *Позначимо* $\mathbf{A}^*\mathbf{B} =: \hat{\mathbf{B}} = (\hat{b}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times s}$.

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, *тоді нормальний розв'язок з мінімальною нормою* $\mathbf{X}_{LS} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times s}$ *рівняння (4.1) покомпонентно задається як*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{b}}_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})} \tag{4.3}$$

де $\hat{\mathbf{b}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\hat{\mathbf{B}}$ *для всіх* $j = 1, \ldots, s$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r \le m < n$, *тоді нормальний розв'язок з мінімальною нормою рівняння (4.1) можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{j\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{b}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}}. \tag{4.4}$$

Доведення. (i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, тоді матриця $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ є оборотною і за Наслідком 2.1, $\mathbf{A}^{\dagger} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*$. Подаючи обернену матрицю $\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}$ за визначниковим зображенням (1.10), одержимо

$$x_{ij} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)}\sum_{k=1}^{n} L_{ki}\hat{b}_{kj},$$

де L_{ki} – ліве (ki)-е алгебричне доповнення матриці $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ для всіх $k, i = 1, \ldots, n$. За Лемою 1.4, звідси випливає (4.3).

(ii) Якщо rank$\mathbf{A} = r \leq m < n$, тоді за Теоремою 2.2 подамо узагальнену обернену матрицю Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}$ за формулою (2.7). Звідси, для всіх $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, s$, одержимо

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\dagger} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{a}_{.k}^{*} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \cdot b_{kj} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \sum_{k=1}^{m} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{a}_{.k}^{*} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \cdot b_{kj}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}}$$

Оскільки,

$$\sum_{k} \mathbf{a}_{.\,k}^{*} b_{kj} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k} a_{1k}^{*} b_{kj} \\ \sum\limits_{k} a_{2k}^{*} b_{kj} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k} a_{nk}^{*} b_{kj} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{b}}_{.j},$$

де $\hat{\mathbf{b}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\hat{\mathbf{B}}$, то звідси випливає (4.4). □

Зауваження 4.1. *У випадку, коли* $\mathbf{A}$ *– ермітова, оборотна матриця то розв'язок рівняння (4.1) знайдемо як*

$$x_{ij} = \frac{\mathrm{cdet}_i(\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{b}_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A})}, \tag{4.5}$$

де $\mathbf{b}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{B}$*.*

Означення 4.2. *Розглянемо матричне рівняння*

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \tag{4.6}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^{s \times n}$ *– задані матриці, а матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{s \times m}$ *– невідома. Введемо множину матриць* $H_L = \{\mathbf{X} |\, \mathbf{X} \in \mathbb{H}^{s \times m}, \|\mathbf{XA} - \mathbf{B}\| = \min\}$*. Матриці* $\mathbf{X} \in H_L$ *називаються нормальними розв'язками рівняння (4.6). Якщо* $\mathbf{X}_{LS} = \min_{\mathbf{X} \in H_L} \|\mathbf{X}\|$*, то* $\mathbf{X}_{LS}$ *називається нормальним розв'язком з мінімальною нормою рівняння (4.6).*

Наступна теорема може бути доведена аналогічно до теореми 4.1.

Теорема 4.3. *Рівняння (4.1) є сумісним тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{B}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{B}$. *У цьому випадку загальний розв'язок задається як* $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{\dagger} + \mathbf{W}\mathbf{R}_A$, *де* $\mathbf{W}$ *– довільна матриця відповідних розмірів. При цьому нормальним розв'язком з мінімальною нормою є*

$$\mathbf{X}_{LS} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{\dagger}. \tag{4.7}$$

Якщо виконується умова сумісності рівняння (4.6), тоді (4.7) є його частковим розв'язком.

Теорема 4.4. *Позначимо* $\mathbf{B}\mathbf{A}^{*} =: \check{\mathbf{B}} = (\check{b}_{ij}) \in \mathbb{H}^{s\times m}$.

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, *тоді нормальний розв'язок з мінімальною нормою* $\mathbf{X}_{LS} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{s\times m}$ *рівняння (4.6) покомпонентно задається як*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j.}\left(\check{\mathbf{b}}_{i\,.}\right)}{\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})} \tag{4.8}$$

де $\check{\mathbf{b}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\check{\mathbf{B}}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, s$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r \leq n < m$, *то для* $\mathbf{X}_{LS} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{s\times m}$ *рівняння (4.6) маємо*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{i\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)_{j\,.}\left(\check{\mathbf{b}}_{i\,.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{4.9}$$

Доведення. (i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, тоді матриця $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})$ є оборотною і за Наслідком 2.1, $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}$. Подаючи обернену матрицю $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}$ за формулою (1.10), для всіх $i = 1, \ldots, s$ $j = 1, \ldots, m$, одержимо

$$x_{ij} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)} \sum_{k=1}^{n} \check{b}_{ik} R_{jk},$$

де R_{jk} є (jk)-м правим алгебричним доповненням матриці $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})$ для всіх $j, k = 1, \ldots, m$. Звідси, за Лемою 1.3, одержимо (4.8).

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r \leq n < m$, тоді за Теоремою 2.2 подамо узагальнену обернену матрицю Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}$ за формулою (2.8). Звідси для всіх $i =$

$1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, m$, маємо

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}^{\dagger} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{i\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^* \right)_{j\,.} \left(\mathbf{a}_{k\,.}^* \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,m}} \left| \mathbf{A}\mathbf{A}^* \right|_{\alpha}^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{m} b_{ik} \sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{i\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^* \right)_{j\,.} \left(\mathbf{a}_{k\,.}^* \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,m}} \left| \mathbf{A}\mathbf{A}^* \right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Оскільки, $\sum\limits_{k} b_{ik} \mathbf{a}_{k\,.}^* = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k} b_{ik} a_{k1}^* & \sum\limits_{k} b_{ik} a_{k2}^* & \cdots & \sum\limits_{k} b_{ik} a_{kn}^* \end{bmatrix} = \check{\mathbf{b}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\check{\mathbf{B}}$, то звідси випливає (4.9). □

Зауваження 4.2. *У випадку, коли* $\mathbf{A}$ *– ермітова оборотна матриця, то розв'язок рівняння (4.6) знайдемо як*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{rdet}_j (\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{b}_{i\,.} \right)}{\det(\mathbf{A})}, \tag{4.10}$$

де $\mathbf{b}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\mathbf{B}$*.*

Означення 4.3. *Розглянемо матричне рівняння*

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{D}, \tag{4.11}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^{p\times q}, \mathbf{D} \in \mathbb{H}^{m\times q}$ *– відомі матриці, а матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times p}$ *– невідома. Позначимо* $H_D = \{\mathbf{X} | \, \mathbf{X} \in \mathbb{H}^{s\times m}, \|\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} - \mathbf{D}\| = \min\}$*. Матриці* $\mathbf{X} \in H_D$ *називаються нормальними розв'язками рівняння (4.11). Якщо* $\mathbf{X}_{LS} = \min_{\mathbf{X} \in H_D} \|\mathbf{X}\|$*, тоді матриця* $\mathbf{X}_{LS}$ *називаються нормальним розв'язком рівняння (4.11) з мінімальною нормою.*

Теорема 4.5. *1) [26] Нормальні розв'язки рівняння (4.11) задаються як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{C} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\dagger},$$

де матриця $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{n\times s}$ *є довільною. При цьому нормальним розв'язком з мінімальною нормою є*

$$\mathbf{X}_{LS} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}. \tag{4.12}$$

2) [252] Рівняння (4.11) є сумісним тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{B} = \mathbf{D}$. *У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (4.11) задається як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{L}_A\mathbf{V} + \mathbf{W}\mathbf{R}_B,$$

де $\mathbf{V}$ *і* $\mathbf{W}$ *– довільні матриці відповідних розмірів.*

У випадку виконання умови сумісності, (4.12) є частковим розв'язком рівняння (4.11). Наступна теорема дає правило Крамера для розв'язку (4.12).

Теорема 4.6. *Позначимо* $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$.

(i) Якщо $\mathrm{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\mathrm{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді (нормальний) розв'язок* (4.12), $\mathbf{X} = (x_{ij})$, *має наступні визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)} = \tag{4.13}$$

$$= \frac{\mathrm{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\cdot\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)}, \tag{4.14}$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} := \left[\mathrm{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{1\,.}\right), \ldots, \mathrm{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{n\,.}\right)\right]^T, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} := \left[\mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.1}\right), \ldots, \mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.p}\right)\right] \tag{4.16}$$

є, відповідно, вектор-стовпцем та вектор-рядком, а $\tilde{\mathbf{d}}_{i\,.}$ *та* $\tilde{\mathbf{d}}_{.\,j}$ *є* i*-м рядком і* j*-м стовпцем матриці* $\widetilde{\mathbf{D}}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$ *та* $j = 1, \ldots, p$.

(ii) Якщо $\mathrm{rank}\mathbf{A} = r_1 < m$ *та* $\mathrm{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді (нормальний) розв'язок* (4.12), $\mathbf{X} = (x_{ij})$, *можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{\,B}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}} = \tag{4.17}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right)_{j\,.}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{A}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.18}$$

де

$$\widehat{\mathbf{d}}^{B}_{.\,j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{k.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1},\ k = 1,\ldots,n, \tag{4.19}$$

$$\widehat{\mathbf{d}}^{A}_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.l}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times p},\ l = 1,\ldots,p, \tag{4.20}$$

є вектор-стовпцем і вектор-рядком, відповідно. $\tilde{\mathbf{d}}_{i.}$ *та* $\tilde{\mathbf{d}}_{.j}$ *є* i*-рядком та* j*-м стовпцем матриці* $\widetilde{\mathbf{D}}$ *для всіх* $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,p$.

(iii) Якщо $\mathrm{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\mathrm{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$*, тоді (нормальний) розв'язок* (4.12), $\mathbf{X} = (x_{ij})$*, має визначникові зображення*

$$x_{i\,j} = \frac{\mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{B}_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\cdot \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^{A}_{i\,.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\cdot \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\widehat{\mathbf{d}}^{B}_{.j}$ *знаходиться за формулою (4.19) та* $\mathbf{d}^{A}_{i\,.}$ *за (4.16).*

(iv) Якщо $\mathrm{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\mathrm{rank}\mathbf{B} = p$*, тоді (нормальний) розв'язок* (4.12), $\mathbf{X} = (x_{ij})$*, має визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}^{\,B}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta}\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)} = \frac{\mathrm{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{A}_{i.}\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta}\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)},$$

де $\mathbf{d}^{B}_{.j}$ *знаходиться за формулою (4.15) та* $\widehat{\mathbf{d}}^{A}_{i.}$ *за (4.20).*

Доведення. (i) Якщо $\mathrm{rank}\mathbf{A} = n$ and $\mathrm{rank}\mathbf{B} = p$, тоді за Наслідком 2.1, $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$ та $\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B}^*(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)^{-1}$. Якщо подамо матрицю $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}$ як ліву обернену, а $(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)^{-1}$ як праву обернену, тоді

$$\mathbf{X}_{LS} = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{np} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}\begin{bmatrix} L^A_{11} & L^A_{21} & \ldots & L^A_{n1} \\ L^A_{12} & L^A_{22} & \ldots & L^A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L^A_{1n} & L^A_{2n} & \ldots & L^A_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times\begin{bmatrix}\tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \ldots & \tilde{d}_{1p}\\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \ldots & \tilde{d}_{2p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tilde{d}_{n1} & \tilde{d}_{n2} & \ldots & \tilde{d}_{np}\end{bmatrix}\frac{1}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}\begin{bmatrix}R_{11}^B & R_{21}^B & \ldots & R_{p1}^B\\ R_{12}^B & R_{22}^B & \ldots & R_{p2}^B\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ R_{1p}^B & R_{2p}^B & \ldots & R_{pp}^B\end{bmatrix},$$

де L_{ij}^A – ліве (ij)-е алгебричне доповнення матриці $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$, та R_{ij}^B – праве (ij)-е алгебричне доповнення матриці $(\mathbf{BB}^*)$ для всіх $i, j = 1, \ldots, p$. Звідси,

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{n} L_{ki}^A \tilde{d}_{k\,s} R_{js}^B}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{BB}^*)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p. \tag{4.21}$$

У рівнянні (4.21) за Лемою 1.4 знайдемо спочатку

$$d_{is}^A := \sum_{k=1}^{n} L_{ki}^A \tilde{d}_{k\,s} = \mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.\,s}\right),$$

де $\tilde{\mathbf{d}}_{.\,s}$ – s-й стовпець матриці $\tilde{\mathbf{D}}$ для всіх $s = 1, \ldots, p$, та побудуємо вектор-рядки $\mathbf{d}_{i.}^A := \left[d_{i\,1}^A, \ldots, d_{i\,p}^A\right]$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Звівши, за Лемою 1.3, суму $\sum\limits_{s=1}^{p} d_{i\,s}^A R_{js}^B$ одержимо (4.13).

Якщо ж у рівнянні (4.21) за Лемою 1.3 знайдемо

$$\sum_{s=1}^{p} \widetilde{d}_{k\,s} R_{j\,s}^B = \mathrm{rdet}_j(\mathbf{B}B^*)_{j.}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{k\,.}\right) := d_{k\,j}^B,$$

де $\widetilde{\mathbf{d}}_{k\,.}$ – k-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{D}}$ для всіх $k = 1, \ldots, n$, та побудуємо вектор стовпець $\mathbf{d}_{.j}^B := \left[d_{1\,j}^B, \ldots, d_{n\,j}^B\right]^T$ для всіх $j = 1, \ldots, p$. Звідси, звівши за Лемою 1.4 суму $\sum\limits_{k=1}^{n} L_{ki}^A d_{k\,j}^B$, маємо (4.11).

(ii) Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{r_2}^{p\times q}$ і $r_1 < m$, $r_2 < p$, тоді за Теоремою 2.2 для узагальнених обернених матриць $\mathbf{A}^\dagger = \left(a_{ij}^\dagger\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ та $\mathbf{B}^\dagger = \left(a_{ij}^\dagger\right) \in \mathbb{H}^{q\times p}$ використаємо визначникові зображення, відповідно,

$$a_{ij}^\dagger = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^*\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta},$$

$$b_{ij}^{\dagger}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j\,.}\left(\mathbf{b}_{i.}^*\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}|\mathbf{BB}^*|_{\alpha}^{\alpha}}. \qquad (4.22)$$

За Теоремою 4.5, $\mathbf{X}_{LS}=\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}$, тоді для матриці $\mathbf{X}_{LS}=(x_{ij})$ маємо

$$x_{ij}=\sum_{s=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}^{\dagger}d_{ks}b_{sj}^{\dagger}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{s=1}^{q}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.k}^*\right)\right)_{\beta}^{\beta}d_{ks}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j\,.}\left(\mathbf{b}_{s.}^*\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}|\mathbf{BB}^*|_{\alpha}^{\alpha}}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{s=1}^{q}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{e}_{.\,k}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\widetilde{d_{ks}}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j\,.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}|\mathbf{BB}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \qquad (4.23)$$

де $\widetilde{d}_{ks}$ – (ks)-й елемент матриці $\widetilde{\mathbf{D}}$, $\mathbf{e}_{k.}$ та $\mathbf{e}_{.\,s}$ є відповідно одиничними вектор-рядком та вектор-стовпцем, компоненти яких є 0, за виключенням k-ї та, відповідно, s-ї компонент, які є 1. Позначимо

$$d_{is}^{A}:=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{e}_{.\,k}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\widetilde{d}_{ks}=\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.\,s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

та побудуємо вектор-рядок $\mathbf{d}_{i.}^{A}=\left[d_{i1}^{A},\ldots,d_{iq}^{A}\right]$. Підставивши його в (4.23), одержимо

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{s=1}^{q}d_{is}^{A}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j\,.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}|\mathbf{BB}^*|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Оскільки $\sum\limits_{s=1}^{q}d_{is}^{A}\mathbf{e}_{s.}=\mathbf{d}_{i\,.}^{A}$, то звідси випливає (4.55).

Якщо в (4.23) введемо спочатку

$$d_{kj}^{B}:=\sum_{s=1}^{q}\widetilde{d}_{ks}\sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j\,.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}=\sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j\,.}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{k.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

побудуємо вектор-стовпець $\mathbf{d}_{.j}^{\mathbf{B}}=\left[d_{1j}^{B},\ldots,d_{mj}^{B}\right]^{T}$ та підставимо його в (4.23), тоді одержимо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i} \left(\mathbf{e}_{.\,k}\right)\right)_{\beta}^{\beta} d_{kj}^{B}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{e}_{.k} d_{kj}^{B} = \mathbf{d}_{.j}^{B}$, звідси випливає (4.54).

Доведення змішаних випадків (iii) та (iv), очевидно, випливає з попередніх випадків (i) та (ii). □

Зауваження 4.3. *У випадку, коли $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ і $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{p\times p}$ обидві є ермітовими оборотними матрицями, то розв'язок рівняння (4.11) можемо також знайти як*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}_{.j}^{B}\right)}{\det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B})} = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B})_{j.}\left(\mathbf{d}_{i\,.}^{A}\right)}{\det(\mathbf{A})\cdot\cdot\det(\mathbf{B})},$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{B} := \left[\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B})_{j.}\left(\mathbf{d}_{1\,.}\right), \ldots, \operatorname{rdet}_j(\mathbf{B})_{j.}\left(\mathbf{d}_{n\,.}\right)\right]^{T},$$

$$\mathbf{d}_{i\,.}^{A} := \left[\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}_{.1}\right), \ldots, \operatorname{cdet}_i(\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}_{.p}\right)\right]$$

де $\mathbf{d}_{i\,.}$ та $\mathbf{d}_{.\,j}$ є i-м рядком і j-м стовпцем матриці $\mathbf{D}$ для всіх $i = 1, \ldots, n$ та $j = 1, \ldots, p$.

Зауваження 4.4. *Аналогічно Зауваженню 2.2, щоб уніфікувати ці випадки, для довільної повнорангової матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, вектор-рядка $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^{1\times m}$, та вектор-стовпця $\mathbf{c} \in \mathbb{H}^{n\times 1}$, покладемо*

– *коли $r = m$*

$$\operatorname{rdet}_i\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.}(\mathbf{b})\right) = \sum_{\alpha\in I_{m,m}\{i\}} \operatorname{rdet}_i\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.}(\mathbf{b})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \sum_{\alpha\in I_{m,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}, \quad i = 1, \ldots, m;$$

– *коли $r = n$*

$$\operatorname{cdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.j}(\mathbf{c})\right) = \sum_{\beta\in J_{n,n}\{j\}} \operatorname{cdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.j}(\mathbf{c})\right)_{\beta}^{\beta},$$

$$\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \sum_{\beta\in J_{n,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тоді формули (4.54) та (4.55) задають нормальні розв'язки рівняння (4.11) у всіх випадках незалежно від рангу матриць.

Аналогічно, будемо вважати, що формула (4.4) задає нормальні розв'язки рівняння (4.1), а формула (4.9) рівняння (4.6).

4.1.2. Правила Крамера для нормальних розв'язків кватерніонових систем лінійних рівнянь. Окремо, розглянемо правила Крамера для нормальних розв'язків кватерніонових систем лінійних рівнянь, доведення яких безпосередньо випливають з попереднього пункту. Через некомутативність кватерніонів, над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$ доцільно розглядати праву і ліву систему лінійних рівнянь.

Означення 4.4. *Нехай*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{4.24}$$

є правою системою лінійних рівняння над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$, де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ є матрицею коефіцієнтів, $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^{m\times 1}$ – стовпцем відомих та $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n\times 1}$ є стовпцем невідомих значень. Нормальним розв'язком (з найменшою нормою) системи (4.24) називається вектор-стовпець $\mathbf{x}^0$, що задовольняє умову

$$\| \mathbf{x}^0 \| = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{H}^n} \left\{ \| \tilde{\mathbf{x}} \| : \| \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y} \| = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{H}^n} \| \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \right\},$$

де $\mathbb{H}^n$ є n-мірним правим кватерніоновим векторним простором.

Аналогічно до комплексного випадку доводиться наступна теорема (див, напр. [299]).

Теорема 4.7. *Вектор $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{y}$ є нормальним розв'язком системи (4.24).*

Означення 4.5. *Нехай*

$$\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{y}, \tag{4.25}$$

є лівою системою лінійних рівняння над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$, де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ – матриця коефіцієнтів, $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^{1\times n}$ – вектор рядок відомих і $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{1\times m}$ рядок невідомих значень. Нормальним розв'язком (з найменшою нормою) системи

(4.25) називається вектор рядок $\mathbf{x}^0$*, що задовольняє умову*

$$\left\|\mathbf{x}^0\right\| = \min_{\tilde{\mathbf{x}}\in\mathbb{H}^{1\times m}}\left\{\|\tilde{\mathbf{x}}\| : \ \|\tilde{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{y}\| = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{H}^{1\times m}}\|\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{y}\|\right\},$$

де $\mathbb{H}^{1\times m}$ *є* m*-мірним лівим векторним простором.*

Теорема 4.8. *Вектор-рядок* $\mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{A}^{\dagger}$ *є нормальним розв'язком рівняння (4.25).*

Наступні теореми з урахуванням Зауваження 4.4 дають правила Крамера правої та лівої систем лінійних рівнянь над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$. Їх доведення, очевидно, випливає з Теорем 4.2 і 4.4, відповідно.

Теорема 4.9. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$*, тоді нормальний розв'язок системи (4.24) для всіх* $j = 1,\ldots,n$ *можна представити як*

$$x_j^0 = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{j\}} \operatorname{cdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,j}(\mathbf{f})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{4.26}$$

де $\mathbf{f} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$.

Теорема 4.10. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$*, тоді нормальний розв'язок системи (4.25) для всіх* $i = 1,\ldots,m$ *можна представити як*

$$x_i^0 = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{i\}} \operatorname{rdet}_i\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{i\,.}(\mathbf{z})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{4.27}$$

де $\mathbf{z} = \mathbf{y}\mathbf{A}^*$.

4.1.3. Правило Крамера для комплексного двостороннього матричного рівняння. Використовуючи визначникові зображення комплексної матриці Мура-Пенроуза, для двостороннього матричного рівняння (4.11) у випадку, коли $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m\times q}$, маємо наступне правило Крамера з врахуванням Зауваження 4.4.

Теорема 4.11. *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2$*, тоді нормальний розв'язок з мінімальною нормою* $\mathbf{X}_{LS} = (x_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times p}$ *рівняння (4.11) можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}^{\,B}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \left|\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right)_{j\,.}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{i.}^{A}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де

$$\widehat{\mathbf{d}}^{B}_{.\,j}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\left|(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{k.}\right)\right|^{\alpha}_{\alpha}\right]\in\mathbb{C}^{n\times 1},\ k=1,\ldots,n,$$

$$\widehat{\mathbf{d}}^{A}_{i\,.}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.l}\right)\right|^{\beta}_{\beta}\right]\in\mathbb{C}^{1\times p},\ l=1,\ldots,p,$$

є вектор-стовпцем і вектор-рядком, відповідно, а $\tilde{\mathbf{d}}_{i.}$ *та* $\tilde{\mathbf{d}}_{.j}$ *– i-й рядок та j-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{D}}$ *для всіх* $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,p$.

Поклавши $\mathbf{B}=\mathbf{I}$ або $\mathbf{A}=\mathbf{I}$, відповідно, одержимо наступні наслідки.

Наслідок 4.1. *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A}=r$, *тоді нормальний розв'язок з мінімальною нормою рівняння (4.1) можна подати як*

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{j\}}\left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\,.\,i}\left(\hat{\mathbf{b}}_{.j}\right)\right|^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}}.$$

де $\hat{\mathbf{b}}_{.j}$ *– j-й стовпець матриці* $\hat{\mathbf{B}}$ *для всіх* $j=1,\ldots,s$.

Наслідок 4.2. *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A}=r$, *то для* $\mathbf{X}_{LS}=(x_{ij})\in\mathbb{H}^{s\times m}$ *рівняння (4.6) маємо*

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{i\}}\left|(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{\,j\,.}\left(\check{\mathbf{b}}_{i\,.}\right)\right|^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}}\left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}}.$$

де $\check{\mathbf{b}}_{i.}$ *– i-й рядок матриці* $\check{\mathbf{B}}$ *для всіх* $i=1,\ldots,s$.

4.1.4. Визначникові зображення особливих розв'язків двостороннього матричного рівняння. В цьому підрозділі розглянемо деякі найпростіші матричні рівняння, які мають $*$-ермітовість або η-(косо-) ермітовість.

1. Розпочнемо з рівняння

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^*=\mathbf{B}. \tag{4.28}$$

Ермітові розв'язки (додатно- чи невід'ємно-визначені), тобто такі $\mathbf{X}=\mathbf{X}^*$, що є розв'язками рівняння (4.28), вивчалися, зокрема, у роботах [38, 62, 97, 150, 288, 289]. Слідуючи за [97], наступна лема може бути узагальнена на матриці над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$.

Лема 4.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, *з умовою* $\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$, *– відомі матриці, а* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *– невідома. Тоді рівняння (4.28) має ермітовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{P}_A\mathbf{B} = \mathbf{B}$. *У цьому випадку загальний ермітовий розв'язок рівняння (4.28) є*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{A}^{\dagger,*} + \mathbf{L}_A\mathbf{V} + \mathbf{V}^*\mathbf{L}_A,$$

де $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *довільна матриця відповідних розмірів.*

Як випливає з Теореми 4.11, якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r$, тоді визначниковим зображенням ермітового розв'язку $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{A}^{\dagger,*} = (x_{ij})$ є

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A}_1)_{.i}\left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\right)^2},$$

де

$$\mathbf{v}_{i.}^{(1)} = \left[\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{b}_{.s}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad s = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{v}_{.j}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\mathbf{b}_{f.}^{(1)})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad f = 1,\ldots,n.$$

Тут $\mathbf{b}_{.s}^{(1)}$ та $\mathbf{b}_{f.}^{(1)}$ є s-им стовпцем і f-им рядком матриці $\mathbf{B}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}$, відповідно.

2. Розглянемо матричне рівняння

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}. \tag{4.29}$$

Лема 4.2. *[292] Нехай* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. *Тоді рівняння (4.29) має* η*-ермітовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{R}_A\mathbf{B} = 0$ *та* $\mathbf{A}\mathbf{B}^{\eta*} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{\eta*}$. *У цьому випадку* η*–ермітовий розв'язок рівняння (4.29) може бути виражений як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B} + (\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B})^{\eta*} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B})^{\eta*} + \mathbf{L}_A\mathbf{V}\mathbf{L}_A^{\eta},$$

де $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\eta*}$ *– довільна кватерніонова матриця відповідних розмірів.*

Наступна лема дає вираз для η-косо-ермітового розв'язку рівняння(4.29).

Лема 4.3. *[155] Нехай* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *- матриці над тілом кватерніонів* $\mathbb{H}$ *відповідних розмірів. Тоді*

(a) Рівняння (4.29) має η*-косо-ермітовий розв'язок* $\Leftrightarrow \mathbf{R}_A\mathbf{B} = 0$ *and* $\mathbf{A}\mathbf{B}^{\eta*} = -\mathbf{B}\mathbf{A}^{\eta*}$.

(b) Якщо умови пункту (a) виконуються, тоді загальний η*-косо-ермітовий розв'язок задається як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B} - (\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B})^{\eta*} + \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B})^{\eta*} + \mathbf{L}_A\mathbf{U}\mathbf{L}_A^{\eta},$$

де $\mathbf{U} = -\mathbf{U}^{\eta*}$ *– довільна кватерніонова матриця відповідних розмірів.*

Поклавши $\mathbf{V}$ та $\mathbf{U}$ як нульові матриці, одержимо частковий η-ермітовий та η-косо-ермітовий розв'язки, відповідно,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B} + (\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B})^{\eta*} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B})^{\eta*}, \tag{4.30}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B} - (\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B})^{\eta*} + \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B})^{\eta*}. \tag{4.31}$$

Теорема 4.12. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$. *Тоді* η*-ермітовий (4.30) і* η*-косо-ермітовий (4.31) розв'язки рівняння (4.29),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *відповідно,*

$$x_{ij} = x_{ij}^{(1)} + x_{ij}^{(2)} - x_{ij}^{(3)}, \quad x_{ij} = x_{ij}^{(1)} - x_{ij}^{(2)} + x_{ij}^{(3)},$$

мають покомпонентно наступні визначникові зображення,

(i)

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{b}_{.j}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{4.32}$$

де $\mathbf{b}_{.j}^{(1)}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{B}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{B}$.

(ii)

$$x_{ij}^{(2)} = -\eta\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{b}_{i.}^{(1,*)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in I_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\alpha}^{\alpha}}\eta, \tag{4.33}$$

де $\mathbf{b}_{i.}^{(1,*)}$ *–* i*-й рядок матриці* $\mathbf{B}_1^* := \mathbf{B}^*\mathbf{A}$.

(iii)

$$x_{ij}^{(3)} = \frac{-\eta \sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{v}_{i.}^{\eta} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \right)^2} = \tag{4.34}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{u}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \right)^2}, \tag{4.35}$$

де

$$\mathbf{v}_{i.}^{\eta} = \left[-\eta \sum_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\widehat{\mathbf{a}}_{.s} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \eta \right] \in \mathbb{H}^{1 \times n},\ s = 1, \ldots, n, \tag{4.36}$$

$$\mathbf{u}_{.j} = \left[-\eta \sum_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} (\widehat{\mathbf{a}}_{l.}^{\eta}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1},\ l = 1, \ldots, n. \tag{4.37}$$

Тут $\widehat{\mathbf{a}}_{.s}$ *– s-й стовпець* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{B}^{\eta *}\mathbf{A}^{\eta}$ *та* $\widehat{\mathbf{a}}_{l.}^{\eta}$ *– l-й рядок* $\widehat{\mathbf{A}}^{\eta} = \mathbf{A}^{\eta *}\mathbf{A}^{\eta}\mathbf{B}^*\mathbf{A}$.

Доведення. Розглянемо кожен доданок розв'язків (4.30) та (4.31).

(i) Для першого доданку $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}$, використовуючи визначникове зображення (2.7) для матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}$ і беручи до уваги те, що $\sum_{k=1}^{m} \mathbf{a}_{.k}^{*} b_{kj} = \mathbf{b}_{.j}^{(1)}$, де $\mathbf{b}_{.j}^{(1)}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{B}$, одержимо

$$x_{ij}^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\dagger} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{a}_{.k}^{*} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \cdot b_{kj} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{b}_{.j}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}}.$$

(ii) Для другого доданку, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{B}^{\eta *}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta *}$, використаємо (2.27) для визначникового зображення матриці Мура-Пенроуза $(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta *}$. З того, що $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}^{*} \mathbf{a}_{k.} = \mathbf{b}_{i.}^{(1,*)}$, де $\mathbf{b}_{.j}^{(1,*)}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{B}_1^*$, випливає

$$x_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^{\eta*} a_{kj}^{\dagger,\eta*} = -\eta \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^{*} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{a}_{k.}\right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in I_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\alpha}^{\alpha}} \eta =$$

$$= -\eta \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{b}_{i.}^{(1,*)}\right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in I_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\alpha}^{\alpha}} \eta.$$

(iii) Для третього доданку, $\mathbf{X}_3 = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B})^{\eta*}$, беручи (2.14) для визначникового зображення проективної матриці $\mathbf{Q}_A = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$, аналогічно, одержимо

$$x_{ij}^{(3)} =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\dot{\mathbf{a}}_{.k}\right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}} \left(-\eta \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{b}_{k.}^{(1,*)}\right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in I_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\alpha}^{\alpha}} \eta \right) =$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} \sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\dot{\mathbf{a}}_{.k}\right) \right)_{\beta}^{\beta} \left(-\eta \sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{b}_{k.}^{(1,*)}\right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right)}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \right)^2},$$

де $\dot{\mathbf{a}}_{.k}$ – k-й стовпець матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ і $\mathbf{b}_{k.}^{(1,*)}$ – k-й рядок матриці $\mathbf{B}^*\mathbf{A}$.

Поклавши $\mathbf{e}_{l.}$ та $\mathbf{e}_{.l}$ як одиничний l-й вектор-рядок і l-й вектор-стовпець, одержимо

$$x_{ij}^{(3)} =$$

$$\frac{\sum\limits_{k} \sum\limits_{l} \sum\limits_{s} \sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{e}_{.l}\right) \right)_{\beta}^{\beta} \dot{a}_{lk} b_{ks}^{(1,*,\eta)} \left(-\eta \sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{e}_{s.}\right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right)}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \right)^2},$$

де $b_{ks}^{(1,*,\eta)}$ – (ks)-й елемент матриці $(\mathbf{B}_1^*)^\eta := \mathbf{B}^{\eta*}\mathbf{A}^\eta$. Позначимо $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{B}^{\eta*}\mathbf{A}^\eta =:$ $\widehat{\mathbf{A}} = (\widehat{a}_{ij})$. З того, що

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{a}_{lk} b_{ks}^{(1,*,\eta)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} a_{lt}^{*} a_{tk} b_{kt}^{\eta*} a_{ts}^{\eta} = \widehat{a}_{ls},$$

випливає

$$x_{ij}^{(3)} =$$

$$\frac{\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{e}_{.l}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\widehat{a}_{ls}\left(-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right)}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2}.$$

Якщо позначимо

$$v_{is} := \sum_{l=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{e}_{.l}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\widehat{a}_{ls} = \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\widehat{\mathbf{a}}_{.s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

як s-ту компоненту вектор-рядка $\mathbf{v}_{i.} = [v_{i1}, \ldots, v_{in}]$, тоді

$$\sum_{s=1}^{n} v_{is}\left(-\eta\sum_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\mathbf{e}_{s.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right) =$$
$$-\eta\left(\sum_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\mathbf{v}_{i.}^{\eta})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right)\eta,$$

де $\mathbf{v}_{i.}^{\eta} = [v_{i1}^{\eta}, \ldots, v_{in}^{\eta}]$. Таким чином для третього доданку знайдемо визначникове зображення (4.34), де вектор-рядок $\mathbf{v}_{i.}$ визначається формулою (4.36).

Якщо ж введемо

$$u_{lj} := \sum_{s=1}^{n}\widehat{a}_{ls}\left(-\eta\sum_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\mathbf{e}_{s.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right) =$$
$$-\eta\sum_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\widehat{\mathbf{a}}_{l.}^{\eta})\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta$$

як l-ту компоненту вектор-стовпця $\mathbf{u}_{.j} = [u_{1j}, \ldots, u_{nj}]$, тоді

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{e}_{.l}\right)\right)_{\beta}^{\beta}u_{lj} = \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{u}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}.$$

Отже, інше визначникове зображення третього доданку є (4.35) з вектор-стовпцем $\mathbf{u}_{.j}$, що задається формулою (4.37). □

3. Тепер розглянемо рівняння з обмеженням

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^{\eta*} = \mathbf{B},\ \mathbf{B} = \mathbf{B}^{\eta*}. \tag{4.38}$$

Маємо наступну лему про η-ермітовий розв'язок рівняння (4.38).

Лема 4.4. *[69, Наслідок 3.6] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *– задані матриці. Тоді рівняння (4.38) має η-ермітовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{R}_A\mathbf{B} = 0$. *У цьому випадку η-ермітовий розв'язок може бути виражений як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta*} + \mathbf{L}_A\mathbf{V} + \mathbf{V}^{\eta*}\mathbf{L}_A^{\eta*},$$

де $\mathbf{V}$ *довільна кватерніонова матриця відповідних розмірів.*

Аналогічно, для рівняння з обмеженням

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^{\eta*} = \mathbf{B},\ \mathbf{B} = -\mathbf{B}^{\eta*}, \tag{4.39}$$

маємо наступну лему.

Лема 4.5. *[155, Теорема 2.3] Нехай матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *- задані. Тоді рівняння (4.39) має η-косо-ермітовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{R}_A\mathbf{B} = 0$. *У цьому випадку η-косо-ермітовий розв'язок може бути виражений як* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta*} + \mathbf{L}_A\mathbf{V} - \mathbf{V}^{\eta*}\mathbf{L}_A^{\eta*}$, *де* $\mathbf{V}$ *довільна кватерніонова матриця відповідних розмірів.*

Теорема 4.13. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$ *і покладемо* $\mathbf{V}$ *як нульову матрицю. Тоді частковий η-ермітовий та η-косо-ермітовий розв'язки*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta*},$$

рівнянь (4.38) та (4.39) мають визначникові зображення

$$x_{ij} = \frac{-\eta \sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{v}_{i.}^{\eta}\right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \right)^2} = \tag{4.40}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{u}_{.j}\right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \right)^2}, \tag{4.41}$$

де

$$\mathbf{v}^{\eta}_{i.} = \left[-\eta \sum_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\widehat{\mathbf{a}}_{.s} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \eta \right] \in \mathbb{H}^{1\times n},\ s = 1, \ldots, n, \tag{4.42}$$

$$\mathbf{u}_{.j} = \left[-\eta \sum_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\widehat{\mathbf{a}}^{\eta}_{l.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \eta \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1},\ l = 1, \ldots, n. \tag{4.43}$$

Тут $\widehat{\mathbf{a}}_{.s}$ *–* s*-й стовпець* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}^{\eta}$ *і* $\widehat{\mathbf{a}}^{\eta}_{l.}$ *–* l*-й рядок* $\widehat{\mathbf{A}}^{\eta} = \mathbf{A}^{\eta *}\mathbf{B}^{\eta}\mathbf{A}$.

Доведення. Застосовуючи визначникові зображення (2.7) та (2.27) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}$ та $(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta *}$ відповідно, одержимо

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} a^{\dagger}_{ik} b_{kl} \left(\overline{a}^{\dagger}_{jl} \right)^{\eta} =$$

$$\frac{\sum\limits_{k} \sum\limits_{l} \sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{a}^*_{.k} \right) \right)^{\beta}_{\beta} b_{kl} \left(-\eta \sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{a}_{l.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \eta \right)}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \right)^2},$$

Позначимо $\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}^{\eta} =: \widehat{\mathbf{A}} = (\widehat{a}_{ij})$. Тоді, аналогічно як в пункті (iii) доведення Теореми 4.12, отримаємо

$$x_{ij} =$$

$$\frac{\sum\limits_{k} \sum\limits_{l} \sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{e}_{.k} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \widehat{a}_{kl} \left(-\eta \sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{e}_{l.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \eta \right)}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \right)^2},$$

де $\mathbf{e}_{l.}$ and $\mathbf{e}_{.l}$ є, відповідно, одиничними вектор-рядком та вектор-стовпцем.

Продовжуючи аналогічно як в доведенні Теореми 4.12, очевидно завершимо доведення. □

4.1.5. Приклад правила Крамера для кватерніонового двостороннього матричного рівняння.

Розглянемо рівняння

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{D}, \tag{4.44}$$

де

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&\mathbf{i}&\mathbf{j}\\-\mathbf{k}&\mathbf{i}&1\\\mathbf{k}&\mathbf{j}&-\mathbf{i}\\\mathbf{j}&-1&\mathbf{i}\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}&1&\mathbf{j}\\\mathbf{j}&\mathbf{k}&-\mathbf{i}\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&\mathbf{i}&\mathbf{j}\\\mathbf{k}&0&\mathbf{i}\\1&\mathbf{j}&0\\0&\mathbf{k}&\mathbf{i}\end{bmatrix}.$$

Маємо

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&2\mathbf{i}+2\mathbf{j}&2\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}&4&-2\mathbf{i}-2\mathbf{k}\\-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}&2\mathbf{i}+2\mathbf{k}&4\end{bmatrix},\ \mathbf{B}\mathbf{B}^*=\begin{bmatrix}3&-3\mathbf{k}\\3\mathbf{k}&3\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}=\mathbf{A}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*=\begin{bmatrix}2+2\mathbf{i}+2\mathbf{j}&-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}\\1-\mathbf{i}-\mathbf{j}&\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}\\1-2\mathbf{j}&2\mathbf{i}-\mathbf{k}\end{bmatrix}.$$

Оскільки, $\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})=0$ і

$$\det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{33}=\begin{bmatrix}4&2\mathbf{i}+2\mathbf{j}\\-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}&4\end{bmatrix}=8\neq 0,$$

то $\operatorname{rank}\mathbf{A}=2$. Аналогічно знайдемо, що $\operatorname{rank}\mathbf{B}=1$.

Отже, маємо випадок (ii) Теореми 4.11. Будемо шукати нормальний розв'язок $\mathbf{X}_{LS}$ рівняння (4.44) за формулою (4.19). Маємо,

$$\sum_{\alpha\in I_{1,\,2}}\left|\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}=3+3=6,$$

$$\sum_{\beta\in J_{2,\,3}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}=\det\begin{bmatrix}4&2\mathbf{i}+2\mathbf{j}\\-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}&4\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}4&2\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}&4\end{bmatrix}+$$
$$+\det\begin{bmatrix}4&-2\mathbf{i}-2\mathbf{k}\\2\mathbf{i}+2\mathbf{k}&4\end{bmatrix}=24.$$

За формулою (4.54), одержимо

$$\mathbf{d}_{.1}^{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}2+2\mathbf{i}+2\mathbf{j}\\1-\mathbf{i}-\mathbf{j}\\1-2\mathbf{j}\end{bmatrix},\quad \mathbf{d}_{.2}^{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}\\2\mathbf{i}-\mathbf{k}\end{bmatrix}.$$

Оскільки,

$$\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)_{.1}\left(\mathbf{d}^{\mathbf{B}}_{.1}\right)=\begin{bmatrix}2+2\mathbf{i}+2\mathbf{j} & 2\mathbf{i}+2\mathbf{j} & 2\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\ 1-\mathbf{i}-\mathbf{j} & 4 & -2\mathbf{i}-2\mathbf{k}\\ 1-2\mathbf{j} & 2\mathbf{i}+2\mathbf{k} & 4\end{bmatrix},$$

тоді, остаточно, отримаємо

$$x_{11}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}\{1\}}\operatorname{cdet}\left(\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)_{.1}\left(\mathbf{d}^{\mathbf{B}}_{.1}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}}\left|\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{\beta}_{\beta}\right|\sum\limits_{\alpha\in I_{1,2}}\left|\mathbf{B}\mathbf{B}^{*}\right|^{\alpha}_{\alpha}}=\frac{1}{144}\left(\operatorname{cdet}_{1}\begin{bmatrix}2+2\mathbf{i}+2\mathbf{j} & 2\mathbf{i}+2\mathbf{j}\\ 1-\mathbf{i}-\mathbf{j} & 4\end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{cdet}_{1}\begin{bmatrix}2+2\mathbf{i}+2\mathbf{j} & 2\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\ 1-2\mathbf{j} & 4\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{72}(4+5\mathbf{i}+6\mathbf{j}-\mathbf{k}).$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо нормальний розв'язок (з найменшою нормою) рівняння (4.44)

$$\mathbf{X}_{LS}=\frac{1}{72}\begin{bmatrix}4+5\mathbf{i}+6\mathbf{j}-\mathbf{k} & -1-2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-4\mathbf{k}\\ i-2\mathbf{j}-\mathbf{k} & -2+2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\\ 1-4\mathbf{i}-3\mathbf{j} & 3\mathbf{i}-3\mathbf{j}-2\mathbf{k}\end{bmatrix}.$$

4.2. Правило Крамера для узагальненого кватерніонового рівняння Сильвестра, та його часткових і особливих випадків.

У цьому підрозділі, у рамках теорії стовпцево-рядкових визначників, дамо прямий метод знаходження розв'язків, аналог правило Крамера, узагальненого кватерніонового матричного рівняння Сильвестра

$$\mathbf{AXB}+\mathbf{CYD}=\mathbf{E}. \tag{4.45}$$

його часткових та деяких особливих винадків.

4.2.1. Правило Крамера для узагальненого кватерніонового рівняння Сильвестра.

Лема 4.6. *[252] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m\times s}$. *Покладемо* $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{C}$, $\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L}_B$, $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{L}_M$. *Наступні твердження - еквівалентні.*

(i) Рівняння (4.45) має розв'язок $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, *де* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times r}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{p\times q}$.

(ii) $\mathbf{R}_M\mathbf{R}_A\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_A\mathbf{E}\mathbf{L}_D = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}\mathbf{L}_D\mathbf{L}_N = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_C\mathbf{E}\mathbf{L}_B = \mathbf{0}$.

(iii) $\mathbf{P}_M\mathbf{R}_A\mathbf{E}\mathbf{Q}_D = \mathbf{R}_A\mathbf{E}$, $\mathbf{P}_C\mathbf{E}\mathbf{L}_B\mathbf{Q}_N = \mathbf{E}\mathbf{L}_B$.

(iv) $\operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{C}\ \mathbf{E}] = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{C}]$, $\operatorname{rank}[\mathbf{B}^*\ \mathbf{D}^*\ \mathbf{E}^*] = \operatorname{rank}[\mathbf{B}^*\ \mathbf{D}^*]$,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{E}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{bmatrix}, \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{E}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix}.$$

В цьому випадку, загальний розв'язок (4.45) виражається як

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{B}^\dagger - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{R}_A\mathbf{E}\mathbf{B}^\dagger - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{L}_B\mathbf{N}^\dagger\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger -$$
$$- \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{R}_N\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{L}_A\mathbf{U} + \mathbf{Z}\mathbf{R}_B, \tag{4.46}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^\dagger\mathbf{R}_A\mathbf{E}\mathbf{D}^\dagger + \mathbf{L}_M\mathbf{S}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{L}_B\mathbf{N}^\dagger + \mathbf{L}_M(\mathbf{V} - \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger) + \mathbf{W}\mathbf{R}_D, \tag{4.47}$$

де $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ *і* $\mathbf{W}$ *- довільні матриці відповідних розмірів.*

Деяке спрощення формул (4.46) та (4.47) може бути отримані завдяки кватерніоновому аналогу наступного твердження [169].

Лема 4.7. *Якщо матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *– ідемпотентна та ермітова, тоді для довільних матриць* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *та* $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *виконується*

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^\dagger = (\mathbf{B}\mathbf{A})^\dagger, \quad (\mathbf{A}\mathbf{C})^\dagger\mathbf{A} = (\mathbf{A}\mathbf{C})^\dagger. \tag{4.48}$$

Оскільки матриці $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{L}_B$, та $\mathbf{L}_M$ – проективні, то внаслідок (4.48), маємо

$$\mathbf{M}^\dagger\mathbf{R}_A = (\mathbf{R}_A\mathbf{C})^\dagger\mathbf{R}_A = (\mathbf{R}_A\mathbf{C})^\dagger = \mathbf{M}^\dagger,\ \mathbf{L}_B\mathbf{N}^\dagger = \mathbf{L}_B\left(\mathbf{B}\mathbf{L}_B\right)^\dagger = \left(\mathbf{B}\mathbf{L}_B\right)^\dagger = \mathbf{N}^\dagger,$$
$$\mathbf{L}_M\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{L}_M\left(\mathbf{C}\mathbf{L}_M\right)^\dagger = \left(\mathbf{C}\mathbf{L}_M\right)^\dagger = \mathbf{S}^\dagger. \tag{4.49}$$

Використовуючи (4.49), отримаємо наступне спрощення виразів (4.46) та (4.47)

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{B}^\dagger - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{B}^\dagger - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{N}^\dagger\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger -$$
$$- \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{R}_N\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{L}_A\mathbf{U} + \mathbf{Z}\mathbf{R}_B,$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{D}^\dagger + \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{L}_B\mathbf{N}^\dagger + \mathbf{L}_M(\mathbf{V} - \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger) + \mathbf{W}\mathbf{R}_D,$$

де $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ і $\mathbf{W}$ - довільні матриці відповідних розмірів.

Поклавши $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$, та $\mathbf{W}$ як нульові матриці відповідних розмірів, одержимо наступний частковий розв'язок рівняння Сильвестра (4.45),

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}, \tag{4.50}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger} + \mathbf{Q}_S\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}, \tag{4.51}$$

Далі, дамо визначникове зображення часткового розв'язку (4.50)-(4.51), що є аналогом правила Крамера.

Теорема 4.14. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}_{r_2}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}_{r_3}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}_{r_4}$, $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_5$, $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_6$, $\operatorname{rank}\mathbf{S} = r_7$. *Тоді розв'язок (4.50)-(4.51),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, $\mathbf{Y} = (y_{gf}) \in \mathbb{H}^{p\times q}$ *рівняння (4.45) покомпонентно*

$$x_{ij} = x^{(1)}_{ij} - x^{(2)}_{ij} - x^{(3)}_{ij},\ y_{gf} = y^{(1)}_{gf} + y^{(2)}_{gf},$$

має наступні визначникові зображення.

(i)

$$x^{(1)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}} = \tag{4.52}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.53}$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{k.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad k = 1,\dots,n, \tag{4.54}$$

$$\mathbf{d}^A_{i.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{.l}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad l = 1,\dots,r. \tag{4.55}$$

Тут $\mathbf{e}^{(1)}_{k.}$ *і* $\mathbf{e}^{(1)}_{.l}$ *є k-м рядком і l-м стовпцем матриці* $\mathbf{E}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{E}\mathbf{B}^*$.

(ii)

$$x^{(2)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in I_{r_5,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.56}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ - i*-й рядок* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{\Phi}\mathbf{E}\mathbf{B}^*$. *Матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq})$ *є така, що*

$$\phi_{iq} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\boldsymbol{\varphi}^M_{.\,q} \right) \right)^{\beta}_{\beta} = \tag{4.57}$$

$$= \sum_{\alpha \in I_{r_5,m}\{q\}} \mathrm{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\boldsymbol{\varphi}^A_{i.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha}, \tag{4.58}$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}^M_{.\,q} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_5,m}\{q\}} \mathrm{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q\,.} \left(\mathbf{c}^{(1)}_{f.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad f = 1, \ldots, n, \tag{4.59}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^A_{i\,.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{c}^{(1)}_{.s} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times m}, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{4.60}$$

Тут $\mathbf{c}^{(1)}_{f\,.}$ *і* $\mathbf{c}^{(1)}_{.\,s}$ *є* f*-м рядком і* s*-м стовпцем* $\mathbf{C}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{M}^*$.

(iii)

$$x^{(3)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha \in J_{r_6,s}} |\mathbf{N}^*\mathbf{N}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.61}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ - j*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$. *Матриця* $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{tj}) \in \mathbb{H}^{p\times n}$ *така, що*

$$\upsilon_{tj} = \sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t} \left(\widetilde{\mathbf{e}}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta}, \tag{4.62}$$

де $\widetilde{\mathbf{e}}_{.j}$ - j*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\Psi$, *а* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{fj}) \in \mathbb{H}^{s\times n}$ *задається умовою*

$$\psi_{fj} = \sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{t\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\zeta^N_{f.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} = \tag{4.63}$$

$$= \sum_{\beta \in J_{r_6,s}\{f\}} \mathrm{cdet}_f \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f} \left(\zeta^B_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta}, \tag{4.64}$$

де

$$\boldsymbol{\zeta}^N_{f.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_6,s}\{f\}} \mathrm{cdet}_f \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f} \left(\mathbf{d}^{(1)}_{.k} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{4.65}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^B_{.j} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\mathbf{d}^{(1)}_{l.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{s\times 1}, \quad l = 1, \ldots, s, \tag{4.66}$$

та $\mathbf{d}_{.k}^{(1)}$ *і* $\mathbf{d}_{l.}^{(1)}$ *є* k*-м стовпцем і* l*-м рядком матриці* $\mathbf{D}_1 = \mathbf{N}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$.

(iv)

$$y_{gf}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.g} \left(\mathbf{d}_{.f}^{D} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|_{\alpha}^{\alpha}} = \tag{4.67}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f \left((\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.} \left(\mathbf{d}_{g.}^{M} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.68}$$

де

$$\mathbf{d}_{.f}^{D} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_4,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f \left((\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.} \left(\mathbf{e}_{k.}^{(4)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{p \times 1}, \quad k = 1, \ldots, p, \tag{4.69}$$

$$\mathbf{d}_{g.}^{M} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_5,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.g} \left(\mathbf{e}_{.l}^{(4)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times q}, \quad l = 1, \ldots, q. \tag{4.70}$$

Тут $\mathbf{e}_{k.}^{(4)}$ *і* $\mathbf{e}_{.l}^{(4)}$ *є* k*-м рядком і* l*-м стовпцем матриці* $\mathbf{E}_4 := \mathbf{M}^*\mathbf{E}\mathbf{D}^*$.

(v)

$$y_{gf}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g \left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.g} \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.f} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,p}} |\mathbf{S}^*\mathbf{S}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_6,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.71}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.f}$ *-* f*-й рядок* $\widetilde{\mathbf{\Omega}} := \mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{\Omega}$. *Матриця* $\mathbf{\Omega} = (\omega_{tf})$ *така, що*

$$\omega_{tf} = \sum_{\alpha \in I_{r_6,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f \left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.} \left(\boldsymbol{\xi}_{t.}^{C} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} = \tag{4.72}$$

$$= \sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t} \left(\boldsymbol{\xi}_{.f}^{N} \right) \right)_{\beta}^{\beta}, \tag{4.73}$$

де

$$\boldsymbol{\xi}_{t.}^{C} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t} \left(\mathbf{e}_{.k}^{(5)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times q}, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{4.74}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{.f}^{N} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_6,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f \left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.} \left(\mathbf{e}_{l.}^{(5)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{s \times 1}, \quad l = 1, \ldots, p. \tag{4.75}$$

Тут $\mathbf{e}_{.k}^{(5)}$ *і* $\mathbf{e}_{l.}^{(5)}$ *є* k*-м стовпцем і* l*-м рядком матриці* $\mathbf{E}_5 = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{N}^*$.

Доведення. (i) Очевидно, що визначникові зображення (4.52) та (4.53), безпосередньо випливають з Теореми 4.11 з врахуванням Зауваження 4.4.

(ii) Розглянемо другий доданок розв'язку (4.50), $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} := \mathbf{X}_2 = \left(x_{ij}^{(2)}\right)$. Використовуючи Теорему 4.11 для множника $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}$ та Теорему 4.4 для множника $\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger}$, одержимо

$$x_{ij}^{(2)} = \frac{\sum_{q=1}^{p} \phi_{iq} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\mathbf{e}_{q.}^{(2)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in I_{r_5,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{e}_{q.}^{(2)}$ – q-й рядок матриці $\mathbf{E}_2 := \mathbf{E}\mathbf{B}^*$ і за Теоремою 4.11

$$\phi_{iq} := \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\boldsymbol{\varphi}_{.\,q}^{M} \right) \right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\alpha \in I_{r_5,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q\,.} \left(\boldsymbol{\varphi}_{i.}^{A} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}_{.\,q}^{M} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_5,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q\,.} \left(\mathbf{c}_{f.}^{(1)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad f = 1, \ldots, n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{i\,.}^{A} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{c}_{.s}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times m}, \quad s = 1, \ldots, m,$$

а $\mathbf{c}_{f\,.}^{(1)}$ і $\mathbf{c}_{.s}^{(1)}$ є f-м рядком і s-м стовпцем $\mathbf{C}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{M}^*$. Побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq})$ та знайдемо $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{E}\mathbf{B}^*$. З того, що $\sum_q \phi_{iq}\mathbf{e}_{q.}^{(2)} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i\,.}$ випливає (4.56).

(iii) Для третього доданку розв'язку (4.50), $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger} := \mathbf{X}_3 = \left(x_{ij}^{(3)}\right)$ спочатку використаємо Теорему 4.11 для $\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}$. Таким чином,

$$\psi_{fj} := \sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{f\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\boldsymbol{\zeta}_{f\,.}^{N} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\beta \in J_{r_6,s}\{f\}} \operatorname{cdet}_f \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f} \left(\boldsymbol{\zeta}_{.j}^{B} \right) \right)_{\beta}^{\beta},$$

де

$$\boldsymbol{\zeta}_{f.}^{N} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_6,s}\{f\}} \operatorname{cdet}_f \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f} \left(\mathbf{d}_{.k}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times r}, \quad k = 1, \ldots, r,$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{.j}^{B} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\mathbf{d}_{l\,.}^{(1)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{s \times 1}, \quad l = 1, \ldots, s,$$

а $\mathbf{d}^{(1)}_{.k}$ і $\mathbf{d}^{(1)}_{l.}$ є k-м стовпцем і l-м рядком $\mathbf{D}_1 = \mathbf{N}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$. Побудуємо матрицю $\mathbf{\Psi} = (\psi_{fj}) \in \mathbb{H}^{s\times n}$ та знайдемо матрицю $\mathbf{E}_3 := \mathbf{E}\mathbf{\Psi}$. Для визначникового зображення матриці $\mathbf{C}^\dagger$ використаємо (2.7). Тоді

$$\upsilon_{tj} := \sum_{l=1}^{p} \sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}(\mathbf{c}_{.l})\right)^{\beta}_{\beta} \cdot e^{(3)}_{lj} = \sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}(\widetilde{\mathbf{e}}_{.j})\right)^{\beta}_{\beta},$$

де $e^{(3)}_{lj}$ – (lj)-й елемент матриці $\mathbf{E}_3$ та $\widetilde{\mathbf{e}}_{.j}$ - j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{E}} := \mathbf{C}^*\mathbf{E}\Psi$. Побудуємо матрицю $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{tj}) \in \mathbb{H}^{p\times n}$ та знайдемо матрицю $\mathbf{S}_1 := \mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$. Для визначникового зображення матриці $\mathbf{A}^\dagger$ використаємо (2.7). Тоді одержимо

$$x^{(3)}_{ij} = \frac{\sum_{f=1}^{m} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{a}^*_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta} \cdot s^{(1)}_{fj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in J_{r_6,s}} |\mathbf{N}^*\mathbf{N}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}}.$$

З того, що $\sum_{f=1}^{m} \mathbf{a}^*_{.f} \cdot s^{(1)}_{fj} = \widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$, де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ - j-й стовпець $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$, випливає (4.61).

(iv) Визначникові зображення (4.67) та (4.68) для першого доданку $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{M}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{D}^\dagger$ розв'язку (4.51) також безпосередньо випливають з Теореми 4.11 з врахуванням Зауваження 4.4.

(v) Розглянемо другий доданок $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Q}_S\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{N}^\dagger$ розв'язку (4.51). Застосувавши Теорему 4.11 для $\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{N}^\dagger$, одержимо

$$\omega_{tf} := \sum_{\alpha\in I_{r_6,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.}\left(\boldsymbol{\xi}^{C}_{t.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} = \sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}\left(\boldsymbol{\xi}^{N}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta},$$

де

$$\boldsymbol{\xi}^{C}_{t.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}\left(\mathbf{e}^{(5)}_{.k}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times q}, \quad k = 1,\ldots,q,$$

$$\boldsymbol{\xi}^{N}_{.f} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_6,q}\{j\}} \operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.}\left(\mathbf{e}^{(5)}_{l.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{s\times 1}, \quad l = 1,\ldots,p,$$

та $\mathbf{e}^{(5)}_{.k}$ і $\mathbf{e}^{(5)}_{l.}$ є k-м стовпцем і l-м рядком матриці $\mathbf{E}_5 = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{N}^*$. Побудуємо матрицю $\mathbf{\Omega} = (\omega_{tf})$. За формулою (2.14) дамо визначникове зображення проективної матриці $\mathbf{Q}_S$, тоді

$$y_{gf}^{(2)} = \frac{\sum_{t=1}^{p} \sum\limits_{\beta \in J_{r_7,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g \left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.\,g} \left(\dot{\mathbf{s}}_{.\,t}\right) \right)_{\beta}^{\beta} \cdot \omega_{tf}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,p}} |\mathbf{S}^*\mathbf{S}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_6,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

З того, що $\sum_{t=1}^{p} \dot{\mathbf{s}}_{.\,t}\omega_{tf} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.\,f}$ – f-у рядку матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}} := \mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{\Omega}$, отримаємо (4.71).

$\square$

Поклавши в умовах Теореми 4.14 всі стовпцеві та рядкові некомутативні визначники як визначники комплексних (дійсних) матриць одержимо наступний наслідок про правила Крамера для розв'язку комплексного узагальненого рівняння Сильвестра (4.45). Аналогічно, може побудувати відповідні правила Крамера для всіх часткових випадків комплексного рівняння Сильвестра, та особливого його випадку з $*$-ермітовістю.

Наслідок 4.3. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_{r_2}^{r\times s}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}_{r_3}^{m\times p}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{C}_{r_4}^{q\times s}$, $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_5$, $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_6$, $\operatorname{rank}\mathbf{S} = r_7$. *Тоді розв'язок (4.50)-(4.51),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $\mathbf{Y} = (y_{gf}) \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *рівняння (4.45) покомпонентно*

$$x_{ij} = x_{ij}^{(1)} - x_{ij}^{(2)} - x_{ij}^{(3)},\ y_{gf} = y_{gf}^{(1)} + y_{gf}^{(2)},$$

має наступні визначникові зображення.

(i)

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{d}_{.j}^{B}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_{\alpha}^{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}_{i.}^{A}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{B} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \left|(\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{e}_{k.}^{(1)}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{C}^{n\times 1}, \quad k = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{A} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{e}_{.l}^{(1)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{C}^{1\times r}, \quad l = 1,\ldots,r.$$

Тут $\mathbf{e}_{k.}^{(1)}$ *і* $\mathbf{e}_{.l}^{(1)}$ *є k-м рядком і l-м стовпцем матриці* $\mathbf{E}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{E}\mathbf{B}^*$.

(ii)

$$x_{ij}^{(2)}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in I_{r_5,m}}|\mathbf{MM}^*|_{\alpha}^{\alpha}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}}|\mathbf{BB}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ *- i-й рядок* $\widetilde{\mathbf{\Phi}}:=\mathbf{\Phi}\mathbf{E}\mathbf{B}^*$. *Матриця* $\mathbf{\Phi}=(\phi_{iq})$ *є така, що*

$$\phi_{iq}=\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\boldsymbol{\varphi}_{.\,q}^{M}\right)\right|_{\beta}^{\beta}=\sum_{\alpha\in I_{r_5,m}\{q\}}\left|(\mathbf{MM}^*)_{q.}\left(\boldsymbol{\varphi}_{i.}^{A}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha},$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}_{.\,q}^{M}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_5,m}\{q\}}\left|(\mathbf{MM}^*)_{q\,.}\left(\mathbf{c}_{f.}^{(1)}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}\right]\in\mathbb{C}^{n\times 1},\quad f=1,\ldots,n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{i\,.}^{A}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{c}_{.s}^{(1)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{C}^{1\times m},\quad s=1,\ldots,m.$$

Тут $\mathbf{c}_{f\,.}^{(1)}$ *і* $\mathbf{c}_{.s}^{(1)}$ *є f-м рядком і s-м стовпцем* $\mathbf{C}_1:=\mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{M}^*$.

(iii)

$$x_{ij}^{(3)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\left|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,p}}|\mathbf{C}^*\mathbf{C}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in J_{r_6,s}}|\mathbf{N}^*\mathbf{N}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}}|\mathbf{BB}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ *- j-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}}=\mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$. *Матриця* $\mathbf{\Upsilon}=(\upsilon_{tj})\in\mathbb{H}^{p\times n}$ *така, що*

$$\upsilon_{tj}=\sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}}\left|(\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}\left(\widetilde{\mathbf{e}}_{.j}\right)\right|_{\beta}^{\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{e}}_{.j}$ *- j-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{E}}=\mathbf{C}^*\mathbf{E}\Psi$, *а* $\mathbf{\Psi}=(\psi_{fj})\in\mathbb{C}^{s\times n}$ *задається умовою*

$$\psi_{fj}=\sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{t\}}\left|(\mathbf{BB}^*)_{j.}\left(\zeta_{f.}^{N}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}=\sum_{\beta\in J_{r_6,s}\{f\}}\left|(\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f}\left(\zeta_{.j}^{B}\right)\right|_{\beta}^{\beta},$$

де

$$\boldsymbol{\zeta}_{f.}^{N}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_6,s}\{f\}}\left|(\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f}\left(\mathbf{d}_{.k}^{(1)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{C}^{1\times r},\quad k=1,\ldots,r,$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{.j}^{B}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}}\left|(\mathbf{BB}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}_{l.}^{(1)}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}\right]\in\mathbb{C}^{s\times 1},\quad l=1,\ldots,s,$$

та $\mathbf{d}_{.k}^{(1)}$ *і* $\mathbf{d}_{l.}^{(1)}$ *є* k*-м стовпцем і* l*-м рядком матриці* $\mathbf{D}_1 = \mathbf{N}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$.

(iv)

$$y_{gf}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,p}\{g\}} \left|(\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.g}\left(\mathbf{d}_{.f}^{D}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|_{\alpha}^{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.}\left(\mathbf{d}_{g.}^{M}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де

$$\mathbf{d}_{.f}^{D} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_4,q}\{f\}} \left|(\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.}\left(\mathbf{e}_{k.}^{(4)}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{C}^{p\times 1}, \quad k = 1, \ldots, p,$$

$$\mathbf{d}_{g.}^{M} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_5,p}\{g\}} \left|(\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.g}\left(\mathbf{e}_{.l}^{(4)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{C}^{1\times q}, \quad l = 1, \ldots, q.$$

Тут $\mathbf{e}_{k.}^{(4)}$ *і* $\mathbf{e}_{.l}^{(4)}$ *є* k*-м рядком і* l*-м стовпцем матриці* $\mathbf{E}_4 := \mathbf{M}^*\mathbf{E}\mathbf{D}^*$.

(v)

$$y_{gf}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,p}\{g\}} \left|(\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.g}\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.f}\right)\right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,p}} |\mathbf{S}^*\mathbf{S}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_6,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.f}$ - f*-й рядок* $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} := \mathbf{S}^*\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}$. *Матриця* $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{tf})$ *така, що*

$$\omega_{tf} = \sum_{\alpha \in I_{r_6,q}\{f\}} \left|(\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.}\left(\boldsymbol{\xi}_{t.}^{C}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \left|(\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}\left(\boldsymbol{\xi}_{.f}^{N}\right)\right|_{\beta}^{\beta},$$

де

$$\boldsymbol{\xi}_{t.}^{C} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \left|(\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}\left(\mathbf{e}_{.k}^{(5)}\right)\right|_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{C}^{1\times q}, \quad k = 1, \ldots, q,$$

$$\boldsymbol{\xi}_{.f}^{N} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_6,q}\{f\}} \left|(\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.}\left(\mathbf{e}_{l.}^{(5)}\right)\right|_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{C}^{s\times 1}, \quad l = 1, \ldots, p.$$

Тут $\mathbf{e}_{.k}^{(5)}$ *і* $\mathbf{e}_{l.}^{(5)}$ *є* k*-м стовпцем і* l*-м рядком матриці* $\mathbf{E}_5 = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{N}^*$.

Розв'язок рівняння (4.45) задається Теоремою 4.14, з якої випливає наступний алгоритм покомпонентного розв'язку.

Алгоритм 4.1. *(i) Для компоненти* $x_{ij}^{(1)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{E}\mathbf{B}^*$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^*$ *та значення сум мінорів* $\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta$, $\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_\alpha^\alpha$.
2. *За формулою (4.54) знаходимо вектор-стовпці* $\mathbf{d}_{.j}^B$ *для всіх* $j = 1, \ldots, r$, *або вектор-рядки* $\mathbf{d}_{i.}^A$ *за формулою (4.55) для всіх* $i = 1, \ldots, n$.
3. *Знаходимо* $x_{ij}^{(1)}$ *за формулами (4.52) або (4.53), в залежності від того, який вектор знайдено у попередньому пункті.*

(ii) Для компоненти $x_{ij}^{(2)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{M}^*$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{M}\mathbf{M}^*$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^*$ *та значення* $\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta$, $\sum\limits_{\beta\in I_{r_5,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|_\alpha^\alpha$, $\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_\alpha^\alpha$.
2. *Знаходимо вектор-стовпці* $\boldsymbol{\varphi}_{.k}^M$ *за формулою (4.59) для всіх* $k = 1, \ldots, m$, *або вектор-рядки* $\boldsymbol{\varphi}_{i.}^A$ *за формулою (4.60) для всіх* $i = 1, \ldots, n$.
3. *Знаходимо* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ik})$ *за формулою (4.57), якщо вище знайдені вектор-стовпці* $\boldsymbol{\varphi}_{.k}^M$, *чи за формулою (4.58), коли знайдені вектор-рядки* $\boldsymbol{\varphi}_{i.}^A$.
4. *Обчислюємо матрицю* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{E}\mathbf{B}^*$.
5. *За формулою (4.56) знаходимо* $x_{ij}^{(2)}$.

(iii) Для компоненти $x_{ij}^{(3)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{D}_1 = \mathbf{N}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{C}^*\mathbf{C}$, $\mathbf{N}^*\mathbf{N}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^*$ *та значення* $\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta$, $\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|_\beta^\beta$, $\sum\limits_{\alpha\in J_{r_6,s}} |\mathbf{N}^*\mathbf{N}|_\beta^\beta$, $\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_\alpha^\alpha$.
2. *Знаходимо вектор-рядки* $\boldsymbol{\zeta}_{v.}^N$ *за формулою (4.65) для всіх* $v = 1, \ldots, s$, *або вектор-стовпці* $\boldsymbol{\zeta}_{.j}^B$ *за формулою (4.66) для всіх* $j = 1, \ldots, r$.
3. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{fj})$ *за формулою (4.63), коли вище знайдені вектор-рядки* $\boldsymbol{\zeta}_{f.}^N$, *чи за (4.64), коли – вектор-стовпці* $\boldsymbol{\zeta}_{.j}^B$.
4. *Обчислюємо матрицю* $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{\Phi}$.
5. *За формулою (4.62) знаходимо матрицю* $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{tj})$, *а тоді* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$.
6. *Знаходимо* $x_{ij}^{(3)}$ *за формулою (4.61).*

(iv) Для компоненти $y_{gf}^{(1)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{E}_4 = \mathbf{M}^*\mathbf{E}\mathbf{D}^*$, $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$, $\mathbf{D}\mathbf{D}^*$ *і значення* $\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta}$, $\sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|_{\alpha}^{\alpha}$.
2. *Знаходимо вектор-стовпці* $\mathbf{d}_{.f}^{D}$ *за формулою (4.69) для всіх* $f = 1, \dots, q$, *або вектор-рядки* $\mathbf{d}_{g.}^{M}$ *за формулою (4.70) для всіх* $g = 1, \dots, p$.
3. *Знаходимо* $y_{gf}^{(1)}$ *за формулами (4.67) або (4.68), відповідно до того, які вектори знайдені у попередньому пункті.*

(v) *Для компоненти* $y_{gf}^{(2)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{E}_5 = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{N}^*$, $\mathbf{S}^*\mathbf{S}$, $\mathbf{C}^*\mathbf{C}$, $\mathbf{N}\mathbf{N}^*$ *та значення сум мінорів* $\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,p}} |\mathbf{S}^*\mathbf{S}|_{\beta}^{\beta}$, $\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|_{\beta}^{\beta}$, $\sum\limits_{\alpha \in I_{r_6,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|_{\alpha}^{\alpha}$.
2. *Знаходимо вектор-рядки* $\boldsymbol{\xi}_{t.}^{C}$ *за формулою (4.74) для всіх* $t = 1, \dots, p$, *або вектор-стовпці* $\boldsymbol{\xi}_{.f}^{N}$ *за формулою (4.75) для всіх* $f = 1, \dots, q$.
3. *Знаходимо матрицю* $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{tf})$ *за формулою (4.72), коли вище є знайдені вектор-рядки* $\boldsymbol{\xi}_{t.}^{C}$, *або за формулою (4.73), коли знайдені вектор-стовпці* $\boldsymbol{\xi}_{.f}^{N}$.
4. *Обчислюємо матрицю* $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{S}^*\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}$.
5. *Знаходимо* $y_{gf}^{(2)}$ *за формулою (4.71).*

4.2.2. Правила Крамера для часткових випадків узагальненого кватерніонового рівняння Сильвестра. В цьому пункті розглянемо часткові випадки рівняння (4.45) коли один чи обидва доданки рівняння є односторонніми.

1. Нехай в рівнянні (4.45) матриця $\mathbf{B}$ є одиничною, тобто $\mathbf{B} = \mathbf{I}_s$. Тоді

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{C}\mathbf{Y}\mathbf{D} = \mathbf{E}, \tag{4.76}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m\times s}$ – відомі, а матриці $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times s}$ і $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{p\times q}$ є невідомими. Оскільки $\mathbf{L}_B = \mathbf{R}_B = \mathbf{0}$, $\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L}_B = \mathbf{0}$, та $\mathbf{L}_N = \mathbf{R}_N = \mathbf{I}$ і враховуючи спрощення (4.48), тоді отримаємо наступний аналог Леми 4.6.

Лема 4.8. *Нехай* $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{D}$, $\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{L}_M$. *Тоді наступні твердження є еквівалентним.*

(i) Рівняння (4.76) має розв'язки.

(ii) $\mathbf{R}_M\mathbf{R}_A\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_A\mathbf{W}\mathbf{E}\mathbf{L}_D = \mathbf{0}$.

(iii) $\mathbf{P}_M\mathbf{R}_A\mathbf{E}\mathbf{Q}_D = \mathbf{R}_A\mathbf{E}$.

(iv) $\operatorname{rank}\left[\mathbf{A}\ \mathbf{C}\ \mathbf{E}\right] = \operatorname{rank}\left[\mathbf{A}\ \mathbf{C}\right]$, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{E}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{bmatrix}$.

В цьому випадку розв'язок рівняння (4.76) представляється як,

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =&\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{D} + \mathbf{L}_A\mathbf{U},\\ \mathbf{Y} =&\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger} + \mathbf{L}_M\mathbf{V} + \mathbf{W}\mathbf{R}_D,\end{aligned}$$

де $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *та* $\mathbf{W}$ *– довільні матриці відповідних розмірів.*

Поклавши $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ і $\mathbf{W}$ як нульові, отримаємо розв'язок рівняння (4.76),

$$\mathbf{X} =\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}, \tag{4.77}$$

$$\mathbf{Y} =\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger}. \tag{4.78}$$

Далі одержимо визначникові зображення розв'язків (4.77)-(4.78).

Теорема 4.15. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}_{r_2}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}_{r_3}$, *і* $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_4$. *Тоді розв'язок* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times s}$ *заданий формулою (4.77) має визначникове зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,p}} \left|\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right|^{\beta}_{\beta}}, \tag{4.79}$$

де $\mathbf{e}^{(1)}_{.j}$ *– j-й стовпець матриці* $\mathbf{E}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{E}$ *та* $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$ *– j-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$. *Матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{tj})$ *така, що*

$$\phi_{tj} := \sum_{\beta\in J_{r_4,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{.t}\left(\mathbf{e}^{(2)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta},$$

де $\mathbf{e}^{(2)}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{E}_2 := \mathbf{M}^*\mathbf{E}$*. Розв'язок* $\mathbf{Y} = (y_{gf}) \in \mathbb{H}^{p\times q}$ *з (4.78) має визначникові зображення*

$$y_{gf} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{.g}\left(\mathbf{d}^D_{.f}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|^\alpha_\alpha} = \tag{4.80}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{D}\mathbf{D}^*\right)_{f.}\left(\mathbf{d}^M_{g.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|^\alpha_\alpha}, \tag{4.81}$$

де

$$\mathbf{d}^D_{.f} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_3,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{D}\mathbf{D}^*\right)_{f.}\left(\mathbf{e}^{(3)}_{k.}\right)\right)^\alpha_\alpha\right] \in \mathbb{H}^{p\times 1}, \quad k = 1,\ldots,p,$$

$$\mathbf{d}^M_{g.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_4,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{.g}\left(\mathbf{e}^{(3)}_{.l}\right)\right)^\beta_\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times q}, \quad l = 1,\ldots,q,$$

є вектор-стовпцем та вектор-рядком, відповідно; а $\mathbf{e}^{(3)}_{k.}$ *і* $\mathbf{e}^{(3)}_{.l}$ *–* k*-й рядок та* l*-й стовпець матриці* $\mathbf{E}_3 := \mathbf{M}^*\mathbf{C}\mathbf{D}^*$*.*

Доведення. Визначникове зображення першого доданку $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{E}$ очевидно випливає при застосуванні Теореми 4.2.

Для другого доданку $\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{E}$, застосувавши Теорему 4.2 двічі, одержимо

$$x^{(2)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{p}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{c}^{(1)}_{.t}\right)\right)^\beta_\beta \sum\limits_{\beta\in J_{r_4,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{.t}\left(\mathbf{e}^{(2)}_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^\beta_\beta \sum\limits_{\beta\in J_{r_4,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|^\beta_\beta},$$

де $\mathbf{c}^{(1)}_{.t}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{C}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}$ і $\mathbf{e}^{(2)}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{E}_2 := \mathbf{M}^*\mathbf{E}$. Позначимо

$$\phi_{tj} := \sum_{\beta\in J_{r_4,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{.t}\left(\mathbf{e}^{(2)}_{.j}\right)\right)^\beta_\beta$$

та побудуємо матрицю $\Phi = (\phi_{tj})$. Тоді з того, що $\sum_t \mathbf{c}^{(1)}_{.t}\phi_{tj} = \widetilde{\phi}_{.j}$, – j-у стовпцю матриці $\widetilde{\Phi} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\Phi$, випливає (4.79).

Визначникове зображення $\mathbf{Y}$ з (4.78), очевидно, випливає з Теореми 4.11. $\square$

2. Нехай тепер в рівнянні (4.45) матриця $\mathbf{A}$ буде одиничною. Тоді маємо

$$\mathbf{XB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}, \tag{4.82}$$

де $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m\times s}$ – відомі матриці, $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{m\times r}$ та $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{p\times q}$ – невідомі матриці. Оскільки $\mathbf{L}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{CL}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}_M = \mathbf{I}$ та $\mathbf{S} = \mathbf{CL}_M = \mathbf{C}$, одержимо наступний аналог Леми 4.6.

Лема 4.9. *Нехай $\mathbf{N} = \mathbf{DL}_B$. Тоді наступні твердження є еквівалентними.*

(i) *Рівняння (4.82) має розв'язки.*

(ii) $\mathbf{EL}_D\mathbf{L}_N = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_C\mathbf{EL}_B = \mathbf{0}$.

(iii) $\mathbf{P}_C\mathbf{EL}_B\mathbf{P}_N = \mathbf{EL}_B$.

(iv) $\operatorname{rank}[\mathbf{B}^*\ \mathbf{D}^*\ \mathbf{E}^*] = \operatorname{rank}[\mathbf{B}^*\ \mathbf{D}^*]$, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{E}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$.

У цьому випадку, загальний розв'язок рівняння (4.82) виражається як

$$\mathbf{X} = \mathbf{EB}^\dagger - \mathbf{P}_C\mathbf{EN}^\dagger\mathbf{DB}^\dagger - \mathbf{CVR}_N\mathbf{DB}^\dagger + \mathbf{ZR}_B,$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}^\dagger\mathbf{EN}^\dagger + \mathbf{V} - \mathbf{Q}_C\mathbf{VP}_N + \mathbf{WR}_D,$$

де $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ *та* $\mathbf{W}$ *– довільні матриці відповідних розмірів.*

Поклавши $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ і $\mathbf{W}$ нульовими матрицями, одержимо наступний частковий розв'язок рівняння (4.82),

$$\mathbf{X} = \mathbf{EB}^\dagger - \mathbf{P}_C\mathbf{EN}^\dagger\mathbf{DB}^\dagger, \tag{4.83}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}^\dagger\mathbf{EN}^\dagger. \tag{4.84}$$

В наступній теоремі дамо визначникові зображення (4.83)-(4.84).

Теорема 4.16. *Нехай $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}_{r_1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}_{r_2}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}_{r_3}$, та $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_4$. Тоді розв'язок $\mathbf{X} = (x_{ij})$, який задається (4.83), має визначникове зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{BB}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{i.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}} |\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*|^\alpha_\alpha} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\Big((\mathbf{CC}^*)_{.i}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j})\Big)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,m}} |\mathbf{CC}^*|^\beta_\beta \sum\limits_{\beta\in J_{r_4,s}} |\mathbf{N}^*\mathbf{N}|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}} |\mathbf{BB}^*|^\alpha_\alpha}, \tag{4.85}$$

де $\mathbf{e}_{i.}^{(1)}$ *– i-й рядок матриці* $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}\mathbf{B}^*$ *та* $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$ *– j-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{C}\mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{\Phi}$ *і* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{lj})$ *така, що*

$$\phi_{lj} := \sum_{\beta \in J_{r_4,s}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.l} \left(\varphi^B_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta} = \sum_{\alpha \in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\varphi^N_{l.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha},$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}^B_{.j} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\mathbf{d}^{(1)}_{f.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{s\times 1}, \quad f = 1, \ldots, s,$$

$$\boldsymbol{\varphi}^N_{l.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_4,s}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.l} \left(\mathbf{d}^{(1)}_{.t} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad t = 1, \ldots, r,$$

а $\mathbf{d}^{(1)}_{f.}$ *і* $\mathbf{d}^{(1)}_{.t}$ *є f-м рядком і t-м стовпцем матриці* $\mathbf{D}_1 := \mathbf{N}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$.

Розв'язок (4.84) має визначникові зображення

$$y_{gf} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f \left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.} \left(\mathbf{d}^C_{g.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|^{\alpha}_{\alpha}} = \tag{4.86}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g \left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.g} \left(\mathbf{d}^N_{.f} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.87}$$

де

$$\mathbf{d}^C_{g.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_2,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g \left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.g} \left(\mathbf{e}^{(3)}_{.l} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times q}, \quad l = 1, \ldots, q,$$

$$\mathbf{d}^N_{.f} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_4,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f \left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.} \left(\mathbf{e}^{(3)}_{k.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{p\times 1}, \quad k = 1, \ldots, p,$$

а $\mathbf{e}^{(3)}_{.l}$ *та* $\mathbf{e}^{(3)}_{k.}$ *є l-м стовпцем та k-м рядком матриці* $\mathbf{E}_3 := \mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{N}^*$.

Доведення. Визначникове зображення першого доданку $\mathbf{X}_1 = \mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger}$, очевидно, випливає при застосуванні Теореми 4.4.

Розглянемо другий доданок $\mathbf{X}_2 = \mathbf{P}_C\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}$ розв'язку (4.83).

Використовуючи Теорему 4.11 для множника $\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}$ та Теорему 4.2 для множника $\mathbf{P}_C\mathbf{E}$ із застосуванням визначникового зображення (2.17) для проективної матриці $\mathbf{P}_C$, одержимо

$$x_{ij}^{(2)} = \frac{\sum_{l=1}^{s} \sum\limits_{\beta \in J_{r_2,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{C}\mathbf{C}^*)_{.i}(\mathbf{e}_{.l}^{(2)})\right)_{\beta}^{\beta} \phi_{lj}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,m}} |\mathbf{C}\mathbf{C}^*|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_4,s}} |\mathbf{N}^*\mathbf{N}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{e}_{.l}^{(2)}$ – l-й стовпець матриці $\mathbf{E}_2 := \mathbf{C}\mathbf{C}^*\mathbf{E}$ і за Теоремою 4.11

$$\phi_{lj} := \sum_{\beta \in J_{r_4,s}\{l\}} \operatorname{cdet}_l\left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.l}\left(\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{B}\right)\right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\alpha \in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\boldsymbol{\varphi}_{l.}^{N}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{B} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}_{f.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{s\times 1}, \quad f = 1, \ldots, s,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{l.}^{N} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_4,s}\{l\}} \operatorname{cdet}_l\left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.l}\left(\mathbf{d}_{.t}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad t = 1, \ldots, r,$$

а $\mathbf{d}_{f.}^{(1)}$ і $\mathbf{d}_{.t}^{(1)}$ є f-м рядком і t-м стовпцем матриці $\mathbf{D}_1 := \mathbf{N}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$. Побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{lj})$ та знайдемо $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{C}\mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{\Phi}$. З того, що $\sum_q \mathbf{e}_{.l}^{(2)}\phi_{lj} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$ випливає (4.85).

Визначникове зображення $\mathbf{Y}$ з (4.84), очевидно, випливає з Теореми 4.11.

□

3. Розглянемо випадок, коли обидві матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ у рівнянні (4.45) є одиничними. Тоді маємо рівняння

$$\mathbf{X} + \mathbf{C}\mathbf{Y}\mathbf{D} = \mathbf{E}, \tag{4.88}$$

де $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times r}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m\times r}$ – задані, $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{m\times r}$ та $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{p\times q}$ – невідомі.

Це рівняння є відоме як узагальнене рівняння Штейна. Воно має різнобічне практичне застосування (див., напр. [293, 294]) та обширну літературу (див., напр. [56, 82, 88, 221, 277]).

Оскільки $\mathbf{L}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{C}\mathbf{L}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}_M = \mathbf{I}$, and $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{L}_M = \mathbf{C}$, $\mathbf{L}_B = \mathbf{R}_B = \mathbf{0}$, $\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L}_B = \mathbf{0}$, та $\mathbf{L}_N = \mathbf{R}_N = \mathbf{I}$, тоді маємо наступну лему.

Лема 4.10. *Наступні твердження є еквівалентними.*

(i) Рівняння (4.88) має розв'язки.

(ii) $\mathbf{E}\mathbf{L}_D = \mathbf{0}$.

(iii) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{E}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}[\mathbf{D}]$, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{D}^* & \mathbf{E}^*\end{bmatrix} = \operatorname{rank}[\mathbf{D}^*]$.

У цьому випадку, розв'язок рівняння (4.88) виражаєтьcя наступним чином,

$$\mathbf{X} = \mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{D}, \tag{4.89}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V} + \mathbf{W}\mathbf{R}_D, \tag{4.90}$$

де $\mathbf{V}$ *та* $\mathbf{W}$ *– довільні матриці відповідних розмірів.*

Оскільки, визначникові зображення розв'язків (4.89)-(4.90) є очевидними, ми їх опустимо.

4. Нехай матриці $\mathbf{B}$ та $\mathbf{C}$ є одиничними в рівнянні (4.45). У цьому випадку отримаємо рівняння

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{D} = \mathbf{E}, \tag{4.91}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m\times s}$ – відомі матриці, $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times s}$ and $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{m\times q}$ – невідомі. Таке рівняння називають класичним рівнянням Сильвестра.

Отже, $\mathbf{L}_B = \mathbf{R}_B = \mathbf{0}$, $\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L}_B = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}_C = \mathbf{R}_C = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_C = \mathbf{I}$, $\mathbf{L}_N = \mathbf{R}_N = \mathbf{I}$, $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A$ та $\mathbf{S} = \mathbf{L}_M$. Оскільки, $\mathbf{R}_A$ є ортогональним проектором на ядро матриці $\mathbf{A}$, тоді

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}^\dagger\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{R}_A^\dagger = \mathbf{A}^\dagger(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{0},\\
&\mathbf{A}^\dagger\mathbf{L}_M = \mathbf{A}^\dagger(\mathbf{I} - \mathbf{R}_A^\dagger\mathbf{R}_A) = \mathbf{A}^\dagger,\\
&\mathbf{M}^\dagger\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_A^\dagger\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_A.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Враховуючи (4.92), має місце наступний аналог Леми 4.6.

Лема 4.11. *Наступні твердження є еквівалентними.*

(i) Рівняння (4.91) має розв'язки.

(ii) $\mathbf{R}_A\mathbf{E}\mathbf{L}_D = \mathbf{0}$.

(iii) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{E}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{bmatrix}$.

У цьому випадку, загальний розв'язок рівняння (4.91) представляється як

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{V}\mathbf{D} + \mathbf{L}_A\mathbf{U}, \tag{4.93}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R}_A\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger} + \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{V} + \mathbf{W}\mathbf{R}_D, \tag{4.94}$$

де $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *та* $\mathbf{W}$ *довільні матриці відповідних розмірів.*

Позначення $\mathbf{V}_1 := \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{V}$ in (4.93)-(4.94) дасть вираз загального розв'язку рівняння (4.91) аналогічний отриманому в [6].

Поклавши $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ та $\mathbf{W}$ як нульові матриці, одержимо наступний частковий розв'язок рівняння (4.91),

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E}, \tag{4.95}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger} - \mathbf{P}_A\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger}. \tag{4.96}$$

Теорема 4.17. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}_{r_2}$. *Тоді розв'язок (4.95) має наступні визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}}, \tag{4.97}$$

де $\mathbf{e}^{(1)}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\mathbf{E}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{E}$. *Визначниковим зображенням (4.96) є*

$$y_{gf} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{D}\mathbf{D}^*\right)_{f.}\left(\mathbf{e}^{(2)}_{g.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}} \left|\mathbf{D}\mathbf{D}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}} - \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{D}\mathbf{D}^*\right)_{f.}\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{g.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}} \left|\mathbf{D}\mathbf{D}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.98}$$

де $\mathbf{e}^{(2)}_{g.}$ *і* $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{g.}$ *є* g*-ми рядками матриць* $\mathbf{E}_2 := \mathbf{E}\mathbf{D}^*$ *та* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{E}\mathbf{D}^*$, *відповідно, а матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{gl})$ *така, що*

$$\phi_{gl} := \sum_{\alpha\in I_{r_1,m}\{l\}} \operatorname{rdet}_l\Big(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{l.}\left(\ddot{\mathbf{a}}^{(1)}_{g.}\right)\Big)^{\alpha}_{\alpha},$$

де $\ddot{\mathbf{a}}^{(1)}_{g.}$ *є* g*-м рядком матриці* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Доведення. Визначникові зображення $\mathbf{X}$ та першого доданку розв'язку $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger}$, аналогічно попередньому, випливають при застосуванні Теореми 4.2.

Розглянемо другий доданок $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{P}_A\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger}$. Використавши визначникові зображення (2.16) для проективної матриці $\mathbf{P}_A$ та (2.8) для матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{D}^{\dagger}$, одержимо

$$y_{gf}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{m} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,m}\{l\}} \operatorname{rdet}_l\Big((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{l.}\,(\ddot{\mathbf{a}}_{g.}^{(1)})\Big)_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.}\left(\mathbf{e}_{l.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{e}_{g.}^{(2)}$ та $\ddot{\mathbf{a}}_{g.}$ є g-ми рядками матриць $\mathbf{E}_2 := \mathbf{E}\mathbf{D}^*$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$, відповідно.

Позначимо

$$\phi_{gl} := \sum_{\alpha \in I_{r_1,m}\{l\}} \operatorname{rdet}_l((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{l.}\,(\ddot{\mathbf{a}}_{g.}))_{\alpha}^{\alpha},$$

побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{gl})$ та знайдемо матрицю $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{E}\mathbf{D}^*$. Тоді з того, що $\sum\limits_{l=1}^{m} \phi_{gl}\mathbf{e}_{l.}^{(2)} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{g.}$, – g-му рядку матриці $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$, випливає (4.98).

□

5. Нехай тепер у рівнянні (4.45) матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{D}$ є одиничними відповідних розмірів. Тоді маємо рівняння

$$\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{Y} = \mathbf{E}, \tag{4.99}$$

де $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m\times s}$ є заданими, а $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{m\times r}$ та $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{p\times s}$ – невідомі. Оскільки, $\mathbf{L}_A = \mathbf{R}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}_D = \mathbf{R}_D = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_D = \mathbf{I}$, $\mathbf{L}_M = \mathbf{R}_M = \mathbf{I}$, $\mathbf{N} = \mathbf{L}_B$ і $\mathbf{S} = \mathbf{C}$, а $\mathbf{L}_B$ є ортогональним проектором на ядро матриці $\mathbf{B}$, тоді

$$\begin{aligned} &\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{L}_B^{\dagger}\mathbf{B}^{\dagger} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{B})^{\dagger}\mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{R}_N\mathbf{B}^{\dagger} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_B\mathbf{L}_B^{\dagger})\mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}, \qquad \mathbf{L}_B\mathbf{N}^{\dagger} = \mathbf{L}_B\mathbf{L}_B^{\dagger} = \mathbf{L}_B. \end{aligned} \tag{4.100}$$

Враховуючи (4.100), має місце наступний аналог Леми 4.6.

Лема 4.12. *Наступні твердження є еквівалентними.*

(i) Рівняння (4.99) має розв'язок.

(ii) $\mathbf{R}_C\mathbf{E}\mathbf{L}_B = \mathbf{0}$.

(iii) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{E}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$.

У цьому випадку, загальним розв'язком рівняння (4.99) є

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{Z}\mathbf{R}_B, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{L}_B + \mathbf{L}_C\mathbf{V}\mathbf{L}_B,$$

де $\mathbf{V}$ *та* $\mathbf{Z}$ *– довільні матриці відповідних розмірів.*

Поклавши $\mathbf{V}$ та $\mathbf{Z}$ нульовими матрицями, одержимо наступний частковий розв'язок рівняння (4.99),

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger}, \tag{4.101}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E} - \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{Q}_B. \tag{4.102}$$

Теорема 4.18. *Нехай* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}_{r_1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}_{r_2}$. *Тоді (4.101) має визначникове зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.103}$$

де $\mathbf{e}^{(1)}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\mathbf{E}_1 := \mathbf{E}\mathbf{B}^*$. *Розв'язок (4.102) має визначникове зображення*

$$Y_{gf} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.g}\left(\mathbf{e}^{(2)}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta}} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.g}\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,s}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|^{\beta}_{\beta}}, \tag{4.104}$$

де $\mathbf{e}^{(2)}_{.f}$ *та* $\widetilde{\phi}_{.f}$ *є* f*-ми стовпцями матриць* $\mathbf{E}_2 := \mathbf{C}^*\mathbf{E}$ *та* $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\Phi$. *Матриця* $\widetilde{\Phi} = (\phi_{lf})$ *така, що*

$$\phi_{lf} = \sum_{\beta\in J_{r_1,s}\{l\}} \operatorname{cdet}_l\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.\,l}\left(\dot{\mathbf{b}}_{.\,f}\right)\right)^{\beta}_{\beta},$$

де $\dot{\mathbf{b}}_{.\,f}$ *–* f*-им стовпцем матриці* $\mathbf{B}^*\mathbf{B}$.

Доведення. Очевидно, що визначникове зображення $\mathbf{X}$ випливає з Теореми 4.4, а першого доданку розв'язку $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}$ з Теореми 4.2.

Розглянемо другий доданок $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{Q}_B$. Використавши визначникові зображення (2.14) для проективної матриці $\mathbf{Q}_B$ та (2.7) для матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{C}^{\dagger}$, одержимо

$$y_{gf}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{s} \sum\limits_{\beta \in J_{r_2,p}\{g\}} \mathrm{cdet}_g \left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.g} \left(\mathbf{e}_{.l}^{(2)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,s}\{l\}} \mathrm{cdet}_l \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.l} \left(\dot{\mathbf{b}}_{.f} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,s}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\mathbf{e}_{.l}^{(2)}$ є l-м стовпцем матриці $\mathbf{E}_2 := \mathbf{C}^*\mathbf{E}$ та $\dot{\mathbf{b}}_{.f}$ – f-м стовпцем матриці $\mathbf{B}^*\mathbf{B}$. Позначимо

$$\phi_{lf} := \sum_{\beta \in J_{r_1,s}\{l\}} \mathrm{cdet}_l \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.l} \left(\dot{\mathbf{b}}_{.f} \right) \right)_{\beta}^{\beta},$$

побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{lf})$ та знайдемо матрицю $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\mathbf{\Phi}$. Тоді з того, що $\sum\limits_{l=1}^{s} \mathbf{e}_{.l}^{(2)} \phi_{lf} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.f}$ – f-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$, випливає (4.104). $\square$

6. Розглянемо тепер випадок, коли обидві матриці $\mathbf{B}$ і $\mathbf{D}$ є одиничними в рівнянні (4.45), тобто, $\mathbf{B} = \mathbf{D} = \mathbf{I}_r$. Тоді будемо мати рівняння

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{C}\mathbf{Y} = \mathbf{E}, \tag{4.105}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m \times p}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m \times r}$ – задані, а матриці $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n \times r}$ та $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{p \times r}$ – невідомі. Тоді, $\mathbf{L}_B = \mathbf{R}_B = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}_D = \mathbf{R}_D = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_D = \mathbf{I}$ та $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Звідси, одержимо наступний аналог Леми 4.6.

Лема 4.13. *Нехай* $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{C}$, $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{L}_M$. *Наступні твердження є еквівалентними.*

(i) Рівняння (4.105) має розв'язки.

(ii) $\mathbf{R}_M\mathbf{R}_A\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

(iii) $\mathrm{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$.

У цьому випадку, загальний розв'язок рівняння (4.105) виражається як

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{V} + \mathbf{L}_A\mathbf{U},$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E} + \mathbf{L}_M\mathbf{V}.$$

де $\mathbf{U}$ *та* $\mathbf{V}$ *є довільними матрицями відповідних розмірів.*

Поклавши $\mathbf{U}$ і $\mathbf{V}$ нульовими, одержимо розв'язок рівняння (4.105)

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}, \tag{4.106}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}. \tag{4.107}$$

Наступна теорема доводиться аналогічно Теоремі 4.15.

Теорема 4.19. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}_{r_2}$, *та* $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_4$. *Тоді визначникове зображення (4.106) є таким же як (4.79), а розв'язок (4.107) має визначникове зображення*

$$y_{gf} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,p}\{g\}} \operatorname{cdet}_g \left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{.\,g} \left(\mathbf{e}^{(2)}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,p}} \left|\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right|^{\beta}_{\beta}},$$

де $\mathbf{e}^{(2)}_{.f}$ *є* f*-им стовпцем матриці* $\mathbf{E}_2 := \mathbf{M}^*\mathbf{E}$.

7. Розглянемо випадок, коли матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{C}$ є одиничними в рівнянні (4.45), тобто, $\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{I}_m$. В такому випадку маємо рівняння

$$\mathbf{XB} + \mathbf{YD} = \mathbf{E}, \tag{4.108}$$

де $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m\times s}$ є заданими, а $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{m\times r}$ and $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{m\times q}$ – невідомі. Оскільки $\mathbf{L}_A = \mathbf{R}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{C}\mathbf{L}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}_M = \mathbf{I}$, $\mathbf{L}_C = \mathbf{R}_C = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_C = \mathbf{Q}_C = \mathbf{I}$, and $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{L}_M = \mathbf{C}$, тоді має місце наступна лема.

Лема 4.14. *Нехай* $\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L}_B$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними.*

(i) *Рівняння (4.108) має розв'язки.*

(ii) $\mathbf{E}\mathbf{L}_D\mathbf{L}_N = \mathbf{0}$.

(iii) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{B}^* & \mathbf{D}^* & \mathbf{E}^*\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{B}^* & \mathbf{D}^*\end{bmatrix}$.

У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (4.108) виражається як

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{V}\mathbf{R}_N\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{Z}\mathbf{R}_B,$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger} + \mathbf{V}\mathbf{R}_N + \mathbf{W}\mathbf{R}_D,$$

де $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ *та* $\mathbf{W}$ *– довільні матриці відповідних розмірів.*

Поклавши $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ та $\mathbf{W}$ як нульові матриці, одержимо наступний частковий розв'язок рівняння (4.108)

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}, \tag{4.109}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}. \tag{4.110}$$

Теорема 4.20. *Нехай* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}_{r_1}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}_{r_3}$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_3$. *Тоді розв'язок (4.109)-(4.110) має визначникове зображення,*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}} - \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.111}$$

$$y_{gf} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f.}\left(\mathbf{e}^{(2)}_{g.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|^{\alpha}_{\alpha}}. \tag{4.112}$$

де $\mathbf{e}^{(1)}_{i.}$ *і* $\mathbf{e}^{(2)}_{g.}$ *є* i*-м та* g*-м рядками матриць* $\mathbf{E}_1 := \mathbf{E}\mathbf{B}^*$ *і* $\mathbf{E}_2 := \mathbf{E}\mathbf{N}^*$, *відповідно, та* $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ *є* i*-м рядком матриці* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{D}\mathbf{B}^*$. *При цьому матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{it})$ *така, що*

$$\phi_{it} := \sum_{\alpha\in I_{r_3,q}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\Big((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{t.}\,(\mathbf{e}^{(2)}_{i.})\Big)^{\alpha}_{\alpha}.$$

Доведення. Визначникові зображення $\mathbf{Y}$ та першого доданку розв'язку $\mathbf{X}_1 = \mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger}$, аналогічно випадку 4, випливають, застосувавши Теорему 4.4.

Розглянемо другий доданок $\mathbf{X}_2 = \mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}$. Використавши визначникові зображення (2.8) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{N}^{\dagger}$ і $\mathbf{B}^{\dagger}$, одержимо

$$x^{(2)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{q} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,q}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\Big((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{t\,.}\,(\mathbf{e}^{(2)}_{i\,.})\Big)^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{t\,.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\mathbf{e}^{(2)}_{i\,.}$ є i-м рядком матриці $\mathbf{E}_2 := \mathbf{E}\mathbf{N}^*$, а $\tilde{\mathbf{d}}_{t\,.}$ є t-м рядком матриці $\tilde{\mathbf{D}} := \mathbf{D}\mathbf{B}^*$. Позначимо

$$\phi_{it} := \sum_{\alpha\in I_{r_3,q}\{t\}} \operatorname{rdet}_t\Big((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{t.}\,(\mathbf{e}^{(2)}_{i.})\Big)^{\alpha}_{\alpha},$$

побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{it})$ та знайдемо матрицю $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{D}\mathbf{B}^*$. Тоді з того, що $\sum\limits_{t=1}^{m} \phi_{it}\tilde{\mathbf{d}}_{t.} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ є i-м рядком матриці $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$, випливає (4.111).

□

8. У цьому пункті також розглянемо два рівняння типу Ляпунова. Як відомо, матричним рівнянням Ляпунова називають рівняння $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^* = \mathbf{B}$. Застосування та дослідження рівняння Ляпунова розглядалися, зокрема, у [13, 58, 77, 80, 219, 236, 280]

Розглянемо рівняння,

$$\mathbf{AX} + \mathbf{X}^*\mathbf{B} = \mathbf{C}, \tag{4.113}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ і $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times m}$. Слідуючи за [193], наступна лема може бути узагальнена з матриць над полем комплексних чисел до матриць над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$.

Лема 4.15. *Якщо рівняння (4.113) має розв'язки і виконується умова*

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}_B\right) = \left[\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{P}_A\right)\mathbf{C}\mathbf{B}^\dagger\right]^*,$$

тоді

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{P}_B\right) \tag{4.114}$$

є розв'язком рівняння (4.113), при цьому $-\mathbf{R}_A\mathbf{C}\mathbf{L}_B = \mathbf{0}$.

Доведення. Доведення теореми повністю аналогічне ([193], Теорема 1). □

Теорема 4.21. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$ *і* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times m}_{r_2}$. *Тоді розв'язок* $\mathbf{X}_0 = (x_{ij})$ *рівняння (4.113) має наступні визначникові зображення,*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{c}^{(1)}_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^\beta_\beta} - \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.}(\mathbf{d}^A_{i.})\right)^\alpha_\alpha}{2\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,n}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^\alpha_\alpha}, \tag{4.115}$$

та

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{c}^{(1)}_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^\beta_\beta} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^\alpha_\alpha}{2\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,n}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^\alpha_\alpha}, \tag{4.116}$$

де $\mathbf{c}_{.j}^{(1)}$ *є* j*-им стовпцем матриці* $\mathbf{C}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}$, *а*

$$\mathbf{d}_{i\,.}^{A} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i} \left(\mathbf{c}_{.k}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{d}_{.\,j}^{B} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right)_{j.} \left(\mathbf{c}_{l.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1, \ldots, n,$$

є вектор-рядком та вектор-стовпцем, відповідно. $\mathbf{c}_{.k}^{(2)}$ *та* $\mathbf{c}_{l.}^{(2)}$ *є* k*-им стовпцем та* l*-им рядком матриці* $\mathbf{C}_2 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{B}^*$.

Доведення. Доведення, очевидно, випливає при застосуванні Теореми 4.2 до першого доданку розв'язку (4.114) та Теореми 4.11 до другого доданку. □

9. Останнім в цьому пункті, розглянемо рівняння,

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}^*\mathbf{A}^* = \mathbf{B}, \tag{4.117}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ та $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$. Ходжес [74] знайшов розв'язок цього рівняння над полем комплексних чисел та виразив його у термінах узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. Джорджевіч [44] узагальнив ці результати для лінійних операторів у гільбертовому просторі. Відповідно до [44, 74], наступна лема може бути узагальнена для рівняння (4.117) над $\mathbb{H}$.

Лема 4.16. *Наступні твердження є еквівалентними.*

(i) Рівняння (4.117) має розв'язок $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times m}$.

(ii) $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}$ *або* $\mathbf{R}_A\mathbf{B}\mathbf{R}_A = \mathbf{0}$.

У цьому випадку, загальний розв'язок рівняння (4.117) може бути виражений як

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}_A\right) + \mathbf{L}_A\mathbf{Y} + \mathbf{P}_A\mathbf{Z}\mathbf{A}^*, \tag{4.118}$$

де матриця $\mathbf{Z} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *задовольняє умову* $\mathbf{A}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^*)\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$ *та матриця* $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *– довільна.*

Доведення. Доведення є аналогічним до [44, Теорема 2.2]. □

Поклавши $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} = \mathbf{0}$, одержимо частковий розв'язок рівняння (4.117),

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}_A\right). \tag{4.119}$$

У наступній теоремі виводимо визначникове зображення розв'язку (4.119).

Теорема 4.22. *Нехай $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$. Тоді розв'язок (4.119) має визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{b}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}} - \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{d}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{2\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}\right)^2}, \tag{4.120}$$

та

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{b}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{d}_{.j}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{2\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}\right)^2}, \tag{4.121}$$

де $\mathbf{b}^{(1)}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{B}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{B}$, та

$$\mathbf{d}_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{b}^{(2)}_{.k}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad k = 1,\ldots,n,$$
$$\mathbf{d}_{\,.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_1,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{b}^{(2)}_{l.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1,\ldots,n,$$

є вектор-рядком та вектор-стовпцем, відповідно. $\mathbf{b}^{(2)}_{.k}$ та $\mathbf{b}^{(2)}_{l.}$ є k-им стовпцем та l-им рядком матриці $\mathbf{B}_2 := \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Доведення. Доведення аналогічне доведенню Теореми 4.21 та використовуючи той факт, що з Леми 1.18 та з Теореми про характеристичний многочлен ермітової матриці 1.17 випливає рівність

$$\sum_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}.$$

$\square$

4.2.3. Визначникові зображення загальних, ермітових та косо- ермітових розв'язків рівняння Сильвестра з $*$-ермітовістю. Багато дослідників також вивчають матричне рівняння типу Сильвестра з $*$-ермітовістю

$$\mathbf{AXA}^* + \mathbf{BYB}^* = \mathbf{C}. \tag{4.122}$$

Зокрема, Чанг і Ванг [27] отримали вирази для загального симетричного розв'язку та загального симетричного розв'язку з мінімальною нормою матричного рівняння (4.122) над полем дійсних чисел. Сюй та ін. [273] дали зображення нормального ермітового (косо-ермітового) розв'язку рівняння (4.122). Чжанг [290] отримав зображення загального ермітового невід'ємно-визначеного (відповідно додатно-визначеного) розв'язку рівняння (4.122) з комплексними матрицями. Юань та ін. [278] отримали вираз ермітового розв'язку для задачі про матричне наближення, пов'язаної з кватерніоновим матричним рівнянням (4.122). Ванг та ін. [257] дали необхідну та достатню умову існування та вираз для невід'ємно-визначеного розв'язку рівняння (4.122) над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$ використовуючи декомпозицію пари матриць. Ванг та ін. [254] встановили екстремуми рангів для загального (косо-)ермітового розв'язку рівняння (4.122) над $\mathbb{H}$.

Отже, розглянемо рівняння (4.122).

Оскільки, для довільної матриці $\mathbf{A}$ очевидно, що $\mathbf{Q}_{A^*} = (\mathbf{A}^*)^\dagger \mathbf{A}^* = \left(\mathbf{AA}^\dagger\right)^* = \mathbf{P}_A$, то $\mathbf{P}_{A^*} = \mathbf{Q}_A$, $\mathbf{L}_{A^*} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}_{A^*} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_A = \mathbf{R}_A$, та $\mathbf{R}_{A^*} = \mathbf{L}_A$. З цього випливає, що $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{B}$ та $\mathbf{N} = \mathbf{B}^*\mathbf{L}_{A^*} = \mathbf{B}^*\mathbf{R}_A = (\mathbf{R}_A\mathbf{B})^* = \mathbf{M}^*$, і ми одержимо наступний аналог Леми 4.6.

Лема 4.17. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times k}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times m}$. *Покладемо* $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{B}$, $\mathbf{S} = \mathbf{BL}_M$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними.*

(i) Рівняння (4.122) має розв'язок $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, *де* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{k\times k}$.

(ii) $\mathbf{R}_M\mathbf{R}_A\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_A\mathbf{C}\mathbf{R}_B = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}\mathbf{R}_B\mathbf{R}_M = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_B\mathbf{C}\mathbf{R}_A = \mathbf{0}$.

(iii) $\mathbf{Q}_M\mathbf{R}_A\mathbf{C}\mathbf{Q}_B = \mathbf{R}_A\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}_B\mathbf{C}\mathbf{R}_A\mathbf{Q}_M = \mathbf{C}\mathbf{R}_A$.

(iv) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^*\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^*\end{bmatrix}$,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^*\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^*\end{bmatrix}.$$

Загальний розв'язок рівняння (4.122) задається як

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =&\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{A}^{*,\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{A}^{*,\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{B}^{*,\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger}\mathbf{B}^{*}\mathbf{A}^{*,\dagger} -\\ &\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{L}_M\mathbf{B}^*\mathbf{A}^{*,\dagger} + \mathbf{L}_A\mathbf{U} + \mathbf{Z}\mathbf{L}_A,\\ \mathbf{Y} =&\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{B}^{*,\dagger} + \mathbf{Q}_S\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger} + \mathbf{L}_M(\mathbf{V} - \mathbf{Q}_S\mathbf{V}\mathbf{Q}_M) + \mathbf{W}\mathbf{L}_B.\end{aligned}$$

де $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ *та* $\mathbf{W}$ *– довільні матриці над* $\mathbb{H}$ *відповідних розмірностей.*

Поклавши матриці $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ та $\mathbf{W}$ нульовими, одержимо наступний частковий розв'язок рівняння (4.122),

$$\mathbf{X} =\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{A}^{*,\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{A}^{*,\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger}\mathbf{B}^{*}\mathbf{A}^{*,\dagger}, \tag{4.123}$$

$$\mathbf{Y} =\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{B}^{*,\dagger} + \mathbf{Q}_S\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger}. \tag{4.124}$$

Наступна теорема дає визначникове зображення розв'язку (4.123)-(4.124).

Теорема 4.23. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times k}_{r_2}$, $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_3$, $\operatorname{rank}\mathbf{S} = r_4$. *Тоді розв'язок (4.123)-(4.124) рівняння (4.122),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{Y} = (y_{pg}) \in \mathbb{H}^{k\times k}$, *покомпонентно як,* $x_{ij} = x_{ij}^{(1)} - x_{ij}^{(2)} - x_{ij}^{(3)}$, $y_{pg} = y_{pg}^{(1)} + y_{pg}^{(2)}$, *має наступні визначникові зображення:*

(i)

$$x_{ij}^{(1)} =\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2} = \tag{4.125}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{v}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2}, \tag{4.126}$$

де

$$\mathbf{v}_{i.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{c}^{(1)}_{.s} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{4.127}$$

$$\mathbf{v}_{.j} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} (\mathbf{c}^{(1)}_{f.}) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad f = 1, \ldots, n \tag{4.128}$$

вектор-рядок та вектор-стовпець, відповідно; $\mathbf{c}^{(1)}_{.s}$ *та* $\mathbf{c}^{(1)}_{f.}$ *є* s*-им стовпцем та* f*-им рядком матриці* $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{A}$.

(ii)

$$x^{(2)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} (\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}) \right)^{\alpha}_{\alpha}}{(\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta})^2 \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{4.129}$$

де $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\tilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *така, що*

$$\phi_{iq} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\boldsymbol{\eta}^{M}_{.q} \right) \right)^{\beta}_{\beta} = \sum_{\alpha \in I_{r_3,m}\{q\}} \mathrm{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\boldsymbol{\eta}^{A}_{i.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha}, \tag{4.130}$$

та

$$\boldsymbol{\eta}^{M}_{.q} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_3,m}\{q\}} \mathrm{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\mathbf{b}^{(1)}_{f.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad f = 1, \ldots, n, \tag{4.131}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{A}_{i.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{b}^{(1)}_{.s} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times m}, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{4.132}$$

Тут $\mathbf{b}^{(1)}_{f.}$ *і* $\mathbf{b}^{(1)}_{.s}$ *є* f*-м рядком та* s*-м стовпцем матриці* $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{M}^*$ *та* $\mathbf{c}^{(2)}_{q.}$ *є* q*-м рядком матриці* $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}$.

(iii)

$$x^{(3)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta}}{(\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta})^2 \sum\limits_{\beta \in J_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|^{\beta}_{\beta}}, \tag{4.133}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$, *а* $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{pj}) \in \mathbb{H}^{k\times n}$ *така, що*

$$\upsilon_{pj} = \sum_{\beta \in J_{r_2,k}\{p\}} \mathrm{cdet}_p \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.p} \left(\widetilde{\mathbf{c}}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta}, \tag{4.134}$$

де $\widetilde{\mathbf{c}}_{.j}$ *є* j*-м стовпцем матриці* $\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{B}^*\mathbf{C}\mathbf{\Phi}^*$ *і матриця* $\mathbf{\Phi}^*$ *є ермітово-спряженою до матриці* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq})$ *з (4.130).*

(iv)

$$y_{pg}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.p}\left(\mathbf{d}^B_{.g}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_\alpha^\alpha} = \tag{4.135}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.}\left(\mathbf{d}^M_{p.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_\alpha^\alpha}, \tag{4.136}$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.g} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.}\left(\mathbf{c}^{(4)}_{q.}\right)\right)_\alpha^\alpha\right] \in \mathbb{H}^{k\times 1}, \quad q = 1,\ldots,k, \tag{4.137}$$

$$\mathbf{d}^M_{p.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_3,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.p}\left(\mathbf{c}^{(4)}_{.l}\right)\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times k}, \quad l = 1,\ldots,k. \tag{4.138}$$

Тут $\mathbf{c}^{(4)}_{q.}$ *і* $\mathbf{c}^{(4)}_{.l}$ *є* q*-м рядком та* l*-м стовпцем матриці* $\mathbf{C}_4 := \mathbf{M}^*\mathbf{C}\mathbf{B}$.

(v)

$$y_{pg}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p\left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.p}\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.g}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,k}} |\mathbf{S}^*\mathbf{S}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta\in J_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_\alpha^\alpha}, \tag{4.139}$$

де $\tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{\Omega}$ *і матриця* $\mathbf{\Omega} = (\omega_{tg})$ *така, що*

$$\omega_{tg} = \sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.t}\left(\mathbf{d}^M_{.g}\right)\right)_\beta^\beta = \tag{4.140}$$

$$= \sum_{\alpha\in I_{r_3,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{g.}\left(\mathbf{d}^B_{t.}\right)\right)_\alpha^\alpha, \tag{4.141}$$

тут

$$\mathbf{d}^M_{.g} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_3,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{g.}\left(\mathbf{c}^{(4,*)}_{q.}\right)\right)_\alpha^\alpha\right] \in \mathbb{H}^{k\times 1}, \quad q = 1,\ldots,k, \tag{4.142}$$

$$\mathbf{d}^B_{t.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_3,k}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.t}\left(\mathbf{c}^{(4,*)}_{.l}\right)\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times k}, \quad l = 1,\ldots,k. \tag{4.143}$$

Тут $\mathbf{c}_{q.}^{(4,*)}$ *і* $\mathbf{c}_{.l}^{(4,*)}$ *є* q*-им рядком та* l*-им стовпцем матриці* $\mathbf{C}_4^* := \mathbf{M}^*\mathbf{C}\mathbf{B}$.

Доведення. (i) Для першого доданку розв'язку (4.123), $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{C} \left(\mathbf{A}^*\right)^\dagger = (x_{ij}^{(1)})$, маємо

$$x_{ij}^{(1)} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{t=1}^{m} a_{il}^\dagger c_{lt} a_{tj}^{*,\dagger}.$$

Використовуючи визначникові зображення (2.7) та (2.12) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^\dagger$ та $\left(\mathbf{A}^*\right)^\dagger$, відповідно, одержимо

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.l}^*\right)\right)_\beta^\beta c_{lt} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{t.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta}.$$

Нехай $\mathbf{e}_{l.}$ та $\mathbf{e}_{.t}$ є одиничними l-м вектор-рядком та t-м вектор-стовпцем, відповідно. Позначимо $\mathbf{C}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{A}$. Оскільки, $\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{m} a_{fl}^* c_{lt} a_{ts} = c_{fs}^{(1)}$, тоді

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{e}_{.f}\right)\right)_\beta^\beta c_{fs}^{(1)} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta}.$$

Якщо введемо

$$v_{is} := \sum_{f=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.f}\right)\right)_\beta^\beta c_{fs}^{(1)} = \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{c}_{.s}^{(1)}\right)\right)_\beta^\beta$$

– s-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{v}_{i.} = [v_{i1}, \ldots, v_{in}]$, тоді

$$\sum_{s=1}^{m} v_{is} \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}\right)\right)_\alpha^\alpha.$$

Очевидно, що $\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta = \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\alpha^\alpha$. Тоді перший доданок (4.123) має визначникове зображення (4.125), де $\mathbf{v}_{i.}$ знаходиться в (4.127).

Якщо позначимо

$$v_{fj}^{(2)} := \sum_{s=1}^{n} c_{fs}^{(1)} \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{c}_{f.}^{(1)}\right)\right)_\alpha^\alpha$$

як f-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{v}_{.j} = [v_{1j}, \ldots, v_{nj}]$, тоді

$$\sum_{f=1}^{n} \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} (\mathbf{e}_{.f}) \right)_{\beta}^{\beta} v_{fj} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} (\mathbf{v}_{.j}) \right)_{\beta}^{\beta}.$$

Звідки одержимо визначникове зображення (4.126) першого доданку розв'язку (4.123), де $\mathbf{v}_{.j}$ знаходиться з рівності (4.128).

(ii) Для другого доданку $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{A}^{*,\dagger} := \mathbf{X}_2 = \left(x_{ij}^{(2)} \right)$ розв'язку (4.123), маємо

$$x_{ij}^{(2)} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{m} \sum_{t=1}^{m} a_{il}^{\dagger} b_{lp} m_{pq}^{\dagger} c_{qt} a_{tj}^{*,\dagger}.$$

Використовуючи визначникове зображення (2.7) для матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\dagger}$, (2.8) – для $\mathbf{M}^{\dagger} = (m_{pq}^{\dagger})$ та (2.12) – для $(\mathbf{A}^*)^{\dagger}$, відповідно, одержимо

$$x_{ij}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{p=1}^{k}\sum\limits_{q=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{m} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} (\mathbf{a}_{.l}^*) \right)_{\beta}^{\beta} b_{lp} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} (\mathbf{m}_{p.}^*) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|_{\alpha}^{\alpha}} \times$$
$$\times \frac{c_{qt} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} (\mathbf{a}_{t.}) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Діючи як в пункті (i) доведення, отримаємо

$$\phi_{iq} := \sum_{l=1}^{m} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} (\mathbf{a}_{.l}^*) \right)_{\beta}^{\beta} b_{lp} \sum_{\alpha \in I_{r_3,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} (\mathbf{m}_{p.}^*) \right)_{\alpha}^{\alpha} =$$
$$= \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\eta_{.q}^{M} \right) \right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\alpha \in I_{r_3,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\eta_{i.}^{A} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}, \quad (4.144)$$

де

$$\boldsymbol{\eta}_{.q}^{M} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_3,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\mathbf{b}_{f.}^{(1)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad f = 1, \ldots, n,$$

$$\boldsymbol{\eta}_{i.}^{A} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{b}_{.s}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times m}, \quad s = 1, \ldots, m,$$

та $\mathbf{b}_{f.}^{(1)}$ і $\mathbf{b}_{.s}^{(1)}$ є f-м рядком і s-м стовпцем матриці $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{M}^*$. Побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ таку, що ϕ_{iq} задаються формулою (4.144), і позначимо $\tilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{A}$. Оскільки,

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}\phi_{iq}c_{qt}\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\mathbf{a}_{t.})_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\tilde{\phi}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha},\right.$$

де $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\tilde{\mathbf{\Phi}}$, тоді одержимо (4.129).

(iii) Для третього доданку $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger}\mathbf{B}^*\mathbf{A}^{*,\dagger} := \mathbf{X}_3 = \left(x_{ij}^{(3)}\right)$ розв'язку (4.123), використаємо визначникове зображення (2.7) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^\dagger$ та $(\mathbf{B})^\dagger$. Тоді враховуючи те, що $\mathbf{M}^{*,\dagger}\mathbf{B}^*\mathbf{A}^{*,\dagger} = (\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger)^*$, за Теоремою 4.2 маємо

$$x_{ij}^{(3)} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{p=1}^{k}\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{s}_{.p}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,k}\{p\}}\operatorname{cdet}_p\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.p}\left(\mathbf{c}_{.t}^{(3)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\phi_{tj}^*}{(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_{\beta}^{\beta})^2\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,k}}|\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,m}}|\mathbf{M}\mathbf{M}^*|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\mathbf{s}_{.p}^{(1)}$ – p-й стовпець матриці $\mathbf{S}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{S}$, $\mathbf{c}_{.t}^{(3)}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{C}_3 := \mathbf{B}^*\mathbf{C}$, ϕ_{tj}^* – tj-й елемент матриці $\mathbf{\Phi}^*$, що є ермітово-спряженою до матриці $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq})$ з (4.144). Позначимо $\mathbf{C}_3\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{B}^*\mathbf{C}\mathbf{\Phi}^* =: \widetilde{\mathbf{C}}$. Тоді,

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{p\}}\operatorname{cdet}_p\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.p}\left(\mathbf{c}_{.t}^{(3)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\phi_{tj}^* = \sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{p\}}\operatorname{cdet}_p\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.p}(\widetilde{\mathbf{c}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}.$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{pj}) \in \mathbb{H}^{k\times n}$ таку, що

$$\upsilon_{pj} = \sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{p\}}\operatorname{cdet}_p\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.p}(\widetilde{\mathbf{c}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}.$$

Позначимо $\mathbf{S}_1\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon} =: \widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = (\widetilde{\upsilon}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Оскільки,

$$\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{s}_{.p}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\upsilon_{pj} = \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta},$$

то з цього кінцево випливає (4.133).

(iv) За Теоремою 4.11 і подібно тому, що було викладено вище, для першого доданку $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{B}^{*,\dagger} = (y_{pg}^{(1)})$ розв'язку (4.124), маємо визначникові зображення (4.135) та (4.136).

(v) Нарешті, для другого доданку $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Q}_S\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger} = \left(y_{pg}^{(2)}\right)$ розв'язку (4.124) використовуючи (2.14) для визначникового зображення $\mathbf{Q}_S$, і за Теоремою 4.11 для $\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger}$, одержимо

$$y_{pg}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{k}\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p\left(\left(\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right)_{.p}\left(\ddot{\mathbf{s}}_{.t}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\omega_{tg}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,k}}\left|\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,k}}\left|\mathbf{B}^*\mathbf{B}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,k}}\left|\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де

$$\omega_{tg} = \sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{B}^*\mathbf{B}\right)_{.t}\left(\mathbf{d}_{.g}^{M}\right)\right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\alpha\in I_{r_3,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{g.}\left(\mathbf{d}_{t.}^{B}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}, \quad (4.145)$$

та

$$\mathbf{d}_{.g}^{M} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_3,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{g.}\left(\mathbf{c}_{q.}^{(4,*)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{k\times 1}, \quad q = 1,\ldots,k,$$

$$\mathbf{d}_{t.}^{B} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_3,k}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{B}^*\mathbf{B}\right)_{.t}\left(\mathbf{c}_{.l}^{(4,*)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times k}, \quad l = 1,\ldots,k,$$

Тут $\mathbf{c}_{q.}^{(4,*)}$ і $\mathbf{c}_{.l}^{(4,*)}$ є q-м рядком та l-м стовпцем матриці $\mathbf{C}_4^* := \mathbf{M}^*\mathbf{C}\mathbf{B}$. Будуємо матрицю $\mathbf{\Omega} = (\omega_{tg}) \in \mathbb{H}^{k\times k}$ таку, що ω_{tg} визначається в (4.145) і позначимо $\tilde{\mathbf{\Omega}} := \mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{\Omega}$. Оскільки,

$$\sum_{t=1}^{k}\sum_{\beta\in J_{r_4,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p\left(\left(\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right)_{.p}\left(\ddot{\mathbf{s}}_{.t}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\omega_{tg} = \sum_{\beta\in J_{r_4,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p\left(\left(\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right)_{.p}\left(\widetilde{\omega}_{.g}\right)\right)_{\beta}^{\beta},$$

то звідси випливає (4.139). □

Таким чином, правило Крамера для матричного рівняння (4.122) типу Сильвестра з $*$-ермітовістю має наступний алгоритм.

Алгоритм 4.2. *(i) Для компоненти* $x_{ij}^{(1)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, *і значення мінорних сум* $\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}$.
2. *Знаходимо вектор-рядки* $\mathbf{v}_{i.}$ *за формулою (4.127) або вектор-стовпці* $\mathbf{v}_{.j}$ *за формулою (4.128) для всіх* $i, j = 1,\ldots,n$.

3. *Знаходимо* $x_{ij}^{(1)}$ *за формулою (4.125) або (4.126), відповідно до того, який вектор знайдено у попередньому пункті.*

(ii) *Для компоненти* $x_{ij}^{(2)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{M}^*$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{M}\mathbf{M}^*$ *і значення* $\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta$, $\sum\limits_{\beta\in I_{r_3,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|_\alpha^\alpha$.
2. *Знаходимо вектор-стовпці* $\boldsymbol{\eta}_{.q}^M$ *за формулою (4.131) для всіх* $q = 1, \ldots, m$, *або вектор-рядки* $\boldsymbol{\eta}_{i.}^A$ *за формулою (4.132) для всіх* $i = 1, \ldots, n$.
3. *Знаходимо матрицю* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ik})$ *за одним із випадків з формули (4.130) відповідно до того вектор-стовпці* $\boldsymbol{\eta}_{.q}^M$ *чи вектор-рядки* $\boldsymbol{\eta}_{i.}^A$ *знайдені у попередньому пункті.*
4. *Обчислюємо матрицю* $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{A}$.
5. *Знаходимо* $x_{ij}^{(2)}$ *за формулою (4.129).*

(iii) *Для компоненти* $x_{ij}^{(3)}$.

1. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Phi}^*$, *яка ермітово-спряженою до матриці* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq})$ *з (4.130), а також матриці* $\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{B}^*\mathbf{C}\mathbf{\Phi}^*$, $\mathbf{\Upsilon}$ *за формулою (4.134) та* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$.
2. *Знаходимо* $x_{ij}^{(3)}$ *за формулою (4.133).*

(iv) *Для компоненти* $y_{gf}^{(1)}$.

1. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{C}_4 = \mathbf{M}^*\mathbf{C}\mathbf{B}$.
2. *Обчислюємо вектор-стовпці* $\mathbf{d}_{.g}^B$ *за формулою (4.137) або вектор-рядки* $\mathbf{d}_{p.}^M$ *за формулою (4.138) для всіх* $g, p = 1, \ldots, k$.
3. *Знаходимо* $y_{gf}^{(1)}$ *за формулами (4.135) або (4.136) в залежності від того, які вектори знайдені у попередньому пункті.*

(v) *Для компоненти* $y_{gf}^{(2)}$.

1. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{C}_4^*$, *що є ермітово-спряженою до матриці* $\mathbf{C}_4$, *яка отримана вище.*

2. *Обчислюємо вектор-рядки* $\mathbf{d}^B_{t.}$ *за формулою (4.143) або вектор-стовпці* $\mathbf{d}^M_{.g}$ *за формулою (4.142) для всіх* $t, g = 1, \ldots, k$.

3. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Omega} = (\omega_{tg})$ *за формулою (4.145), коли вище знайдені вектор-стовпці* $\mathbf{d}^M_{.g}$, *або за (4.141), – коли вектор-рядки* $\mathbf{d}^B_{t.}$.

4. *Обчислюємо матрицю* $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{\Omega}$.

5. *Знаходимо* $y^{(2)}_{gf}$ *за формулою (4.139).*

Відповідно до [273], наступна теорема узагальнюється на множину матриць над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$.

Лема 4.18. *Нехай матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *and* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *та* $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *є заданими з умовою* $\mathbf{C} = \mathbf{C}^*(= -\mathbf{C}^*)$. *Тоді якщо рівняння (4.122) має розв'язки, тоді воно має ермітовий (косо-ермітовий) розв'язки.*

Загальний ермітовий розв'язок рівняння (4.122) може бути виражений як $\widehat{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^*)$, $\widehat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^*)$, де $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ є довільним розв'язком рівняння (4.122). Оскільки, за Лемою 4.18, існування ермітового розв'язку рівняння (4.122) вимагає, щоб матриця $\mathbf{C}$ була ермітовою, тоді

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^* =& \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{A}^{*,\dagger} - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger}\mathbf{B}^*\mathbf{A}^{*,\dagger} - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{B}^{*,\dagger}\mathbf{S}^*\mathbf{A}^{*,\dagger},\\
\mathbf{Y}^* =& \mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger} + \mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{B}^{*,\dagger}\mathbf{Q}_S.
\end{aligned}$$

За Лемою 4.18, якщо $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^*$ та (4.122) має розв'язки, тоді воно має косо-ермітові розв'язки. Враховуючи умову $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^*$ для $\mathbf{X}^*$ ермітово-спряженого до $\mathbf{X}$ зі (4.123) та для $\mathbf{Y}^*$ ермітово-спряженого до $\mathbf{Y}$ зі (4.124), маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^* =& -\mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{A}^{*,\dagger} + \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger}\mathbf{B}^*\mathbf{A}^{*,\dagger} + \mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{B}^{*,\dagger}\mathbf{S}^*\mathbf{A}^{*,\dagger},\\
\mathbf{Y}^* =& -\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{M}^{*,\dagger} - \mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\mathbf{B}^{*,\dagger}\mathbf{Q}_S.
\end{aligned}$$

Загальний косо-ермітовий розв'язок рівняння (4.122) може бути виражений як $\widetilde{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)$, $\widetilde{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^*)$, де $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ – довільний розв'язок рівняння (4.122). Очевидно, що визначникові зображення ермітового розв'язку $\widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{x}_{ij})$, $\widehat{\mathbf{Y}} = (\widehat{y}_{ij})$ та косо-ермітового розв'язку $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{x}_{ij})$, $\widetilde{\mathbf{Y}} = (\widetilde{y}_{ij})$ співпадають і можуть бути знайдені як

$$\widehat{x}_{ij} = \widetilde{x}_{ij} = \frac{1}{2}\left(x_{ij} + \overline{x_{ji}}\right) = x_{ij}^{(1)} - \frac{1}{2}\left(x_{ij}^{(2)} + \overline{x_{ji}^{(2)}}\right) - \frac{1}{2}\left(x_{ij}^{(3)} + \overline{x_{ji}^{(3)}}\right),$$
$$\widehat{y}_{pg} = \widetilde{y}_{pg} = \frac{1}{2}\left(y_{pg} + \overline{y_{gp}}\right) = \frac{1}{2}\left(y_{pg}^{(1)} + \overline{y_{gp}^{(1)}}\right) + \frac{1}{2}\left(y_{pg}^{(2)} + \overline{y_{gp}^{(2)}}\right)$$

де x_{ij} і y_{pg} визначаються Теоремою 4.23.

4.2.4. Визначникові зображення загальних, η-ермітових та η- косо–ермітових розв'язків рівняння Сильвестра з η-ермітовістю. Останнім часом η-ермітові матриці стали об'єктом багатьох досліджень. Зокрема, сингулярний розклад η-ермітової матриці розглядався в [76]. Лю [158] знайшов η-косо-ермітові розв'язки для деяких класичних матричних рівнянь і, серед них, узагальнене матричне рівняння типу Сильвестра. Хе і Ванг [69] дали загальний розв'язок кватерніонового рівняння типу Сильвестра, що містить η-ермітовість та виразили загальний η-ермітовий розв'язок в термінах узагальнених обернених матриць.

Розглянемо рівняння Сильвестра з η-ермітовістю,

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^{\eta*} + \mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{B}^{\eta*} = \mathbf{C}. \tag{4.146}$$

Оскільки, згідно з рівнянням (4.45), $\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\eta*}\mathbf{L}_{A^{\eta*}} = (\mathbf{R}_A\mathbf{B})^{\eta*} = \mathbf{M}^{\eta*}$, $\mathbf{R}_N\mathbf{B}^{\eta*} = (\mathbf{B}\mathbf{L}_M)^{\eta*} = \mathbf{S}^{\eta*}$, тоді відповідно до [252], одержимо наступну Лемму про розв'язок рівняння (4.146).

Лема 4.19. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times k}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *- задані матриці. Покладемо* $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{B}$, $\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{L}_M$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

(1) Рівняння (4.146) має розв'язок $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

(2) $\mathbf{R}_M\mathbf{R}_A\mathbf{C} = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_A\mathbf{C}\left(\mathbf{R}_B\right)^{\eta*} = \mathbf{0}$.

(3) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{\eta*}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}) + \operatorname{rank}(\mathbf{B})$, $\operatorname{rank}\left[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\right] = \operatorname{rank}\left[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\right]$.

У цьому випадку загальний розв'язок (4.146) може бути виражений як

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =&\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta*} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)^{\eta*} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*} - \\ &- \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{W}_2\left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\right)^{\eta*} + \mathbf{L}_A\mathbf{U} + \mathbf{Z}\mathbf{L}_A^{\eta*},\\ \mathbf{Y} =&\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta*} + \mathbf{Q}_S\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*} + \mathbf{L}_M\mathbf{W}_2\mathbf{L}_M^{\eta} + \mathbf{V}\mathbf{L}_B^{\eta} + \mathbf{L}_M\mathbf{L}_S\mathbf{W}_1,\end{aligned}$$

де $\mathbf{U},\ \mathbf{V},\ \mathbf{W}_1,\ \mathbf{W}_2$ *і* $\mathbf{Z}$ *довільні кватерніонові матриці відповідних розмірів.*

Поклавши $\mathbf{Z},\ \mathbf{U},\ \mathbf{V},\ \mathbf{W}_1$ та $\mathbf{W}_2$ як нульові матриці, одержимо наступний частковий розв'язок рівняння (4.146)

$$\mathbf{X} =\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta*} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)^{\eta*} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*}, \tag{4.147}$$

$$\mathbf{Y} =\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta*} + \mathbf{Q}_S\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*}. \tag{4.148}$$

Наступна теорема дає визначникові зображення розв'язку (4.147)-(4.148).

Теорема 4.24. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times k}_{r_2}$, $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_3$, $\operatorname{rank}\mathbf{S} = r_4$. *Тоді частковий розв'язок (4.147)-(4.148) рівняння (4.146),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{Y} = (y_{pg}) \in \mathbb{H}^{k\times k}$, *покомпонентно* $x_{ij} = x_{ij}^{(1)} - x_{ij}^{(2)} - x_{ij}^{(3)}$, $\ y_{pg} = y_{pg}^{(1)} + y_{pg}^{(2)}$, *має наступні визначникові зображення,*

(i)

$$x_{ij}^{(1)} =\frac{-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}^{\eta}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2} = \tag{4.149}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{u}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2}, \tag{4.150}$$

де

$$\mathbf{v}_{i.}^{\eta} = \left[-\eta\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\widehat{\mathbf{a}}_{.s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\eta\right] \in \mathbb{H}^{1\times n},\ s = 1,\ldots,n, \tag{4.151}$$

$$\mathbf{u}_{.j} = \left[-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}(\widehat{\mathbf{a}}_{l.}^{\eta})\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1},\ l = 1,\ldots,n. \tag{4.152}$$

Тут $\widehat{\mathbf{a}}_{.s}$ *є* s*-им стовпцем матриці* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{A}^\eta$ *і* $\widehat{\mathbf{a}}^\eta_{l.}$ *–* l*-й рядок матриці* $\widehat{\mathbf{A}}^\eta = \mathbf{A}^{\eta *}\mathbf{C}^\eta\mathbf{A}$.

(ii)

$$x_{ij}^{(2)} = \frac{-\eta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}) \right)_\alpha^\alpha \eta}{(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta)^2 \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|_\alpha^\alpha}, \tag{4.153}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}} := \boldsymbol{\Phi}^\eta\mathbf{C}^*\mathbf{A}$. *Матриця* $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{iq})$ *є такою, що*

$$\phi_{iq} = \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\boldsymbol{\varphi}^M_{.q}\right)\right)_\beta^\beta = \sum_{\alpha\in I_{r_3,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\boldsymbol{\varphi}^A_{i.}\right)\right)_\alpha^\alpha, \tag{4.154}$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}^M_{.q} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_3,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\mathbf{b}^{(1)}_{f.}\right)\right)_\alpha^\alpha \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad f = 1, \dots, n, \tag{4.155}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^A_{i.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{b}^{(1)}_{.s}\right)\right)_\beta^\beta \right] \in \mathbb{H}^{1\times m}, \quad s = 1, \dots, m. \tag{4.156}$$

Тут $\mathbf{b}^{(1)}_{f.}$ *і* $\mathbf{b}^{(1)}_{.s}$ *є* f*-им рядком і* s*-им стовпцем матриці* $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{M}^*$.

(iii)

$$x_{ij}^{(3)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\boldsymbol{\omega}^{(1)}_{.j}\right)\right)_\beta^\beta}{(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta)^2 \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\beta\in J_{r_3,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|_\beta^\beta} \tag{4.157}$$

$$= \frac{-\eta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\psi^{(2)}_{i.}\right)\right)_\alpha^\alpha \eta,}{(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|_\beta^\beta)^2 \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\beta\in J_{r_3,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|_\beta^\beta}, \tag{4.158}$$

де $\boldsymbol{\omega}^{(1)}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Psi}_1$ *і* $\boldsymbol{\psi}^{(2)}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\boldsymbol{\Psi}_2 := \boldsymbol{\Omega}_2^\eta\boldsymbol{\Psi}$. *Матриці* $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{it}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$, $\boldsymbol{\Psi}_1 := (\psi^{(1)}_{tj}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\boldsymbol{\Psi} := (\psi_{qj}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = (\omega^{(2)}_{iq})$ *є такими, що*

$$\omega_{it} = \sum_{\alpha\in I_{r_2,m}\{t\}} \operatorname{rdet}_t \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{t.} \left(\mathbf{s}^{(1)}_{i.}\right)\right)_\alpha^\alpha, \tag{4.159}$$

де $\mathbf{s}_{i.}^{(1)}$ *– i-й рядок матриці* $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{B}^*$*;*

$$\psi_{tj}^{(1)} = -\eta \sum_{\alpha \in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{c}_{t.}^{(1)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta, \tag{4.160}$$

де $\mathbf{C}_1 := \mathbf{C}^{\eta}\mathbf{\Psi}$*;*

$$\psi_{qj} = \sum_{\beta \in J_{r_3,m}\{q\}} \operatorname{cdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{.q} \left(\mathbf{b}_{.f}^{(1,*)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}, \tag{4.161}$$

де $\mathbf{b}_{.f}^{(1,*)}$ *– f-й стовпець матриці* $\mathbf{B}_1^* = \mathbf{M}\mathbf{B}^*\mathbf{A}$*;*

$$\omega_{iq}^{(2)} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{c}_{.q}^{(2)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}, \tag{4.162}$$

де $\mathbf{c}_{.q}^{(2)}$ *– q-й стовпець матриці* $\mathbf{C}_2 := \mathbf{\Omega}\mathbf{C}$.

(iv)

$$y_{pg}^{(1)} = \frac{-\eta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.} \left(\mathbf{v}_{p.}^{\eta} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.163}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.p} \left(\mathbf{u}_{.g} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.164}$$

де

$$\mathbf{v}_{p.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_3,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.p} \left(\widehat{\mathbf{c}}_{.l} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times k}, \quad l = 1, \ldots, k, \tag{4.165}$$

$$\mathbf{u}_{.g} = \left[-\eta \sum_{\alpha \in I_{r_2,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.} \left(\widehat{\mathbf{c}}_{q.}^{\eta} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right] \in \mathbb{H}^{k \times 1}, \quad q = 1, \ldots, k. \tag{4.166}$$

Тут $\widehat{\mathbf{c}}_{.l}$ *– l-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{C}} := \mathbf{M}^*\mathbf{C}\mathbf{B}^{\eta}$ *і* $\widehat{\mathbf{c}}_{q.}^{\eta}$ *є q-им рядком* $\widehat{\mathbf{C}}^{\eta}$.

(v)

$$y_{pg}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p \left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.p} \left(\widetilde{\upsilon}_{.g} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,k}} |\mathbf{S}^*\mathbf{S}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in I_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.167}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.g}$ *–* g*-й стовпець матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}} := \mathbf{S}^*\mathbf{S}\boldsymbol{\Upsilon}$. *Матриця* $\boldsymbol{\Upsilon} = (\upsilon_{tg})$ *є така, що*

$$\upsilon_{tg} = \sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{B}^*\mathbf{B}\right)_{.t}\left(\boldsymbol{\lambda}_{.g}\right)\right)_\beta^\beta = -\eta \sum_{\alpha\in I_{r_3,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{g.}\left(\boldsymbol{\mu}_{t.}\right)\right)_\alpha^\alpha \eta, \quad (4.168)$$

де

$$\boldsymbol{\lambda}_{.g} = \left[-\eta \sum_{\alpha\in I_{r_3,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g\left(\left(\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right)_{g.}\left(\check{\mathbf{c}}_{l.}\right)\right)_\alpha^\alpha \eta\right] \in \mathbb{H}^{k\times 1}, \quad l = 1,\ldots,k, \quad (4.169)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{t.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left(\left(\mathbf{B}^*\mathbf{B}\right)_{.t}\left(\check{\mathbf{c}}_{.q}^\eta\right)\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times k}, \quad q = 1,\ldots,k. \quad (4.170)$$

Тут $\check{\mathbf{c}}_{l.}$ *і* $\check{\mathbf{c}}_{.q}^\eta$ *є* l*-им рядком і* q*-им стовпцем матриці* $\check{\mathbf{C}} := \mathbf{B}^*\mathbf{C}\mathbf{M}^\eta$ *і* $\check{\mathbf{C}}^\eta$, *відповідно.*

Доведення. (i) Рівняння (4.149)-(4.150), очевидно, випливають з Теореми 4.13.

(ii) Розглянемо другий доданок $(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger)(\mathbf{C}(\mathbf{A}^{\eta*})^\dagger) := \mathbf{X}_2 = \left(x_{ij}^{(2)}\right)$ рівняння (4.147). Беручи (2.27) для визначникового зображення матриці $(\mathbf{A}^{\eta*})^\dagger = \left(a_{tj}^{\eta*,\dagger}\right)$, для другого множника $\mathbf{C}(\mathbf{A}^{\eta*})^\dagger$ маємо

$$\sum_{t=1}^m c_{qt} a_{tj}^{\eta*,\dagger} = \sum_{t=1}^m c_{qt} \cdot \left(-\eta \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{t.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\alpha^\alpha}\eta\right)$$

$$= -\eta\left(\sum_{t=1}^m c_{qt}^\eta \cdot \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{t.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\alpha^\alpha}\right)\eta$$

$$= \frac{-\eta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\widetilde{\mathbf{c}}_{q.}\right)\right)_\alpha^\alpha \eta}{\sum\limits_{\beta\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\alpha^\alpha}$$

де $\widetilde{\mathbf{c}}_{q.}$ – q-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{C}} := \mathbf{C}^\eta\mathbf{A}$. Застосувавши визначникові зображення (2.7) та (2.8) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^\dagger$ і $\mathbf{M}^\dagger$, відповідно, і за Теоремою 4.11 для першого множника $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger$, одержимо матрицю $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{iq})$ таку, що

$$\phi_{iq} = \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\boldsymbol{\varphi}_{.q}^M\right)\right)_\beta^\beta = \sum_{\alpha\in I_{r_3,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q\left(\left(\mathbf{M}\mathbf{M}^*\right)_{q.}\left(\boldsymbol{\varphi}_{i.}^A\right)\right)_\alpha^\alpha,$$

і

$$\boldsymbol{\varphi}^{M}_{.q}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_3,m}\{q\}}\operatorname{rdet}_q\left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.}\left(\mathbf{b}^{(1)}_{f.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\quad f=1,\ldots,n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{A}_{i.}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{b}^{(1)}_{.s}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times m},\quad s=1,\ldots,m.$$

Тут $\mathbf{b}^{(1)}_{f.}$ і $\mathbf{b}^{(1)}_{.s}$ є f-им рядком та s-им стовпцем матриці $\mathbf{B}_1=\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{M}^*$.

Отже, маємо

$$x^{(2)}_{ij}=\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\phi_{iq}\left(-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\widetilde{\mathbf{c}}_{q.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\eta\right)}{(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta})^2\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,m}}|\mathbf{M}\mathbf{M}^*|^{\alpha}_{\alpha}}. \tag{4.171}$$

Позначимо $\widetilde{\mathbf{\Phi}}:=\mathbf{\Phi}^{\eta}\mathbf{C}^*\mathbf{A}$. Звідси випливає (4.153).

(iii) Для третього доданку $(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{B}^{\dagger})\mathbf{C}((\mathbf{M}^{\dagger})^{\eta*}\mathbf{B}^{\eta*}(\mathbf{A}^{\dagger})^{\eta*}):=\mathbf{X}_3=\left(x^{(3)}_{ij}\right)$ з формули (4.147), маємо

$$x^{(3)}_{ij}=\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{m}\widetilde{\omega}_{it}c_{tq}\widetilde{\psi}_{qj}}{(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta})^2\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}}|\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,m}}|\mathbf{M}\mathbf{M}^*|^{\beta}_{\beta}}, \tag{4.172}$$

де

$$\widetilde{\psi}_{qj}=-\eta\overline{\phi_{jq}}\eta=-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.}(\boldsymbol{\psi}_{q.})\right)^{\alpha}_{\alpha}\eta,$$

і

$$\boldsymbol{\psi}_{q.}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_3,m}\{q\}}\operatorname{cdet}_q\left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{.q}\left(\mathbf{b}^{(1,*)}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times n},\quad f=1,\ldots,n, \tag{4.173}$$

а $\mathbf{b}^{(1,*)}_{.f}$ є f-им стовпцем матриці $\mathbf{B}^*_1=\mathbf{M}\mathbf{B}^*\mathbf{A}$;

$$\widetilde{\omega}_{it}=\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\boldsymbol{\omega}_{.t})\right)^{\beta}_{\beta},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{.t}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,m}\{t\}}\operatorname{rdet}_t\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{t.}\left(\mathbf{s}^{(1)}_{f.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\quad f=1,\ldots,n, \tag{4.174}$$

де $\mathbf{s}_{f.}^{(1)}$ – f-й рядок матриці $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{B}^*$.

Побудуємо матриці $\mathbf{\Psi} = (\psi_{qf}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ і $\mathbf{\Omega} = (\omega_{ft}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$, що визначаються рівностями (4.173) та (4.209), відповідно. Введемо також матриці $\mathbf{C}_1 := \mathbf{C}^{\eta}\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{\Psi}_1 := (\psi_{tj}^{(1)})$, де

$$\psi_{tj}^{(1)} = \sum_{q=1}^{m} c_{tq}\widetilde{\psi}_{qj} = -\eta \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{j.} \left(\mathbf{c}_{t.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha} \eta,$$

$\mathbf{c}_{t.}^{(1)}$ – t-й рядок матриці $\mathbf{C}_1$, та $\mathbf{\Omega}_1 := \mathbf{\Omega}\mathbf{\Psi}_1$. З цих позначень та рівняння (4.172), слідує (4.157).

Інше визначникове зображення $x_{ij}^{(3)}$ одержимо, поклавши $\mathbf{C}_2 := \mathbf{\Omega}\mathbf{C}$ та $\mathbf{\Omega}_2 := (\omega_{tj}^{(2)})$, де

$$\omega_{iq}^{(2)} = \sum_{q=1}^{m} \widetilde{\omega}_{it} c_{tq} = \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i} \left(\mathbf{c}_{.q}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta},$$

$\mathbf{c}_{.q}^{(2)}$ – q-ий стовпець матриці $\mathbf{C}_2$. Позначимо матрицю $\mathbf{\Psi}_2 := \mathbf{\Omega}_2^{\eta}\mathbf{\Psi}$. З цих уведень і рівняння (4.172), випливає (4.158).

(iv) Тепер розглянемо перший доданок $\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta *} := \mathbf{Y}_1 = \left(y_{pg}^{(1)}\right)$ розв'язку (4.148). Використовуючи визначникові зображення (2.7) для матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{M}^{\dagger}$ та (2.27) для $\left(\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta *}$, отримаємо

$$y_{pg}^{(1)} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} m_{pt}^{\dagger} c_{tl} \left(b_{lg}^{\eta *}\right)^{\dagger} =$$

$$\frac{\sum\limits_{t}\sum\limits_{l}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.p} (\mathbf{m}_{.t}^*)\right)_{\beta}^{\beta} c_{tl} \left(-\eta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{j.} (\mathbf{b}_{l.})\right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta\in I_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_{\alpha}^{\alpha}},$$

Знайдемо добуток матриць $\mathbf{M}^*\mathbf{C}\mathbf{B}^{\eta} =: \widehat{\mathbf{C}} = (\widehat{c}_{ij})$. Аналогічно пункту (iii) доведення Теореми 4.12, маємо

$$y_{pg}^{(1)} =$$

$$\frac{\sum\limits_{t}\sum\limits_{m}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,k}\{p\}} \operatorname{cdet}_p \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.p} (\mathbf{e}_{.t})\right)_{\beta}^{\beta} \widehat{c}_{tl} \left(-\eta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,k}\{g\}} \operatorname{rdet}_g \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.} (\mathbf{e}_{l.})\right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta\in I_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{e}_{l.}$ та $\mathbf{e}_{.l}$ є, відповідно, одиничними вектор-рядком та вектор-стовпцем.

Якщо введемо

$$v_{pl} := \sum_{t=1}^{m} \sum_{\beta \in J_{r_3,k}\{p\}} \mathrm{cdet}_p \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.p} (\mathbf{e}_{.t}) \right)_{\beta}^{\beta} \widehat{c}_{tl} = \sum_{\beta \in J_{r_3,k}\{i\}} \mathrm{cdet}_p \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.p} (\widehat{\mathbf{c}}_{.l}) \right)_{\beta}^{\beta}$$

як l-ту компоненту вектор-рядка $\mathbf{v}_{p.} = [v_{p1}, \dots, v_{pm}]$, тоді

$$\sum_{l=1}^{m} v_{pl} \left(-\eta \sum_{\alpha \in I_{r_2,k}\{g\}} \mathrm{rdet}_g \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.}(\mathbf{e}_{l.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right) = \\ -\eta \left(\sum_{\alpha \in I_{r_2,k}\{g\}} \mathrm{rdet}_g \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.}(\mathbf{v}_{p.}^{\eta}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right) \eta,$$

де $\mathbf{v}_{p.}^{\eta} = \left[v_{p1}^{\eta}, \dots, v_{pm}^{\eta} \right]$. Отже, $y_{pg}^{(1)}$ має визначникове зображення (4.163), де $\mathbf{v}_{p.}$ задається формулою (4.165).

Якщо ж введемо

$$u_{tg} := \sum_{l=1}^{m} \widehat{c}_{tl} \left(-\eta \sum_{\alpha \in I_{r_2,k}\{g\}} \mathrm{rdet}_g \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.}(\mathbf{e}_{l.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right) \\ = -\eta \sum_{\alpha \in I_{r_2,k}\{g\}} \mathrm{rdet}_g \left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{g.}(\widehat{\mathbf{c}}_{t.}^{\eta}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta$$

як t-ту компоненту вектор-стовпця $\mathbf{u}_{.g} = [u_{1g}, \dots, u_{mg}]$, тоді

$$\sum_{t=1}^{m} \sum_{\beta \in J_{r_3,k}\{p\}} \mathrm{cdet}_p \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.\,p} (\mathbf{e}_{.t}) \right)_{\beta}^{\beta} u_{tg} = \sum_{\beta \in J_{r_3,k}\{p\}} \mathrm{cdet}_p \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.\,p} (\mathbf{u}_{.g}) \right)_{\beta}^{\beta}.$$

Отже, інше визначникове зображення $y_{pg}^{(1)}$ є (4.164) з вектор-стовпцем $\mathbf{u}_{.g}$, компоненти якого визначаються у (4.166).

(v) Для другого доданку $\mathbf{Q}_S \mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{C} \left(\mathbf{M}^{\dagger} \right)^{\eta *} = \mathbf{Y}_4 = \left(y_{pg}^{(2)} \right)$ розв'язку (4.148), використавши (2.14) для визначникового зображення проективної матриці $\mathbf{Q}_S$, і, аналогічно як в пункті (iv), для $\mathbf{B}^{\dagger} \mathbf{C} \left(\mathbf{M}^{\dagger} \right)^{\eta *}$, одержимо

$$y_{pg}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{k} \sum\limits_{\beta \in J_{r_4,k}\{p\}} \mathrm{cdet}_p \left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.p} (\dot{\mathbf{s}}_{.t}) \right)_{\beta}^{\beta} \upsilon_{tg}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,k}} |\mathbf{S}^*\mathbf{S}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_2,k}} |\mathbf{B}^*\mathbf{B}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,k}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.175}$$

де $\dot{\mathbf{s}}_{.t}$ – t-ий стовпець матриці $\mathbf{S}^*\mathbf{S}$,

$$\upsilon_{tg} = \\ = \sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.t}(\boldsymbol{\lambda}_{.g})\right)_\beta^\beta = -\eta \sum_{\alpha\in I_{r_3,k}\{g\}} \mathrm{rdet}_g\Big((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{g.}(\boldsymbol{\mu}_{t.})\Big)_\alpha^\alpha \eta, \quad (4.176)$$

та

$$\boldsymbol{\lambda}_{.g} = \left[-\eta \sum_{\alpha\in I_{r_3,k}\{g\}} \mathrm{rdet}_g\Big((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{g.}(\check{\mathbf{c}}_{l.})\Big)_\alpha^\alpha \eta\right] \in \mathbb{H}^{k\times 1}, \quad l = 1,\ldots,k,$$

$$\boldsymbol{\mu}_{t.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_2,k}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left((\mathbf{B}^*\mathbf{B})_{.t}\left(\check{\mathbf{c}}_{.q}^\eta\right)\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times k}, \quad q = 1,\ldots,k.$$

Тут $\check{\mathbf{c}}_{l.}$ – l-ий рядок матриці $\check{\mathbf{C}} := \mathbf{B}^*\mathbf{C}\mathbf{M}^\eta$, а $\check{\mathbf{c}}_{.q}^\eta$ є q-им стовпцем матриці $\check{\mathbf{C}}^\eta$. Побудуємо матрицю $\boldsymbol{\Upsilon} = (\upsilon_{tg})$, де υ_{tg} визначається у (4.176). Знайдемо матрицю $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}} := \mathbf{S}^*\mathbf{S}\boldsymbol{\Upsilon}$. Застосувавши ці позначення в (4.175) отримаємо (4.167). □

Як випливає з Теореми 4.24, правило Крамера для рівняння типу Сильвестра (4.146) має наступний алгоритм.

Алгоритм 4.3. *(i) Для компоненти* $x_{ij}^{(1)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{A}^\eta$ *та* $\widehat{\mathbf{A}}^\eta = \mathbf{A}^{\eta *}\mathbf{C}^\eta\mathbf{A}$.
2. *Обчислюємо вектор-рядки* $\mathbf{v}_{i.}^\eta$ *за формулою (4.151) для всіх* $i = 1,\ldots,n$, *або вектор-стовпці* $\mathbf{v}_{.j}$ *за формулою (4.152) для всіх* $j = 1,\ldots,n$.
3. *Знаходимо* $x_{ij}^{(1)}$ *за формулами (4.149) або (4.150), відповідно до того, які вектори знайдені вище.*

(ii) Для компоненти $x_{ij}^{(2)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{M}^*$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{M}\mathbf{M}^*$.
2. *Обчислюємо вектор-стовпці* $\varphi_{.q}^M$ *за формулою (4.155) для всіх* $q = 1,\ldots,m$, *або вектор-рядки* $\varphi_{i.}^A$ *за формулою (4.156) для всіх* $i = 1,\ldots,n$.
3. *Обчислюємо матрицю* $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{ik})$ *за одним з двох випадків рівності (4.154) відповідно до того, чи вектор-стовпці* $\varphi_{.q}^M$, *чи вектор-рядки* $\varphi_{i.}^A$ *знайдені у попередньому пункті.*

4. *Обчислюємо матрицю* $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}^{\eta}\mathbf{C}^{*}\mathbf{A}$.

5. *Знаходимо* $x_{ij}^{(2)}$ *за формулою (4.153).*

(iii) *Для компоненти* $x_{ij}^{(3)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}^{*}\mathbf{S}\mathbf{B}^{*}$ *and* $\mathbf{B}_1^{*} = \mathbf{M}\mathbf{B}^{*}\mathbf{A}$.

2. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Omega}$ *за формулою (4.159).*

3. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Psi}$ *за формулою (4.161).*

4. *Тоді, маємо два можливих випадки:*

   (a) *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}^{\eta}\mathbf{\Psi}$.

   (b) *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Psi}_1$ *за формулою (4.160)*

   (c) *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Psi}_1$.

   (d) *Знаходимо* $x_{ij}^{(3)}$ *за формулою (4.157).*

   або

   (a) *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{C}_2 = \Omega\mathbf{C}$.

   (b) *Знаходимо матрицю* $\mathbf{\Omega}_2$ *за формулою (4.162)*

   (c) *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Psi}_2 = \mathbf{\Omega}_2\mathbf{\Psi}$.

   (d) *Тоді, знаходимо* $x_{ij}^{(3)}$ *за формулою (4.158).*

(iv) *Для компоненти* $y_{gf}^{(1)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{*}\mathbf{C}\mathbf{B}^{\eta}$ *та* $\widehat{\mathbf{C}}^{\eta}$.

2. *Обчислюємо вектор-стовпці* $\mathbf{u}_{.g}$ *за формулою (4.166) для всіх* $g = 1, \ldots, k$, *або вектор-рядки* $\mathbf{v}_{p.}$ *для всіх (4.165) для всіх* $p = 1, \ldots, k$.

3. *Знаходимо* $y_{gf}^{(1)}$ *за формулами (4.163) або (4.164) відповідно до того, які вектори знайдені у попередньому пункті.*

(v) *Для компоненти* $y_{gf}^{(2)}$.

1. *Обчислюємо матриці* $\check{\mathbf{C}} := \mathbf{B}^{*}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\eta}$ *і* $\check{\mathbf{C}}^{\eta}$.

2. *Обчислюємо вектор-рядки* $\mu_{t.}$ *за формулою (4.170) для всіх* $t = 1, \ldots, k$, *або вектор-стовпці* $\lambda_{.g}$ *за формулою (4.169) для всіх* $g = 1, \ldots, k$.

3. *Обчислюємо матрицю* $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{tg})$ *за одним з двох випадків у рівнянні (4.168) відповідно до того, чи вектор-стовпці* $\lambda_{.g}$*, чи вектор-рядки* $\mu_{t.}$ *знайдені у попередньому пункті.*

4. *Обчислюємо матрицю* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$.

5. *Знаходимо* $y_{gf}^{(2)}$ *за формулою (4.167).*

Тепер розглянемо рівняння (4.146) з обмеженням $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\eta*}$.

Відмітимо, що рівняння (4.146) має η-ермітовий розв'язок $\mathbf{X},\ \mathbf{Y}$ тоді і тільки тоді, коли система матричних рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}}\mathbf{A}^{\eta*} + \mathbf{B}\widehat{\mathbf{Y}}\mathbf{B}^{\eta*} = \mathbf{C}, \\ \mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}}^{\eta*}\mathbf{A}^{\eta*} + \mathbf{B}\widehat{\mathbf{Y}}^{\eta*}\mathbf{B}^{\eta*} = \mathbf{C}, \end{cases} \tag{4.177}$$

має розв'язок $\widehat{\mathbf{X}},\ \widehat{\mathbf{Y}}$, де $\widehat{\mathbf{X}},\ \widehat{\mathbf{Y}}$ можуть і не бути η-ермітовими матрицями. Якщо система (4.177) є сумісною, тоді

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{X}} + \widehat{\mathbf{X}}^{\eta*}),\ \mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{Y}} + \widehat{\mathbf{Y}}^{\eta*}).$$

Очевидно, що система (4.177) еквівалентна рівнянню (4.146) з обмеженням

$$\mathbf{A}\widehat{\mathbf{X}}\mathbf{A}^{\eta*} + \mathbf{B}\widehat{\mathbf{Y}}\mathbf{B}^{\eta*} = \mathbf{C},\ \mathbf{C} = \mathbf{C}^{\eta*}. \tag{4.178}$$

Отже, якщо матричне рівняння (4.178) має розв'язок $\widehat{\mathbf{X}},\ \widehat{\mathbf{Y}}$, тоді система (4.146) є сумісною для $\mathbf{X},\ \mathbf{Y}$. За Лемою 4.19,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}} =& \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}(\mathbf{A}^\dagger)^{\eta*} - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^{\eta*} - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*} - \\ & - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{W}_2\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\right)^{\eta*} + \mathbf{L}_A\mathbf{U} + \mathbf{Z}\mathbf{L}_A^{\eta*}, \\ \widehat{\mathbf{Y}} =& \mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{Q}_S\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{L}_M\mathbf{W}_2\mathbf{L}_M^{\eta} + \mathbf{V}\mathbf{L}_B^{\eta} + \mathbf{L}_M\mathbf{L}_S\mathbf{W}_1, \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{X}} + \widehat{\mathbf{X}}^{\eta*}) = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}(\mathbf{A}^\dagger)^{\eta*} - \\ - \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right] - \\ - \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{B}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right] - \\ - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{W}_2\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\right)^{\eta*} + \mathbf{L}_A\mathbf{U} + (\mathbf{L}_A\mathbf{U})^{\eta*}, \end{aligned} \tag{4.179}$$

$$\mathbf{Y}=\frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{Y}}+\widehat{\mathbf{Y}}^{\eta*})=\frac{1}{2}\left[\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta*}+\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^{\dagger}\right)^{\eta*}\mathbf{Q}_S^{\eta}+\mathbf{Q}_S\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^{\dagger}\right)^{\eta*}\right]+$$
$$+\mathbf{L}_M\mathbf{W}_2\mathbf{L}_M^{\eta}+\mathbf{V}\mathbf{L}_B^{\eta}+\mathbf{L}_B\mathbf{V}^{\eta*}+\mathbf{L}_M\mathbf{L}_S\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_1^{\eta*}\mathbf{L}_S^{\eta}\mathbf{L}_M^{\eta}, \tag{4.180}$$

де $\mathbf{W}_1,\ \mathbf{U},\ \mathbf{V}$, те $\mathbf{W}_2=\mathbf{W}_2^{\eta*}$ є довільними кватерніоновими матрицями.

Ми довели наступне твердження, яке вперше було доведено в [69].

Лема 4.20. *[69] Нехай матриці $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{m\times k}$, $\mathbf{C}=\mathbf{C}^{\eta*}$ є заданими. Покладемо $\mathbf{M}=\mathbf{R}_A\mathbf{B}$, $\mathbf{S}=\mathbf{B}\mathbf{L}_M$. Наступні твердження є еквівалентними:*

(1) Рівняння (4.146) має η-ермітові розв'язки $\mathbf{X}=\mathbf{X}^{\eta*}$ і $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}^{\eta*}$.

(2)

$$\mathbf{R}_M\mathbf{R}_A\mathbf{C}=\mathbf{0},\ \mathbf{R}_A\mathbf{C}\mathbf{R}_B^{\eta*}=\mathbf{0}. \tag{4.181}$$

(3) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{\eta*}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}(\mathbf{A})+\operatorname{rank}(\mathbf{B}),\ \operatorname{rank}\left[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\right]=\operatorname{rank}\left[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\right].$

У цьому випадку, η-ермітовий розв'язок $\mathbf{X}^{\eta*}=\mathbf{X},\ \mathbf{Y}=\mathbf{Y}^{\eta*}$ рівняння (4.146) може бути виражений як (4.179)-(4.180).

Аналогічно, якщо η-косо-ермітовий розв'язок $(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ рівняння (4.146) з обмеженням $\mathbf{C}=-\mathbf{C}^{\eta*}$ виражається як

$$\mathbf{X}=\frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{X}}-\widehat{\mathbf{X}}^{\eta*}),\ \mathbf{Y}=\frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{Y}}-\widehat{\mathbf{Y}}^{\eta*}),$$

де $(\widehat{\mathbf{X}},\ \widehat{\mathbf{Y}})$ – пара розв'язку рівняння (4.177), які можуть і не бути η-косо-ермітовими матрицями, маємо наступні лему.

Лема 4.21. *Нехай матриці $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{m\times k}$, $\mathbf{C}=-\mathbf{C}^{\eta*}$ - задані. Покладемо $\mathbf{M}=\mathbf{R}_A\mathbf{B}$, $\mathbf{S}=\mathbf{B}\mathbf{L}_M$. Наступні твердження є еквівалентними:*

(1) Рівняння (4.146) має η-косо-ермітові розв'язки $\mathbf{X}=-\mathbf{X}^{\eta*}$ та $\mathbf{Y}=-\mathbf{Y}^{\eta*}$.

(2) $\mathbf{R}_M\mathbf{R}_A\mathbf{C}=\mathbf{0},\ \mathbf{R}_A\mathbf{C}\mathbf{R}_B^{\eta*}=\mathbf{0}.$

(3) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{\eta*}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}(\mathbf{A})+\operatorname{rank}(\mathbf{B}),\ \operatorname{rank}\left[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\right]=\operatorname{rank}\left[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\right].$

У цьому випадку, загальний η-косо-ермітові розв'язок $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ рівняння (4.146) можуть бути виражені як

$$\begin{aligned}\mathbf{X} = -\mathbf{X}^{\eta*} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}(\mathbf{A}^\dagger)^{\eta*} - \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right] - \\ - \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{B}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right] - \\ - \mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{W}_2\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\right)^{\eta*} - \mathbf{L}_A\mathbf{U} + (\mathbf{L}_A\mathbf{U})^{\eta*},\end{aligned} \tag{4.182}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} = -\mathbf{Y}^{\eta*} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^\dagger\right)^{\eta*}\mathbf{Q}_S^\eta + \mathbf{Q}_S\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right] + \\ + \mathbf{L}_M\mathbf{W}_2\mathbf{L}_M^\eta + \mathbf{V}\mathbf{L}_B^\eta - \mathbf{L}_B\mathbf{V}^{\eta*} + \mathbf{L}_M\mathbf{L}_S\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_1^{\eta*}\mathbf{L}_S^\eta\mathbf{L}_M^\eta,\end{aligned} \tag{4.183}$$

Поклавши $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, та $\mathbf{W}_2$ як нульові матриці відповідних розмірів у рівностях (4.179)-(4.180) та (4.182)-(4.183), одержимо наступний частковий η-ермітовий та η-косо-ермітовий розв'язок рівняння (4.146) з обмеженнями $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\eta*}$ і $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^{\eta*}$, відповідно,

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =& \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}(\mathbf{A}^\dagger)^{\eta*} - \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right] \\ &-\frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{B}^\dagger\right)^{\eta*}\right],\end{aligned} \tag{4.184}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} =& \frac{1}{2}\left[\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^\dagger\right)^{\eta*} + \mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right] \\ &+\frac{1}{2}\left[\mathbf{M}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{B}^\dagger\right)^{\eta*}\mathbf{P}_S^\eta + \mathbf{P}_S\mathbf{B}^\dagger\mathbf{C}\left(\mathbf{M}^\dagger\right)^{\eta*}\right].\end{aligned} \tag{4.185}$$

Визначникові зображення розв'язків (4.184)-(4.185) покомпонентно можуть бути виражені наступним чином

– для η-ермітового розв'язку,

$$x_{ij} = x_{ij}^{(1)} - \frac{1}{2}\left[x_{ij}^{(2)} - \eta\overline{x_{ji}^{(2)}}\eta\right] - \frac{1}{2}\left[x_{ij}^{(3)} - \eta\overline{x_{ji}^{(3)}}\eta\right], \tag{4.186}$$

$$y_{pg} = \frac{1}{2}\left[y_{pg}^{(1)} - \eta\overline{y_{gp}^{(1)}}\eta\right] + \frac{1}{2}\left[y_{pg}^{(2)} - \eta\overline{y_{gp}^{(2)}}\eta\right], \tag{4.187}$$

– для η-косо-ермітового розв'язку,

$$\begin{aligned}x_{ij} =& x_{ij}^{(1)} - \frac{1}{2}\left[x_{ij}^{(2)} + \eta\overline{x_{ji}^{(2)}}\eta\right] - \frac{1}{2}\left[x_{ij}^{(3)} + \eta\overline{x_{ji}^{(3)}}\eta\right], \\ y_{pg} =& \frac{1}{2}\left[y_{pg}^{(1)} + \eta\overline{y_{gp}^{(1)}}\eta\right] + \frac{1}{2}\left[y_{pg}^{(2)} + \eta\overline{y_{gp}^{(2)}}\eta\right],\end{aligned}$$

для всіх $i, j = 1, \dots, n$ і $p, g = 1, \dots, k$, де x_{ij} і y_{pg} знайдені в Теоремі 4.24.

4.2.5. Приклад правила Крамера для кватерніонового узагальненого рівняння Сильвестра. Нехай маємо рівняння

$$\mathbf{AXA}^{\eta*} + \mathbf{BYB}^{\eta*} = \mathbf{C}, \tag{4.188}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{k} \\ \mathbf{j} & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{j} \\ -\mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 + 2\mathbf{j} & \mathbf{i} + 2\mathbf{k} \\ -\mathbf{i} + 2\mathbf{k} & -1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\eta*}$, коли $\eta = \mathbf{i}$, то будемо шукати $\mathbf{i}$-ермітовий розв'язок рівняння (5.106). За Теоремою 2.2,

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -\mathbf{j} \\ -\mathbf{k} & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^{\dagger} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\mathbf{k} & \mathbf{j} \\ -\mathbf{j} & -\mathbf{k} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{R}_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{M} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{i} + \mathbf{k} & -1 + \mathbf{j} \\ 1 - \mathbf{j} & \mathbf{i} + \mathbf{k} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{M}^{\dagger} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -\mathbf{i} - \mathbf{k} & 1 + \mathbf{j} \\ -1 - \mathbf{j} & -\mathbf{i} - \mathbf{k} \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}_M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко перевірити виконання умови (4.181) рівнянням (5.106) . Отже, рівняння (5.106) має η-ермітові розв'язки. Обчислимо частковий розв'язок (4.147)-(4.148) за правилом Крамера згідно Теореми 4.24. Отже,

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -\mathbf{j} \\ -\mathbf{k} & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{j} & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2\mathbf{j} \\ -2\mathbf{j} & 2 \end{bmatrix},$$
$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{A}^{\eta} = \begin{bmatrix} 6 - 4\mathbf{j} & -4 - 6\mathbf{j} \\ -4 - 6\mathbf{j} & -6 + 4\mathbf{j} \end{bmatrix}.$$

Оскільки, $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = 1$, тоді за формулою (4.151),

$$\mathbf{v}_{1.}^{\eta} = \begin{bmatrix} 6 + 4\mathbf{j} & -4 + 6\mathbf{j} \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_{2.}^{\eta} = \begin{bmatrix} -4 + 6\mathbf{j} & -6 - 4\mathbf{j} \end{bmatrix}.$$

Далі, згідно з (4.149), одержимо

$$\begin{aligned} x_{11}^{(1)} =& \frac{-\mathbf{i}(6+4\mathbf{j})\mathbf{i}}{16} = 0.375 - 0.25\mathbf{j}, \\ x_{12}^{(1)} =& \frac{-\mathbf{i}(-4+6\mathbf{j})\mathbf{i}}{16} = -0.25 - 0.375\mathbf{j}, \\ x_{21}^{(1)} =& \frac{-\mathbf{i}(-4+6\mathbf{j})\mathbf{i}}{16} = -0.25 - 0.375\mathbf{j}, \\ x_{22}^{(1)} =& \frac{-\mathbf{i}(-6-4\mathbf{j})\mathbf{i}}{16} = -0.375 + 0.25\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Тепер будемо шукати $x_{ij}^{(2)}$ згідно формули (4.153). Оскільки,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} 2\mathbf{k} & -2 \\ -2\mathbf{i} & 2\mathbf{j} \end{bmatrix},$$

то

$$\boldsymbol{\varphi}_{1.}^{A} = [2\mathbf{k},\ -2]\,, \quad \boldsymbol{\varphi}_{2.}^{A} = [-2\mathbf{i},\ 2\mathbf{j}]\,.$$

Беручи до уваги формулу (4.130), маємо

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{k} & -2 \\ -2\mathbf{i} & 2\mathbf{j} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}^{\eta}\mathbf{C}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4\mathbf{j} \\ 4\mathbf{j} & -4 \end{bmatrix}.$$

Тоді, кінцево,

$$\begin{aligned} x_{11}^{(2)} = \frac{-\mathbf{i}(4)\mathbf{i}}{32} = 0.125, \ \ x_{12}^{(2)} = \frac{-\mathbf{i}(4\mathbf{j})\mathbf{i})}{32} = -0.125\mathbf{j}, \\ x_{21}^{(2)} = \frac{-\mathbf{i}(4\mathbf{j})\mathbf{i})}{32} = -0.125\mathbf{j}, \ \ x_{22}^{(2)} = \frac{-\mathbf{i}(-4)\mathbf{i}}{32} = -0.125. \end{aligned}$$

Оскільки $\mathbf{S} = 0$ то, очевидно, що $x_{ij}^{(3)} = 0$ для всіх $i, j = 1, 2,$. Звідси за формулою (4.186)

$$\begin{aligned} x_{11} =& x_{11}^{(1)} - \frac{1}{2}(x_{11}^{(2)} - \mathbf{i}\overline{x_{11}^{(2)}}\mathbf{i}) = 0.25 - 0.25\mathbf{j}, \\ x_{12} =& x_{12}^{(1)} - \frac{1}{2}(x_{12}^{(2)} - \mathbf{i}\overline{x_{21}^{(2)}}\mathbf{i}) = -0.25 - 0.25\mathbf{j}, \\ x_{21} =& x_{21}^{(1)} - \frac{1}{2}(x_{21}^{(2)} - \mathbf{i}\overline{x_{12}^{(2)}}\mathbf{i}) = -0.25 - 0.25\mathbf{j}, \\ x_{22} =& x_{22}^{(1)} - \frac{1}{2}(x_{22}^{(2)} - \mathbf{i}\overline{x_{22}^{(2)}}\mathbf{i}) = -0.25 + 0.25\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Тепер, будемо шукати y_{pg} за формулою (4.187) для всіх $p, g = 1, 2$. Оскільки,

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^*\mathbf{C}\mathbf{B}^\eta = \begin{bmatrix} 2\mathbf{j} & -2\mathbf{k} \\ -2\mathbf{k} & -2\mathbf{j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^*\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^*\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2\mathbf{i} \\ -2\mathbf{i} & 2 \end{bmatrix}$$

і згідно з (4.165)

$$\mathbf{v}_{1.} = [2\mathbf{j}, \quad -2\mathbf{k}], \quad \mathbf{v}_{2.} = [-2\mathbf{k}, \quad -2\mathbf{j}],$$

то за формулою (4.163), одержимо

$$\begin{aligned} y_{11}^{(1)} &= \frac{2\mathbf{j}}{8} = 0.25\mathbf{j}, \\ y_{21}^{(1)} = y_{12}^{(1)} &= \frac{-2\mathbf{k}}{8} = -0.25\mathbf{k}, \\ y_{22}^{(1)} &= \frac{-2\mathbf{j}}{8} = -0.25\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що $y_{ij}^{(1)} = -\mathbf{i}\overline{y_{ji}^{(1)}}\mathbf{i}$ і $y_{ij}^{(2)} = 0$ для всіх $i, j = 1, 2$, звідси випливає, що

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.25 - 0.25\mathbf{j} & -0.25 - 0.25\mathbf{j} \\ -0.25 - 0.25\mathbf{j} & -0.25 + 0.25\mathbf{j} \end{bmatrix}, \; \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0.25\mathbf{j} & -0.25\mathbf{k} \\ -0.25\mathbf{k} & -0.25\mathbf{j} \end{bmatrix}$$

є частковим **i**-ермітовим розв'язком рівняння (5.106).

4.3. Правило Крамера для систем кватерніонових матричних рівнянь типу Сильвестра.

4.3.1. Правило Крамера для системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь.

В цьому пункті розглянемо класичну систему матричних двосторонніх рівнянь над тілом кватерніонів:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2. \end{cases} \tag{4.189}$$

Ця система вивчалася багатьма дослідниками. Так, Мітра [178] дав необхідні та достатні умови сумісності системи (4.189) над комплексним полем і вираз для його загального розв'язку. Наварра та ін. [190] отримав нові необхідні та достатні умови для існування розв'язку системи над комплексним полем та отримав його нове представлення. Ванг у роботі [252] вивів деякі необхідні та достатні умови сумісності системи (4.189) над довільними регулярними кільцями з одиницею та виразив загальний розв'язок за допомогою рефлексивних узагальнених обернених матриць, а в роботі [253] розглянув деякі системи над тілом кватерніонів і серед них систему (4.189), отримав умови їх сумісності, а також виразив загальні розв'язки у термінах узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза.

Має місце наступна лема.

Лема 4.22. *[253] Нехай* $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{m\times s}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k\times n}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}^{r\times p}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{k\times p}$ *- задані матриці та* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times r}$ *– невідома. Покладемо* $\mathbf{H} = \mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1}$, $\mathbf{N} = \mathbf{R}_{B_1}\mathbf{B}_2$, $\mathbf{T} = \mathbf{R}_H\mathbf{A}_2$, $\mathbf{F} = \mathbf{B}_2\mathbf{L}_N$. *Система (4.189) є сумісною тоді і тільки тоді, коли*

$$\mathbf{A}_i\mathbf{A}_i^{\dagger}\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i^{\dagger}\mathbf{B}_i = \mathbf{C}_i, \quad i = 1,2; \tag{4.190}$$

$$\mathbf{T}\left[\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{X}\mathbf{B}_2^{\dagger} - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\right]\mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{4.191}$$

У цьому випадку загальний розв'язок системи (4.189) виражається як

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =&\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger} + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{L}_T\left(\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\right)\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} +\\ &+\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}\left(\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\right)\mathbf{B}_2\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{R}_{B_1} + \mathbf{L}_{A_1}\left(\mathbf{Z} - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}\right) -\\ &-\mathbf{L}_{A_1}\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{L}_T\mathbf{W}\mathbf{N}\mathbf{B}_2^{\dagger} + \left(\mathbf{W} - \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{N}\mathbf{N}^{\dagger}\right)\mathbf{R}_{B_1},\end{aligned} \tag{4.192}$$

де $\mathbf{Z}$ *і* $\mathbf{W}$ *довільні кватерніонові матриці відповідних розмірів.*

Деяке спрощення виразу (4.192) може бути досягнене завдяки Лемі 4.7. Оскільки, $\mathbf{L}_{A_1}$, $\mathbf{R}_{B_1}$ та $\mathbf{R}_H$ є проекторами, тоді маємо

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{A_1}\mathbf{H}^{\dagger} =&\mathbf{L}_{A_1}(\mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1})^{\dagger} = \mathbf{H}^{\dagger},\ \mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{R}_{B_1} = (\mathbf{R}_{B_1}\mathbf{B}_2)^{\dagger}\mathbf{R}_{B_1} = \mathbf{N}^{\dagger},\\ \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T} =&(\mathbf{R}_H\mathbf{A}_2)^{\dagger}\mathbf{R}_H\mathbf{A}_2 = \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2,\ \mathbf{L}_T = \mathbf{I} - \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2.\end{aligned} \tag{4.193}$$

Враховуючи (4.193), одержимо наступний вираз для розв'язку (4.192),

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =&\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}+\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\left(\mathbf{I}-\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\right)\left(\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}-\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\right)\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}+\\ &+\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\left(\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}-\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\right)\mathbf{B}_2\mathbf{N}^{\dagger}+\mathbf{L}_{A_1}\left(\mathbf{Z}-\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}\right)-\\ &-\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{L}_T\mathbf{W}\mathbf{N}\mathbf{B}_2^{\dagger}+\left(\mathbf{W}-\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{N}\mathbf{N}^{\dagger}\right)\mathbf{R}_{B_1}=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}+\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}+\mathbf{H}^{\dagger}\left(\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}-\mathbf{I}\right)\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{P}_{B_2}-\\ &-\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}+\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{N}^{\dagger}-\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{B}_2\mathbf{N}^{\dagger}+\\ &+\mathbf{L}_{A_1}\left(\mathbf{Z}-\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}\right)-\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{L}_T\mathbf{W}\mathbf{N}\mathbf{B}_2^{\dagger}+\left(\mathbf{W}-\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{N}\mathbf{N}^{\dagger}\right)\mathbf{R}_{B_1}.\end{aligned} \tag{4.194}$$

Поклавши у виразі (4.194) матриці $\mathbf{Z}$ і $\mathbf{W}$ нульовими, одержимо наступний частковий розв'язок системи (4.189)

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =&\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}+\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}+\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{N}^{\dagger}+\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{P}_{B_2}-\\ &-\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{P}_{B_2}-\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}-\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{B}_2\mathbf{N}^{\dagger}.\end{aligned} \tag{4.195}$$

Далі ми дамо визначникове зображення розв'язку (4.195).

Припустимо, що $\mathbf{A}_1=\left(a_{ij}^{(1)}\right)\in\mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B}_1=\left(b_{ij}^{(1)}\right)\in\mathbb{H}_{r_2}^{r\times s}$, $\mathbf{A}_2=\left(a_{ij}^{(2)}\right)\in\mathbb{H}_{r_3}^{k\times n}$, $\mathbf{B}_2=\left(b_{ij}^{(2)}\right)\in\mathbb{H}_{r_4}^{r\times p}$, $\mathbf{C}_1=\left(c_{ij}^{(1)}\right)\in\mathbb{H}^{m\times s}$, $\mathbf{C}_2=\left(c_{ij}^{(2)}\right)\in\mathbb{H}^{k\times p}$. Нехай $\operatorname{rank}\mathbf{H}=r_5$, $\operatorname{rank}\mathbf{N}=r_6$, $\operatorname{rank}\mathbf{T}=r_7$.

Розглянемо кожний доданок розв'язку (4.195) окремо.

(i) За Теоремою 4.11 для першого доданку, $\mathbf{X}_1=\left(x_{ij}^{(1)}\right):=\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}$, маємо

$$x_{ij}^{(1)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{d}_{.j}^{B_1}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}}\left|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.196}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right)_{j.}\left(\mathbf{d}_{i.}^{A_1}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}}\left|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.197}$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{B_1} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*)_{j.} \left(\tilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(1)} \right) \right)_\alpha^\alpha \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{A_1} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.i} \left(\tilde{\mathbf{c}}_{.l}^{(1)} \right) \right)_\beta^\beta \right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad l = 1, \ldots, r.$$

Тут $\tilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(1)}$ і $\tilde{\mathbf{c}}_{.l}^{(1)}$ є q-м рядком та l-м стовпцем матриці $\widetilde{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^*$.

(ii) Аналогічно, для другого доданку, $\mathbf{X}_2 = \left(x_{ij}^{(2)} \right) := \mathbf{H}^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^\dagger$, одержимо

$$x_{ij}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i} \left(\mathbf{d}_{.j}^{B_2} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,r}} |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|_\alpha^\alpha} = \tag{4.198}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.} \left(\mathbf{d}_{i.}^{H} \right) \right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_5,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,r}} |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|_\alpha^\alpha}, \tag{4.199}$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{B_2} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_4,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.} \left(\tilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)} \right) \right)_\alpha^\alpha \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{H} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_5,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i} \left(\tilde{\mathbf{c}}_{.l}^{(2)} \right) \right)_\beta^\beta \right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad l = 1, \ldots, r.$$

Тут $\tilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)}$ і $\tilde{\mathbf{c}}_{.l}^{(2)}$ є q-м рядком і l-м стовпцем матриці $\widetilde{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{H}^*\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^*$.

(iii) Для третього доданку, $\mathbf{X}_3 = \left(x_{ij}^{(3)} \right) := \mathbf{T}^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{N}^\dagger$, можемо застосувати Теорему 4.11 так само. Тоді,

$$x_{ij}^{(3)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.i} \left(\mathbf{d}_{.j}^{N} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_6,r}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|_\alpha^\alpha} = \tag{4.200}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_6,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{j.} \left(\mathbf{d}_{i.}^{T} \right) \right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_7,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_6,r}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|_\alpha^\alpha}, \tag{4.201}$$

де

$$\mathbf{d}^N_{.j}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_6,r}\{f\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{j.}\left(\hat{\mathbf{c}}^{(2)}_{q.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{n\times1},\quad q=1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{d}^T_{i.}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_7,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.i}\left(\hat{\mathbf{c}}^{(2)}_{.l}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times r},\quad l=1,\ldots,r.$$

Тут $\hat{\mathbf{c}}^{(2)}_{q.}$ є q-м рядком і $\hat{\mathbf{c}}^{(2)}_{.l}$ є l-м стовпцем матриці $\hat{\mathbf{C}}_2=\mathbf{T}^*\mathbf{C}_2\mathbf{N}^*$.

(iv) Для четвертого члена, $\mathbf{X}_4=\left(x^{(4)}_{ij}\right):=\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{P}_{B_2}$, використаємо визначникові зображення (2.8) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{H}^{\dagger}$ і $\mathbf{T}^{\dagger}$, тоді одержимо

$$x^{(4)}_{ij}=\frac{\sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{z=1}^{n}\sum\limits_{f=1}^{r}\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i}\left(\mathbf{a}^{(2,H)}_{.q}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}\{q\}}\mathrm{cdet}_q\left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.q}\left(\mathbf{a}^{(2,T)}_{.z}\right)\right)^{\beta}_{\beta}x^{(1)}_{zf}\,p_{fj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}}|\mathbf{H}^*\mathbf{H}|^{\beta}_{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}}|\mathbf{T}^*\mathbf{T}|^{\beta}_{\beta}},\tag{4.202}$$

де $\mathbf{a}^{(2,H)}_{.q}$, $\mathbf{a}^{(2,T)}_{.z}$ є q-м та z-м стовпцями матриць $\mathbf{H}^*\mathbf{A}_2$ і $\mathbf{T}^*\mathbf{A}_2$, відповідно; $x^{(1)}_{zf}$ є знайдено у формулах (4.196) чи (4.197); p_{fj} є (fj)-м елементом проективної матриці $\mathbf{P}_{B_2}$ з визначниковим зображенням виражeним формулою (2.16) як

$$p_{fj}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\Big((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}\,(\ddot{\mathbf{b}}^{(2)}_{f.})\Big)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,r}}|\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\ddot{\mathbf{b}}^{(2)}_{f.}$ – f-й рядок матриці $\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*$. Позначимо

$$\begin{aligned}p^{(1)}_{zj}:=&\sum_{f=1}^{r}x^{(1)}_{zf}\sum_{\alpha\in I_{r_4,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}\left(\ddot{\mathbf{b}}^{(2)}_{f.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\\=&\sum_{\alpha\in I_{r_4,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}\left(\widetilde{\mathbf{x}}^{(1)}_{z.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha},\end{aligned}\tag{4.203}$$

де $\widetilde{\mathbf{x}}^{(1)}_{z.}$ є z-им рядком матриці $\widetilde{\mathbf{X}}_1=\mathbf{X}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*$. Тут $\mathbf{X}_1$ – матриця, яка знайдена в пункті (i). Побудуємо матрицю $\mathbf{P}_1=\left(p^{(1)}_{zj}\right)\in\mathbb{H}^{n\times r}$. Далі, є очевидним, що

$$t^{(1)}_{qj}:=\sum_{z=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_7,n}\{q\}}\mathrm{cdet}_q\left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.q}\left(\mathbf{a}^{(2,T)}_{.z}\right)\right)^{\beta}_{\beta}p^{(1)}_{zj}=\sum_{\beta\in J_{r_7,n}\{q\}}\mathrm{cdet}_q\left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.q}\left(\tilde{\mathbf{t}}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$$

де $\tilde{\mathbf{t}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^*\mathbf{A}_2\mathbf{P}_1$. Побудуємо матрицю $\mathbf{T}_1 = (t_{qj}^{(1)}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$ і введемо матрицю $\widetilde{\mathbf{H}} := \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{T}_1$. З цих уведень і рівняння (4.202), випливає, що

$$x_{ij}^{(4)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\tilde{\mathbf{h}}_{.j}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,r}} |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|_\alpha^\alpha}, \tag{4.204}$$

де $\tilde{\mathbf{h}}_{.j}$ є j-им стовпцем матриці $\widetilde{\mathbf{H}}$.

(v) Для п'ятого доданку $\mathbf{X}_5 = \left(x_{ij}^{(5)}\right) := \mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^\dagger\mathbf{P}_{B_2}$, маємо

$$x_{ij}^{(5)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{f=1}^{r}\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,H)}\right)\right)_\beta^\beta x_{qf}^{(1)}\, p_{fj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_\beta^\beta},$$

де $\mathbf{a}_{.q}^{(2,H)}$ – q-й стовпець матриці $\mathbf{H}^*\mathbf{A}_2$. Позначимо $\widehat{\mathbf{H}} := \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{P}_1$, де матриця $\mathbf{P}_1 = (p_{qj}^{(1)})$ визначається у (4.203). Тоді, аналогічно до попереднього випадку, одержимо

$$x_{ij}^{(5)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\widehat{\mathbf{h}}_{.j}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,r}} |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|_\alpha^\alpha}, \tag{4.205}$$

де $\widehat{\mathbf{h}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widehat{\mathbf{H}}$.

(vi) Розглянемо шостий доданок $\mathbf{X}_6 = \left(x_{ij}^{(6)}\right) := \mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{T}^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^\dagger$. Отже,

$$x_{ij}^{(6)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,H)}\right)\right)_\beta^\beta \phi_{qj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,r}} |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|_\alpha^\alpha}, \tag{4.206}$$

де ϕ_{qj} – (qj)-й елемент матриці $\mathbf{\Phi}$ такої, що $\frac{1}{\delta}\mathbf{\Phi} := \mathbf{T}^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^\dagger$ і

$$\delta = \left(\sum_{\beta\in J_{r_7,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_\beta^\beta \sum_{\alpha\in I_{r_4,r}} |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|_\alpha^\alpha\right) \in \mathbb{R}.$$

За Теоремою 4.11 матриця $\mathbf{\Phi} = (\phi_{qj}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$ має визначникове зображення

$$\phi_{qj} = \sum_{\beta\in J_{r_7,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_q\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.\,q}\left(\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{B_2}\right)\right)_\beta^\beta = \sum_{\alpha\in I_{r_4,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*\right)_{j.}\left(\boldsymbol{\varphi}_{q.}^{T}\right)\right)_\alpha^\alpha,$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{B_2}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_4,r}\{f\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*\right)_{j.}\left(\check{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\quad q=1,\ldots,n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{q.}^{T}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_7,n}\{q\}}\mathrm{cdet}_q\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.q}\left(\check{\mathbf{c}}_{.l}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times r},\quad l=1,\ldots,r.$$

Тут $\check{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)}$ і $\check{\mathbf{c}}_{.l}^{(2)}$ є q-м рядком і l-м стовпцем матриці $\check{\mathbf{C}}_2=\mathbf{T}^*\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^*$. Введемо матрицю $\widetilde{\mathbf{\Phi}}:=\mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{\Phi}$. З цього уведення і рівняння (4.206), випливає

$$x_{ij}^{(6)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,n}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in J_{r_4,r}}\left|\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},\tag{4.207}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$.

(vii) Для сьомого доданку $\mathbf{X}_7=\left(x_{ij}^{(7)}\right):=\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{B}_2\mathbf{N}^{\dagger}$ розв'язку (4.195), використовуючи (2.8) для визначникового зображення матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{T}^{\dagger}$ та (2.7) для $\mathbf{N}^{\dagger}$, одержимо

$$x_{ij}^{(7)}=\frac{\sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{f=1}^{r}\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,T)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}x_{qf}^{(1)}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_6,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{N}\mathbf{N}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{b}_{f.}^{(2,N)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_6,r}}\left|\mathbf{N}\mathbf{N}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},\tag{4.208}$$

де $\mathbf{a}_{.q}^{(2,T)}$, $\mathbf{b}_{f.}^{(2,N)}$ є q-м стовпцем матриці $\mathbf{T}^*\mathbf{A}_2$ і f-м рядком матриці $\mathbf{B}_2\mathbf{N}^*$, відповідно. Знайдемо

$$\begin{aligned}\omega_{qj}&:=\sum_{f=1}^{r}x_{qf}^{(1)}\sum_{\alpha\in I_{r_6,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{N}\mathbf{N}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{b}_{f.}^{(2,N)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\\&=\sum_{\alpha\in I_{r_6,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{N}\mathbf{N}^*\right)_{j.}\left(\widehat{\mathbf{x}}_{q.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha},\end{aligned}\tag{4.209}$$

де $\widehat{\mathbf{x}}_{q.}^{(1)}$ – q-й рядок матриці $\widehat{\mathbf{X}}_1:=\mathbf{X}_1\mathbf{B}_2\mathbf{N}^*$, а $\mathbf{X}_1$ є визначеним у пункті (i). Побудуємо матрицю $\mathbf{\Omega}=(\omega_{qj})$ таку, що ω_{qj} визначається в (4.209) і введемо матрицю $\widehat{\mathbf{\Omega}}:=\mathbf{T}^*\mathbf{A}_2\mathbf{\Omega}$. З цих уведень та рівняння (4.208), випливає

$$x_{ij}^{(7)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_6,r}}\left|\mathbf{N}\mathbf{N}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},\tag{4.210}$$

де $\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{.j}$ є j-им стовпцем матриці $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$.

Отже, ми довели наступну теорему.

Теорема 4.25. *Нехай* $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{H}^{r\times s}_{r_2}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k\times n}_{r_3}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}^{r\times p}_{r_4}$, *і* $\operatorname{rank}\mathbf{H} = r_5$, $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_6$, $\operatorname{rank}\mathbf{T} = r_7$. *Тоді частковий розв'язок (4.195),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, *системи (4.189) покомпонентно*

$$x_{ij} = \sum_{l=1}^{4} x_{ij}^{(l)} - \sum_{l=5}^{7} x_{ij}^{(l)},$$

має визначникові зображення, де $x_{ij}^{(1)}$ *виражається як (4.196) або (4.197),* $x_{ij}^{(2)}$ *– (4.198)-(4.238),* $x_{ij}^{(3)}$ *– (4.200)-(4.201),* $x_{ij}^{(4)}$ *– (4.204),* $x_{ij}^{(5)}$ *– (4.205),* $x_{ij}^{(6)}$ *– (4.207), і* $x_{ij}^{(7)}$ *– (4.210).*

4.3.2. Правила Крамера для часткових випадків системи кватерніонових рівнянь.

1. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2, \end{cases} \tag{4.211}$$

яку можемо отримати з системи (4.189), поклавши $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}_r$ як одиничну.

Лема 4.23. *[253] Нехай* $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k\times n}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}^{r\times p}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{k\times p}$ *– відомі матриці, а матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times r}$ *– невідома. Покладемо* $\mathbf{H} = \mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1}$. *Тоді, наступні твердження є еквівалентними.*

(i) Система (4.211) є сумісною.

(ii) $\mathbf{R}_{A_1}\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_H(\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_2) = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_2\mathbf{L}_{B_2} = \mathbf{0}$.

(iii) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1\end{bmatrix} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}_1]$, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix} = \operatorname{rank}[\mathbf{B}_2]$,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{C}_2\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2\end{bmatrix}.$$

У цьому випадку розв'язок системи (4.211) можна виразити як

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{H}^{\dagger}(\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_2)\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{L}_H\mathbf{Z}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{W}_1\mathbf{R}_{B_2},$$

де $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{W}_1$ *– довільні кватерніонові матриці відповідних розмірів.*

Оскільки $\mathbf{L}_{A_1}$ – проективна матриця, то за Лемою 4.7, $\mathbf{L}_{A_1}\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{L}_{A_1}(\mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1})^\dagger = \mathbf{H}^\dagger$, і тоді $\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1 + \mathbf{H}^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^\dagger - \mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^\dagger + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{L}_H\mathbf{Z}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{W}_1\mathbf{R}_{B_2}$. Поклавши матриці $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{W}_1$ як нульові, одержимо наступний частковий розв'язок рівняння (4.211),

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1 + \mathbf{H}^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^\dagger - \mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^\dagger. \tag{4.212}$$

У наступній теоремі розглянемо визначникові зображення розв'язку (4.212).

Теорема 4.26. *Нехай* $\mathbf{A}_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{A}_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}_{r_2}^{k\times n}$, $\mathbf{B}_2 = \left(b_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}_{r_3}^{r\times p}$, $\mathbf{C}_1 = \left(c_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{C}_2 = \left(c_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}^{k\times p}$, $\operatorname{rank}\mathbf{H} = r_4$. *Тоді частковий розв'язок (4.212),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, *покомпонентно,* $x_{ij} = x_{ij}^{(1)} + x_{ij}^{(2)} - x_{ij}^{(3)}$, *має наступні визначникові зображення*

(i)

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\beta^\beta}, \tag{4.213}$$

де $\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}$ *– j-й стовпець матриці* $\hat{\mathbf{C}}_1 := \mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1$.

(ii)

$$x_{ij}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}(\mathbf{v}_{i.}^{(1)})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}} \left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}} \left|\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*\right|_\alpha^\alpha} = \tag{4.214}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}} \left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}} \left|\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*\right|_\alpha^\alpha}, \tag{4.215}$$

де

$$\mathbf{v}_{i.}^{(1)} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.t}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad t = 1,\ldots,r,$$

$$\mathbf{v}_{.j}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}\left(\hat{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)}\right)\right)_\alpha^\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad q = 1,\ldots,n.$$

Тут $\hat{\mathbf{c}}_{.t}^{(2)}$ *і* $\hat{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)}$ *є t-м стовпцем і q-м рядком матриці* $\hat{\mathbf{C}}_2 := \mathbf{H}^*\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^*$.

(iii)

$$x_{ij}^{(3)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,r}} |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|_\alpha^\alpha}, \tag{4.216}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{\Phi}$. *Матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{qj})$ *визначається наступним чином*

$$\phi_{qj} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_q\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.\,q} \left(\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{B_2}\right)\right)_\beta^\beta = \sum_{\alpha \in I_{r_3,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.} \left(\boldsymbol{\varphi}_{q\,.}^{A_1}\right)\right)_\alpha^\alpha,$$

а

$$\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{B_2} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_3,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.} \left(\widetilde{\mathbf{c}}_{l.}^{(1)}\right)\right)_\alpha^\alpha \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1, \ldots, n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{q.}^{A_1} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.q} \left(\widetilde{\mathbf{c}}_{.t}^{(1)}\right)\right)_\beta^\beta \right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad t = 1, \ldots, r.$$

Тут $\widetilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(1)}$ *і* $\widetilde{\mathbf{c}}_{.l}^{(1)}$ *є* q*-м рядком і* l*-м стовпцем матриці* $\widetilde{\mathbf{C}}_1 := \mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*$.

Доведення. Розглянемо кожен доданок розв'язку (4.212).

(i) Для першого доданку, $\mathbf{X}_1 = (x_{ij}^{(1)}) := \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1$, визначникове зображення (4.213) очевидно випливає з Теореми 4.2.

(ii) Аналогічно, для другого доданку, $\mathbf{X}_2 = (x_{ij}^{(2)}) := \mathbf{H}^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^\dagger$, визначникові зображення (4.214) і (4.215) безпосередньо випливають з Теореми 4.11.

(iii) Розглянемо третій доданок $\mathbf{X}_3 = \left(x_{ij}^{(3)}\right) := \mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\mathbf{P}_{B_2}$. Отже,

$$x_{ij}^{(3)} = \sum_{t=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\sum_{z=1}^{k} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.\,i}\left(\mathbf{h}_{.z}^*\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_\beta^\beta} a_{zq}^{(2)} \times$$
$$\frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.q} \left(\mathbf{a}_{.l}^{(1),*}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1|_\beta^\beta} c_{lt}^{(1)} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{b}}_{t.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,r}} |\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*|_\alpha^\alpha}, \tag{4.217}$$

де $\mathbf{h}^*_{.z}$ – z-й стовпець матриці $\mathbf{H}^*$, $\mathbf{a}^{(1),*}_{.l}$ – l-й стовпець матриці $\mathbf{A}_1^*$, і $\ddot{\mathbf{b}}_{t.}$ є t-м рядком матриці $\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*$. Позначимо $\widetilde{\mathbf{C}}_1 := \mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*$. Нехай $\mathbf{e}_{z.}$ and $\mathbf{e}_{.z}$ є одиничними вектор-рядком та вектор-стовпцем. Очевидно, що

$$\phi_{qj} = \\ \sum_{t=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{cdet}_q\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.q}\left(\mathbf{a}^{(1),*}_{.l}\right)\right)_{\beta}^{\beta} c^{(1)}_{lt} \sum_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{b}}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha} = \\ \sum_{t=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{cdet}_q\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.q}(\mathbf{e}_{.l})\right)_{\beta}^{\beta} \widetilde{c}^{(1)}_{lt} \sum_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}. \tag{4.218}$$

Покладемо

$$\varphi^{B_2}_{lj} = \sum_{t=1}^{r}\widetilde{c}^{(1)}_{lt}\sum_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha} = \\ = \sum_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}\left(\widetilde{\mathbf{c}}^{(1)}_{l.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}$$

як l-у компоненту вектор-стовпця $\boldsymbol{\varphi}^{B_2}_{.j} = \left[\varphi^{B_2}_{1j},\ldots,\varphi^{B_2}_{mj}\right]$. Тоді з (4.277), слідує

$$\phi_{qj} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{cdet}_q\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.q}(\mathbf{e}_{.l})\right)_{\beta}^{\beta}\varphi^{B_2}_{lj} = \\ = \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{cdet}_q\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.q}\left(\boldsymbol{\varphi}^{B_2}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}. \tag{4.219}$$

Тепер покладемо

$$\varphi^{A_1}_{qt} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{cdet}_q\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.q}(\mathbf{e}_{.l})\right)_{\beta}^{\beta}\widetilde{c}^{(1)}_{lt} = \\ = \sum_{l=1}^{m}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{q\}} \mathrm{cdet}_q\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.q}\left(\widetilde{c}^{(1)}_{.t}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

як t-у компоненту вектор-рядка $\boldsymbol{\varphi}^{A_1}_{q.} = \left[\varphi^{A_1}_{q1},\ldots,\varphi^{A_1}_{qr}\right]$. Тоді з (4.277), випливає

$$\phi_{qj} = \sum_{t=1}^{r}\varphi^{A_1}_{qt}\sum_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}(\boldsymbol{\varphi}^{A_1}_{q.})\right)_{\alpha}^{\alpha}. \tag{4.220}$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{qj})$, що визначається формулами (4.219) або (4.220) і введемо матрицю $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{\Phi}$. Внісши ці позначення у рівняння (4.217), одержимо (4.216). □

2. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \mathbf{X}\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2, \end{cases} \tag{4.221}$$

яку можемо отримати з системи (4.189), поклавши $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_n$ як одиничну.

Наступна лема дає умови сумісності системи (4.221) та загальний вираз його розв'язку.

Лема 4.24. *[253] Нехай $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{n\times s}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k\times n}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}^{r\times p}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{k\times p}$ – задані, а $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times r}$ – невідома. Покладемо $\mathbf{N} = \mathbf{R}_{B_1}\mathbf{B}_2$. Наступні твердження є еквівалентними.*

(i) Система (4.221) – сумісна.

(ii) $\mathbf{R}_{A_2}\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{B}_2)\mathbf{L}_N = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_2\mathbf{L}_{B_2} = \mathbf{0}$.

(iii) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_2 & \mathbf{C}_2\end{bmatrix} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}_2]$, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}_1\end{bmatrix} = \operatorname{rank}[\mathbf{B}_1]$,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1\end{bmatrix}.$$

У цьому випадку загальний розв'язок системи (4.221) є

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger} + \mathbf{A}_2^{\dagger}(\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{B}_2)\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{R}_{B_1} + \mathbf{L}_{A_2}\mathbf{W}_2\mathbf{R}_{B_1} + \mathbf{Z}_2\mathbf{R}_N\mathbf{R}_{B_1},$$

де $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{W}_2$ – довільні кватерніонові матриці відповідних розмірів.

Оскільки $\mathbf{R}_{B_1}$ – проективна матриця, то за Лемою 4.7,

$$\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{R}_{B_1} = (\mathbf{R}_{B_1}\mathbf{B}_2)^{\dagger}\,\mathbf{R}_{B_1} = \mathbf{N}^{\dagger}.$$

Тоді

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger} + \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{N}^{\dagger} - \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{B}_2\mathbf{N}^{\dagger} + \mathbf{L}_{A_2}\mathbf{W}_2\mathbf{R}_{B_1} + \mathbf{Z}_2\mathbf{R}_N\mathbf{R}_{B_1}.$$

Поклавши матриці $\mathbf{Z}_2$ і $\mathbf{W}_2$ як нульові, одержимо наступний частковий розв'язок системи (4.221),

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger} + \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2\mathbf{N}^{\dagger} - \mathbf{Q}_{A_2}\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^{\dagger}\mathbf{B}_2\mathbf{N}^{\dagger}. \tag{4.222}$$

Теорема 4.27. *Нехай* $\mathbf{B}_1 = \left(b_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}_{r_1}^{r\times s}$, $\mathbf{A}_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}_{r_2}^{k\times n}$, $\mathbf{B}_2 = \left(b_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}_{r_3}^{r\times p}$, $\mathbf{C}_1 = \left(c_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}^{n\times s}$, $\mathbf{C}_2 = \left(c_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}^{k\times p}$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_4$. *Тоді частковий розв'язок (4.222),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, *покомпонентно,* $x_{ij} = x_{ij}^{(1)} + x_{ij}^{(2)} - x_{ij}^{(3)}$, *має визначникові зображення:*

(i)

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*)_{j.}\left(\widetilde{\mathbf{c}}_{i.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,r}} |\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.223}$$

де $\widetilde{\mathbf{c}}_{i.}^{(1)}$ *– i-й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{C}}_1 := \mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^*$.

(ii)

$$x_{ij}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{j.}(\mathbf{u}_{i.}^{(1)})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,r}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|_{\alpha}^{\alpha}} = \tag{4.224}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2)_{.i}\left(\mathbf{u}_{.j}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,r}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.225}$$

де

$$\mathbf{u}_{i.}^{(1)} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2)_{.i}\left(\tilde{\mathbf{c}}_{.t}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad t = 1,\dots,r,$$

$$\mathbf{u}_{.j}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_4,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad q = 1,\dots,n.$$

Тут $\tilde{\mathbf{c}}_{.t}^{(2)}$ *і* $\tilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)}$ *є t-м стовпцем і q-м рядком матриці* $\mathbf{A}_2^*\mathbf{C}_2\mathbf{N}^* =: \widetilde{\mathbf{C}}_2 = (\tilde{c}_{ij}^{(2)}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, *відповідно.*

(iii)

$$x_{ij}^{(3)} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{NN}^*)_{j.} \left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{i.} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,s}} |\mathbf{B}_1^* \mathbf{B}_1|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,r}} |\mathbf{NN}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.226}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} := \boldsymbol{\Psi}\mathbf{B}_2\mathbf{N}^*$*. Матриця* $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{it})$ *задається як*

$$\psi_{it} = \sum_{\beta \in J_{r_2,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{.i} \left(\boldsymbol{\varphi}_{.t}^{B_1} \right) \right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\alpha \in I_{r_1,r}\{t\}} \operatorname{rdet}_t \left((\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^*)_{t.} \left(\boldsymbol{\varphi}_{i.}^{A_2} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}_{.t}^{B_1} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_1,r}\{t\}} \operatorname{rdet}_t \left((\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^*)_{t.} \left(\widehat{\mathbf{c}}_{g.}^{(1)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad g = 1, \ldots, n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{i.}^{A_2} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_2,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{.i} \left(\widehat{\mathbf{c}}_{.z}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times s}, \quad z = 1, \ldots, s.$$

Тут $\widehat{\mathbf{c}}_{g.}^{(1)}$ *і* $\widehat{\mathbf{c}}_{.z}^{(1)}$ *є* g*-м рядком та* z*-м стовпцем матриці* $\widehat{\mathbf{C}}_1 := \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1^*$*.*

Доведення. Розглянемо кожен доданок розв'язку (4.222).

(i) Для першого доданку, $\mathbf{X}_1 = (x_{ij}^{(1)}) := \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1^{\dagger}$, визначникове зображення (4.223) очевидно випливає з Теореми 4.2.

(ii) Для другого доданку (4.212), $\mathbf{X}_2 = (x_{ij}^{(2)}) := \mathbf{H}^{\dagger} \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2^{\dagger}$, визначникові зображення (4.224) і (4.225) безпосередньо випливають з Теореми 4.11.

(iii) Розглянемо третій доданок $\mathbf{X}_3 = \left(x_{ij}^{(3)} \right) := \mathbf{Q}_{A_2} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1^{\dagger} \mathbf{B}_2 \mathbf{N}^{\dagger}$. Використовуючи визначникові зображення (2.8) та (2.7) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{B}_1^{\dagger}$ та $\mathbf{N}^{\dagger}$, відповідно, та проективної матриці (2.14) для $\mathbf{Q}_{A_2}$, одержимо

$$x_{ij}^{(3)} = \sum_{g=1}^{n} \sum_{z=1}^{s} \sum_{t=1}^{r} \sum_{f=1}^{p} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{.i} (\dot{\mathbf{a}}_{.g}) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2|_{\beta}^{\beta}} c_{gz}^{(1)}$$
$$\times \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,r}\{t\}} \operatorname{rdet}_t \left((\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^*)_{t.} \left(\mathbf{b}_{z.}^{(1),*} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,r}} |\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^*|_{\alpha}^{\alpha}} b_{tf}^{(2)} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{NN}^*)_{j.} \left(\mathbf{n}_{f.}^* \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_4,r}} |\mathbf{NN}^*|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.227}$$

де $\dot{\mathbf{a}}_{.g}$ – g-й стовпець матриці $\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2$, $\mathbf{b}_{z.}^{(1),*}$ – z-й рядок матриці $\mathbf{B}_1^*$ та $\mathbf{n}_{f.}^*$ – f-й рядок матриці $\mathbf{N}^*$. Позначимо $\widehat{\mathbf{C}}_1 := \mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1^*$. Очевидно, що

$$\psi_{it} = \sum_{g=1}^{n}\sum_{z=1}^{s}\sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{.i}\left(\dot{\mathbf{a}}_{.g}\right)\right)_\beta^\beta c_{gz}^{(1)} \sum_{\alpha\in I_{r_1,r}\{t\}} \mathrm{rdet}_t\left(\left(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right)_{t.}\left(\mathbf{b}_{z.}^{(1),*}\right)\right)_\alpha^\alpha = \sum_{g=1}^{n}\sum_{z=1}^{s}\sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.g}\right)\right)_\beta^\beta \widehat{c}_{gz}^{(1)} \sum_{\alpha\in I_{r_1,r}\{t\}} \mathrm{rdet}_t\left(\left(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right)_{t.}\left(\mathbf{e}_{z.}\right)\right)_\alpha^\alpha, \quad (4.228)$$

де $\mathbf{e}_{.g}$ та $\mathbf{e}_{z.}$ є одиничними g-м вектор-стовпцем та z-м вектор-рядком. Покладемо

$$\varphi_{gt}^{B_1} = \sum_{z=1}^{s} \widehat{c}_{gz}^{(1)} \sum_{\alpha\in I_{r_1,r}\{t\}} \mathrm{rdet}_t\left(\left(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right)_{t.}\left(\mathbf{e}_{z.}\right)\right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{r_1,r}\{t\}} \mathrm{rdet}_t\left(\left(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right)_{t.}\left(\widehat{\mathbf{c}}_{g.}^{(1)}\right)\right)_\alpha^\alpha$$

як g-у компоненту вектор-стовпця $\boldsymbol{\varphi}_{.t}^{B_1} = \left[\varphi_{1t}^{B_1}, \ldots, \varphi_{nt}^{B_1}\right]$. Тоді з (4.228) випливає

$$\psi_{it} = \sum_{g=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{.i}\left(\dot{\mathbf{a}}_{.g}\right)\right)_\beta^\beta \varphi_{gt}^{B_1} = \sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\boldsymbol{\varphi}_{.t}^{B_1}\right)\right)_\beta^\beta. \quad (4.229)$$

Нехай тепер

$$\varphi_{iz}^{A_2} = \sum_{g=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.g}\right)\right)_\beta^\beta \widehat{c}_{gz}^{(1)} = \sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{.i}\left(\widehat{\mathbf{c}}_{.z}^{(1)}\right)\right)_\beta^\beta$$

є z-ю компонентою вектор-рядка $\boldsymbol{\varphi}_{i.}^{A_2} = \left[\varphi_{i1}^{A_2}, \ldots, \varphi_{is}^{A_2}\right]$. Тоді з (4.228), випливає

$$\psi_{it} = \sum_{z=1}^{s} \varphi_{iz}^{A_2} \sum_{\alpha\in I_{r_1,r}\{t\}} \mathrm{rdet}_t\left(\left(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right)_{t.}\left(\mathbf{e}_{z.}\right)\right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{r_1,r}\{t\}} \mathrm{rdet}_t\left(\left(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^*\right)_{t.}\left(\boldsymbol{\varphi}_{i.}^{A_2}\right)\right)_\alpha^\alpha. \quad (4.230)$$

Побудуємо матрицю $\boldsymbol{\Psi} = (\phi_{qj})$, що визначається умовами (4.229) або (4.230) і введемо матрицю $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} := \boldsymbol{\Psi}\mathbf{B}_2\mathbf{N}^*$. Підставивши ці значення у рівняння (4.227), одержимо (4.226).

$\square$

3. Тепер, нехай обидва рівняння системи (4.189) є односторонніми. Тобто, нехай в системі (4.189) матриці $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{A}_2$ є одиничними. Тоді, маємо систему

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2. \end{cases} \tag{4.231}$$

Лема 4.25. *[256] Нехай* $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}^{r\times p}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{n\times p}$ *– відомі матриці, а матриця* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times r}$ *–невідома. Тоді система (4.231) є сумісною тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{R}_{A_1}\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_2\mathbf{L}_{B_2} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_1\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{B}_2$. *При цих умовах, загальний розв'язок системи (4.231) може бути виражений як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{U}\mathbf{R}_{B_2}, \tag{4.232}$$

де $\mathbf{U}$ *– довільна матриця відповідних розмірів.*

За умов сумісності, розв'язок (4.232) може також бути виражений як

$$\begin{aligned} \mathbf{X} =& \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}\right) + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{U}\mathbf{R}_{B_2} = \\ =& \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}\right) + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{U}\mathbf{R}_{B_2} = \\ =& \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{R}_{B_2} + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{U}\mathbf{R}_{B_2}. \end{aligned} \tag{4.233}$$

З умов 4.232 і 4.233 слідує, що частковий розв'язок системи (4.231) може бути заданий умовами

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} - \mathbf{Q}_{A_1}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}, \tag{4.234}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{R}_{B_2} = \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{P}_{B_2}. \tag{4.235}$$

Виходячи з формули (4.234), маємо наступну теорему.

Теорема 4.28. *Нехай* $\mathbf{A}_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B}_2 = \left(b_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}_{r_2}^{r\times p}$, $\mathbf{C}_1 = \left(c_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{C}_2 = \left(c_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}^{n\times r}$. *Позначимо* $\mathbf{A}_1^{*}\mathbf{C}_1 =: \hat{\mathbf{C}}_1 = (\hat{c}_{ij}^{(1)}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$ *та* $\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{*} =: \hat{\mathbf{C}}_2 = (\hat{c}_{ij}^{(2)}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$. *Частковий розв'язок (4.234),* $\mathbf{X}^0 = (x_{ij}^0) \in \mathbb{H}^{n\times s}$, *має* *визначникове зображення,*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1 \right)_{.\,i} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left| \mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1 \right|_\beta^\beta} + \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^* \right)_{j.} \left(\hat{\mathbf{c}}_{i.}^{(2)} \right) \right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} \left| \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^* \right|_\alpha^\alpha} - x_{ij}^{(3)}, \tag{4.236}$$

де

$$x_{ij}^{(3)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1 \right)_{.i} \left(\mathbf{d}_{.j}^{B_2} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left| \mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1 \right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} \left| \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^* \right|_\alpha^\alpha} = \tag{4.237}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^* \right)_{j.} \left(\mathbf{d}_{i.}^{A_1} \right) \right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left| \mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1 \right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} \left| \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^* \right|_\alpha^\alpha}. \tag{4.238}$$

Тут

$$\mathbf{d}_{.j}^{B_2} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^* \right)_{j.} \left(\tilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)} \right) \right)_\alpha^\alpha \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{A_1} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1 \right)_{.i} \left(\tilde{\mathbf{c}}_{.l}^{(2)} \right) \right)_\beta^\beta \right] \in \mathbb{H}^{1 \times r}, \quad l = 1, \ldots, r,$$

та $\tilde{\mathbf{c}}_{q.}^{(2)}$ *і* $\tilde{\mathbf{c}}_{.l}^{(2)}$ *є* q*-м рядком і* l*-м стовпцем матриці* $\widetilde{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2^*$*, крім того,* $\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\hat{\mathbf{C}}_1$ *та* $\hat{\mathbf{c}}_{i.}^{(2)}$ *–* i*-й рядок матриці* $\hat{\mathbf{C}}_2$*.*

Доведення. Доведення, очевидно, випливає з того, що до першого доданку, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1$, застосуємо Теорему 4.2, до другого, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2^\dagger$, – Теорему 4.4, а до третього, $\mathbf{X}_3 = \mathbf{Q}_{A_1} \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2^\dagger$, – Теорему 4.11. □

Зауваження 4.5. *Для виразу (4.235) одержимо те ж визначникове зображення (4.236) з тою різницею, що*

$$\mathbf{d}^{B_2}_{.j} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.} \left(\tilde{\mathbf{c}}^{(1)}_{q.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{d}^{A_1}_{i.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.i} \left(\tilde{\mathbf{c}}^{(1)}_{.l} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1\times r}, \quad l = 1, \ldots, r.$$

Тут $\tilde{\mathbf{c}}^{(2)}_{q.}$ і $\tilde{\mathbf{c}}^{(1)}_{.l}$ є q-м рядком і l-м стовпцем матриці $\widetilde{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*$.

4. Нехай у системі (4.189) обидві матриці $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ є одиничними. Тоді маємо

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X} = \mathbf{C}_2. \end{cases} \tag{4.239}$$

Лема 4.26. *[253] Нехай $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k\times n}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{k\times r}$ – відомі матриці, а $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times r}$ – невідома. Позначимо $\mathbf{H} := \mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1}$, $\mathbf{T} := \mathbf{R}_H\mathbf{A}_2$. Тоді система (4.239) є сумісною тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_i^{\dagger}\mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i$, для всіх $i = 1, 2$ та $\mathbf{T}(\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1) = \mathbf{0}$. За цих умов, загальний розв'язок рівняння (4.239) виражається як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1) + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{L}_H\mathbf{Y}, \tag{4.240}$$

де $\mathbf{Y}$ – довільна матриця відповідних розмірів.

За Лемою 4.7 та за умовами сумісності, можна отримати деяке спрощення виразу (4.240), а саме $\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2 - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{L}_H\mathbf{Y}$. Відповідно, будемо розглядати наступний частковий розв'язок системи (4.239),

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2 - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1. \tag{4.241}$$

Теорема 4.29. *Нехай $\mathbf{A}_1 = \left(a^{(1)}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{A}_2 = \left(a^{(2)}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{k\times n}_{r_2}$, $\mathbf{C}_1 = \left(c^{(1)}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{C}_2 = \left(c^{(2)}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{k\times r}$ і $\mathrm{rank}\,\mathbf{H} = r_3$. Позначимо $\mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1 =: \hat{\mathbf{C}}_1 = (\hat{c}^{(1)}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, $\mathbf{H}^*\mathbf{C}_2 =: \hat{\mathbf{C}}_2 = (\hat{c}^{(2)}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, і $\mathbf{H}^*\mathbf{A}_2 =: \hat{\mathbf{A}}_2 = (\hat{a}^{(2)}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Тоді $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$ має визначникове зображення,*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.i} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1|_{\beta}^{\beta}} + \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^* \mathbf{H})_{.i} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(2)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^* \mathbf{H}|_{\beta}^{\beta}} - \\ - \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^* \mathbf{H})_{.i} \left(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^* \mathbf{H}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1|_{\beta}^{\beta}}, \quad (4.242)$$

де $\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}$, $\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(2)}$ *та* $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$ *– j-і стовпці матриць* $\hat{\mathbf{C}}_1$, $\hat{\mathbf{C}}_2$, $\hat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{H}^* \mathbf{A}_2 \mathbf{\Phi}$, *відповідно. Матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{lj})$ *визначається з умови*

$$\phi_{lj} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.l} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}.$$

Доведення. Очевидно, що до першого і другого доданку застосовуємо Теорему 4.2. Для визначникового зображення третього доданку, $\mathbf{X}_3 = \mathbf{H}^{\dagger} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{\dagger} \mathbf{C}_1$, використаємо визначникове зображення (2.7) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{H}^{\dagger}$ та $\mathbf{A}_1^{\dagger}$, тоді одержимо

$$x_{ij}^{(3)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^* \mathbf{H})_{.i} \left(\hat{\mathbf{a}}_{.l}^{(2)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^* \mathbf{H}|_{\beta}^{\beta}} \cdot \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.l} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}$ – j-й стовпець матриці $\hat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{A}_1^* \mathbf{C}_1$ і $\hat{\mathbf{a}}_{.l}^{(2)}$ – l-й стовпець матриці $\hat{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{H}^* \mathbf{A}_2$. Нехай

$$\phi_{lj} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.l} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}$$

та побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{lj})$. З того, що $\sum_l \hat{\mathbf{a}}_{.l}^{(2)} \phi_{lj} = \hat{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$, де $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\hat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{H}^* \mathbf{A}_2 \mathbf{\Phi}$, випливає (4.242). □

4.3.3. Правило Крамера для системи двосторонніх матричних рівнянь з $*$-ермітовістю. Розглянемо систему матричних рівнянь,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{X} \mathbf{A}_1^* = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{X} \mathbf{A}_2^* = \mathbf{C}_2. \end{cases} \quad (4.243)$$

Оскільки

$$\mathbf{Q}_{A_i^*} = (\mathbf{A}_i^*)^\dagger \, \mathbf{A}_i^* = \left(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_i^\dagger\right)^* = \mathbf{P}_{A_i},$$

то $\mathbf{P}_{A_i^*} = \mathbf{Q}_{A_i}$, $\mathbf{L}_{A_i^*} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}_{A_i^*} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{A_i} = \mathbf{R}_{A_i}$, і $\mathbf{R}_{A_i^*} = \mathbf{L}_{A_i}$ для $i = 1, 2$. Поклавши $\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i^*$ у системі (4.189), одержимо $\mathbf{N} = \mathbf{R}_{A_1^*}\mathbf{A}_2^* = (\mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1})^* = \mathbf{H}^*$ та $\mathbf{F} = \mathbf{A}_2^*\mathbf{L}_{H^*} = (\mathbf{R}_H\mathbf{A}_2)^* = \mathbf{T}^*$. Звідси, маємо наступний аналог Леми 4.22.

Лема 4.27. *Нехай матриці $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k\times n}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{k\times k}$ є заданими та $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – невідома. Система (4.243) є сумісною тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}_{A_i}\mathbf{C}_i\mathbf{P}_{A_i} = \mathbf{C}_i, \quad i = 1, 2; \quad \mathbf{T}\left[\mathbf{A}_2^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2^{\dagger,*} - \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger,*}\right]\mathbf{T}^* = \mathbf{0}$. У цьому випадку загальний розв'язок системи (4.243) виражається як*

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} =& \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^*\right)^\dagger + \mathbf{H}^\dagger\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^*)^\dagger + \mathbf{H}^\dagger\left(\mathbf{A}_2\mathbf{T}^\dagger - \mathbf{I}\right)\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^*)^\dagger\mathbf{Q}_{A_2} - \\
&-\mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{T}^\dagger\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^*)^\dagger + \mathbf{T}^\dagger\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^*)^\dagger - \mathbf{T}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^*)^\dagger\mathbf{A}_2^*(\mathbf{H}^*)^\dagger + \\
&+\mathbf{L}_{A_1}\left(\mathbf{Z} - \mathbf{H}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{A}_2^*(\mathbf{A}_2^*)^\dagger\right) - \mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{L}_T\mathbf{W}\mathbf{H}^*(\mathbf{A}_2^*)^\dagger + \\
&+\left(\mathbf{W} - \mathbf{T}^\dagger\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{H}^*(\mathbf{H}^*)^\dagger\right)\mathbf{L}_{A_1}.
\end{aligned}$$

де $\mathbf{Z}$ і $\mathbf{W}$ – довільні кватерніонові матриці відповідних розмірів.

Поклавши $\mathbf{Z}$, $\mathbf{W}$ – нульовими, маємо частковий розв'язок системи (4.243),

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} =& \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^*\right)^\dagger + \mathbf{H}^\dagger\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^*)^\dagger + \mathbf{T}^\dagger\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^*)^\dagger + \mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{T}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^*)^\dagger\mathbf{Q}_{A_2} - \\
&-\mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^*)^\dagger\mathbf{Q}_{A_2} - \mathbf{H}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{T}^\dagger\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^*)^\dagger - \mathbf{T}^\dagger\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^*)^\dagger\mathbf{A}_2^*(\mathbf{H}^*)^\dagger.
\end{aligned} \tag{4.244}$$

Далі, дамо визначникові зображення розв'язку (4.244).

Нехай $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k\times n}_{r_2}$, $\mathbf{C}_1 = \left(c_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{C}_2 = \left(c_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}^{k\times k}$, $\operatorname{rank}\mathbf{H} = r_3$ і $\operatorname{rank}\mathbf{T} = r_4$.

Розглянемо окремо кожен доданок розв'язку (4.244).

(i) Позначимо $\mathbf{C}_{11} := \mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1$. Для першого доданку $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^*\right)^\dagger = (x_{ij}^{(1)})$, маємо

$$x_{ij}^{(1)} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{t=1}^{m} a_{il}^{(1),\dagger}c_{lt}^{(1)}a_{tj}^{(1),*,\dagger}.$$

Використавши визначникові зображення (2.7) і (2.12) для матриць $\mathbf{A}_1^{\dagger}$ і $(\mathbf{A}_1^{*})^{\dagger}$, відповідно, одержимо

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(1),*}\right)\right)_{\beta}^{\beta} c_{lt}^{(1)} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{t.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\beta}^{\beta}}.$$

Нехай $\mathbf{e}_{l.}$ і $\mathbf{e}_{.l}$ є одиничними вектор-рядком і вектор-стовпцем. Оскільки, $\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{m} a_{fl}^{(1),*} c_{lt}^{(1)} a_{ts}^{(1)} = c_{fs}^{(11)}$, тоді

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.\,i}\left(\mathbf{e}_{.f}\right)\right)_{\beta}^{\beta} c_{fs}^{(11)} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\beta}^{\beta}}$$

Якщо знайдемо

$$v_{is}^{(1)} := \sum_{f=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.f}\right)\right)_{\beta}^{\beta} c_{fs}^{(11)} = \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{c}_{.s}^{(11)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

як s-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{v}_{i.}^{(1)} = \left[v_{i1}^{(1)}, \ldots, v_{in}^{(1)}\right]$, тоді

$$\sum_{s=1}^{m} v_{is}^{(1)} \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}.$$

Очевидно, що $\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\beta}^{\beta} = \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\alpha}^{\alpha}$, тоді для першого доданку розв'язку (4.244) отримаємо визначникове зображення

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}^{(1)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_{\alpha}^{\alpha}\right)^2}, \tag{4.245}$$

де

$$\mathbf{v}_{i.}^{(1)} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{c}_{.s}^{(11)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{4.246}$$

Якщо ж введемо

$$v_{fj}^{(2)} := \sum_{s=1}^{n} c_{fs}^{(11)} \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{s.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}\left(\mathbf{c}_{f.}^{(11)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}$$

як f-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{v}_{.j}^{(2)} = \left[v_{1j}^{(2)}, \ldots, v_{nj}^{(2)}\right]$, тоді

$$\sum_{f=1}^{n} \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.\,i} (\mathbf{e}_{.f}) \right)_\beta^\beta v_{fj}^{(2)} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.\,i} \left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)} \right) \right)_\beta^\beta.$$

Іншим визначниковим зображенням першого доданку розв'язку (4.244) є

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.i} \left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)} \right) \right)_\beta^\beta}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1|_\beta^\beta \right)^2}, \tag{4.247}$$

де

$$\mathbf{v}_{.j}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_1,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{j.} (\mathbf{c}_{f.}^{(11)}) \right)_\alpha^\alpha \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad f = 1, \ldots, n.$$

(ii) Аналогічно до попереднього пункту (або, використавши Теорему 4.11), для другого доданку $\mathbf{X}_2 = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^*)^\dagger = \left(x_{ij}^{(2)} \right)$, одержимо

$$x_{ij}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{H}^* \mathbf{H})_{.i} \left(\mathbf{d}_{.j}^{A_2} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^* \mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2|_\alpha^\alpha} = \tag{4.248}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{j.} \left(\mathbf{d}_{i.}^{H} \right) \right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^* \mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2|_\alpha^\alpha}, \tag{4.249}$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{A_2} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{j.} \left(\mathbf{c}_{q.}^{(21)} \right) \right)_\alpha^\alpha \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{H} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{H}^* \mathbf{H})_{.i} \left(\mathbf{c}_{.l}^{(21)} \right) \right)_\beta^\beta \right] \in \mathbb{H}^{1 \times n}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Тут $\mathbf{c}_{q.}^{(21)}$ і $\mathbf{c}_{.l}^{(21)}$ є q-м вектор-рядком і l-м вектор-стовпцем матриці $\mathbf{C}_{21} = \mathbf{H}^* \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_2$.

(iii) Для третього доданку $\mathbf{X}_3 = \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^*)^{\dagger}$, використавши (2.7) для визначникового зображення $\mathbf{T}^{\dagger}$ і (2.12) для визначникового зображення $(\mathbf{H}^*)^{\dagger}$, аналогічно до пункту (i), одержимо

$$x_{ij}^{(3)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.i}\left(\mathbf{d}_{.j}^{H}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\alpha}^{\alpha}} \tag{4.250}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{j.}\left(\mathbf{d}_{i.}^{T}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.251}$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{H} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_3,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{j.}\left(\mathbf{c}_{q.}^{(22)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{T} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.i}\left(\mathbf{c}_{.l}^{(22)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Тут $\mathbf{c}_{q.}^{(22)}$ –q-й рядок і $\mathbf{c}_{.l}^{(22)}$ – l-й стовпець матриці $\mathbf{C}_{22} = \mathbf{T}^*\mathbf{C}_2\mathbf{H}$.

(iv) Використовуючи (2.7) для визначникових зображень матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{H}^{\dagger}$ та $\mathbf{T}^{\dagger}$ для четвертого члена $\mathbf{X}_4 = \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^*)^{\dagger}\mathbf{Q}_{A_2}$, маємо

$$x_{ij}^{(4)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{z=1}^{n}\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i}\left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,H)}\right)\right)_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q\left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.q}\left(\mathbf{a}_{.z}^{(2,T)}\right)\right)_{\beta}^{\beta} x_{zf}^{(1)} q_{fj}^{A_2}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\mathbf{a}_{.q}^{(2,H)}$ є q-м стовпцем матриці $\mathbf{H}^*\mathbf{A}_2$, а $\mathbf{a}_{.z}^{(2,T)}$ є z-м стовпцем матриці $\mathbf{T}^*\mathbf{A}_2$, відповідно; $x_{zf}^{(1)}$ є (zf)-м елементом першого доданку $\mathbf{X}_1$, який знайдений у пункті (i); q_{fj} – (fj)-й елемент матриці $\mathbf{Q}_{A_2}$ з визначниковим зображенням

$$q_{fj}^{A_2} = \frac{\sum\limits_{\beta\in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2)_{j.}\left(\dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in I_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)}$ – f-й рядок матриці $\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2$. Нехай $\widetilde{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2$. З того, що

$$\sum_{f} x_{zf}^{(1)}\dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)} = \widetilde{\mathbf{x}}_{z.}^{(1)},$$

випливає

$$\phi_{zj} = \sum_f x_{zf}^{(1)} \sum_{\beta \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{j.} \left(\dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)} \right) \right)_\alpha^\alpha =$$
$$= \sum_{\beta \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{j.} \left(\widetilde{\mathbf{x}}_{z.}^{(1)} \right) \right)_\alpha^\alpha .$$

Побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{zj})$ і знайдемо $\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{T}^* \mathbf{A}_2 \mathbf{\Phi}$. Тоді введемо

$$\psi_{qj} = \sum_z \sum_{\beta \in J_{r_4,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q \left((\mathbf{T}^* \mathbf{T})_{.q} \left(\mathbf{a}_{.z}^{(2,T)} \right) \right)_\beta^\beta \phi_{zj} =$$
$$= \sum_{\beta \in J_{r_4,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q \left((\mathbf{T}^* \mathbf{T})_{.q} \left(\widetilde{\phi}_{.j} \right) \right)_\beta^\beta$$

і знайдемо матриці $\mathbf{\Psi} = (\psi_{qj})$ та $\widetilde{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{H}^* \mathbf{A}_2 \mathbf{\Psi}$. З того, що $\sum_q \mathbf{a}_{.q}^{(2,H)} \psi_{qj} = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.j}$, кінцево отримаємо

$$x_{ij}^{(4)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^* \mathbf{H})_{.i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.j} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^* \mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^* \mathbf{T}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in I_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2|_\alpha^\alpha}, \tag{4.252}$$

(v) Для п'ятого доданку, $\mathbf{X}_5 = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^*)^\dagger \mathbf{Q}_{A_2}$, аналогічно до попереднього випадку, маємо

$$x_{ij}^{(5)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^n \sum\limits_{f=1}^n \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^* \mathbf{H})_{.i} \left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,H)} \right) \right)_\beta^\beta x_{qf}^{(1)} q_{fj}^{A_2}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^* \mathbf{H}|_\beta^\beta}.$$

Нехай $\widetilde{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_1 \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2$. З того, що $\sum_f x_{qf}^{(1)} \dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)} = \widetilde{\mathbf{x}}_{q.}^{(1)}$, слідує

$$\phi_{qj} = \sum_f x_{qf}^{(1)} \sum_{\beta \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{j.} \left(\dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)} \right) \right)_\alpha^\alpha = \sum_{\beta \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2)_{j.} \left(\widetilde{\mathbf{x}}_{q.}^{(1)} \right) \right)_\alpha^\alpha .$$

Знайдемо матриці $\mathbf{\Phi} = (\phi_{qj})$ і $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{H}^* \mathbf{A}_2 \mathbf{\Phi}$. Оскільки $\sum_q \mathbf{a}_{.q}^{(2,H)} \phi_{qj} = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$, то звідси маємо

$$x_{ij}^{(5)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^* \mathbf{H})_{.i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j} \right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^* \mathbf{H}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in I_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2|_\alpha^\alpha}. \tag{4.253}$$

(vi) Розглянемо шостий доданок $\mathbf{X}_6 = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{A}_2 \mathbf{T}^\dagger \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^*)^\dagger$. Звівши визначникове зображення множника $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^*)^\dagger$ за Теоремою 4.11, а множника $\mathbf{H}^\dagger \mathbf{A}_2$ за Теоремою 4.2, одержимо,

$$x_{ij}^{(6)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^{n} \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i} \left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,H)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \omega_{qj}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2|_{\beta}^{\beta}},$$

де

$$\omega_{qj} = \sum_{\beta \in J_{r_4,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q \left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.\,q} \left(\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{A_2} \right) \right)_{\beta}^{\beta} = \sum_{\alpha \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2)_{j.} \left(\boldsymbol{\varphi}_{q.}^{T} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha},$$

та

$$\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{A_2} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2)_{j.} \left(\mathbf{c}_{q.}^{(23)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{q.}^{T} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_4,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q \left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.q} \left(\mathbf{c}_{.l}^{(23)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1, \ldots, n,$$

Тут $\mathbf{c}_{q.}^{(23)}$ і $\mathbf{c}_{.l}^{(23)}$ є q-м рядком і l-м стовпцем матриці $\mathbf{C}_{23} = \mathbf{T}^*\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2$.

Побудуємо матриці $\mathbf{\Omega} = (\omega_{qj})$ та $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{\Omega}$. З того, що $\sum_q \mathbf{a}_{.q}^{(2,H)} \omega_{qj} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.j}$, випливає

$$x_{ij}^{(6)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2|_{\beta}^{\beta}}. \tag{4.254}$$

(vii) Розглянемо сьомий доданок $\mathbf{X}_7 = \mathbf{T}^\dagger \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^*)^\dagger \mathbf{A}_2^* (\mathbf{H}^*)^\dagger$. Застосувавши визначникові зображення (2.7) для матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{T}^\dagger$ та (2.12) для матриці $(\mathbf{H}^*)^\dagger$, одержимо

$$x_{ij}^{(7)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^{n} \sum\limits_{f=1}^{n} \sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.i} \left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,T)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} x_{qf}^{(1)} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{j.} \left(\mathbf{a}_{f.}^{(2,H,*)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,r}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{a}_{.q}^{(2,T)}$, $\mathbf{a}_{f.}^{(2,H,*)}$ – q-й стовпець матриці $\mathbf{T}^*\mathbf{A}_2$ і f-й рядок матриці $\mathbf{A}_2^*\mathbf{H}$, відповідно. Нехай $\widetilde{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{T}^*\mathbf{A}_2\mathbf{X}_1\mathbf{A}_2^*\mathbf{H}$, та $\mathbf{e}_{.q}$ і $\mathbf{e}_{f.}$ – одиничні вектор-стовпець і вектор-рядок, відповідно. Тоді

$$x_{ij}^{(7)}=\frac{\sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.q}\right)\right)_\beta^\beta\widetilde{x}_{qf}^{(1)}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{f.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_\alpha^\alpha},$$

Якщо знайдемо

$$w_{if}^{(1)}:=\sum_{q=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.q}\right)\right)_\beta^\beta\widetilde{x}_{qf}^{(1)}=\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\widetilde{x}_{.f}^{(1)}\right)\right)_\beta^\beta$$

як f-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{w}_{i.}^{(1)}=\left[w_{i1}^{(1)},\ldots,w_{in}^{(1)}\right]$, тоді

$$\sum_{f=1}^{m}w_{if}^{(1)}\sum_{\alpha\in I_{r_3,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{f.}\right)\right)_\alpha^\alpha=\sum_{\alpha\in I_{r_3,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\mathbf{w}_{i.}^{(1)}\right)\right)_\alpha^\alpha.$$

Звідси, для сьомого доданку розв'язку (4.244), одержимо

$$x_{ij}^{(7)}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\mathbf{w}_{i.}^{(1)}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_\alpha^\alpha},\tag{4.255}$$

де

$$\mathbf{w}_{i.}^{(1)}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\widetilde{x}_{.f}^{(1)}\right)\right)_\beta^\beta\right]\in\mathbb{H}^{1\times n},\quad f=1,\ldots,n.$$

Якщо ж спочатку введемо

$$w_{qj}^{(2)}:=\sum_{f=1}^{n}\widetilde{x}_{qf}^{(1)}\sum_{\alpha\in I_{r_3,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\mathbf{e}_{f.}\right)\right)_\alpha^\alpha=\sum_{\alpha\in I_{r_3,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\widetilde{x}_{q.}^{(1)}\right)\right)_\alpha^\alpha$$

як q-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{w}_{.j}^{(2)}=\left[w_{1j}^{(2)},\ldots,w_{nj}^{(2)}\right]$, тоді

$$\sum_{q=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.q}\right)\right)_\beta^\beta w_{qj}^{(2)}=\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{w}_{.j}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta.$$

Отже, іншим визначниковим зображенням сьомого доданку розв'язку (4.244) є

$$x_{ij}^{(7)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\mathbf{w}_{.j}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_\alpha^\alpha},\tag{4.256}$$

де

$$\mathbf{w}_{.j}^{(2)} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_3,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{j.} \left(\widetilde{x}_{q.}^{(1)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad q = 1, \ldots, n.$$

Таким чином, ми довели теорему.

Теорема 4.30. *Нехай* $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}_{r_2}^{k\times n}$, *і* $\operatorname{rank}\mathbf{H} = r_3$, $\operatorname{rank}\mathbf{T} = r_4$. *Розв'язок (4.244) системи (4.243) покомпонентно може бути виражений як*

$$x_{ij} = \sum_{\delta=1}^{4} x_{ij}^{(\delta)} - \sum_{\delta=5}^{7} x_{ij}^{(\delta)},$$

де доданок $x_{ij}^{(1)}$ *має визначникові зображення (4.245) і (4.247),* $x_{ij}^{(2)}$ *– (4.248) і (4.249),* $x_{ij}^{(3)}$ *– (4.250) і (4.251),* $x_{ij}^{(4)}$ *– (4.252),* $x_{ij}^{(5)}$ *– (4.253),* $x_{ij}^{(6)}$ *– (4.254), та* $x_{ij}^{(7)}$ *– (4.255) – (4.256).*

За Лемою 4.18 для існування ермітових (косо-ермітових) розв'язків системи (4.189) необхідно виконання умов $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1^*$ і $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2^*$, ($\mathbf{C}_1 = -\mathbf{C}_1^*$ і $\mathbf{C}_2 = -\mathbf{C}_2^*$), тоді її ермітовий (косо-ермітовий) розв'язок може бути виражений як $\mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^*)$, ($\mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)$), де $\mathbf{X}$ – довільний розв'язок системи (4.211), а

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^* = \left(x_{ij}^*\right) = (\overline{x_{ji}}) = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^*)^{\dagger} + \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^*)^{\dagger} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{T}^*)^{\dagger} + \\ + \mathbf{Q}_{A_2}(\mathbf{A}_1^*)^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_2(\mathbf{T}^*)^{\dagger}\mathbf{A}_2^*(\mathbf{H}^*)^{\dagger} - \mathbf{Q}_{A_2}(\mathbf{A}_1^*)^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_2^*(\mathbf{H}^*)^{\dagger} - \\ - \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{T}^*)^{\dagger}\mathbf{A}_2^*(\mathbf{H}^*)^{\dagger} - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^*)^{\dagger}\mathbf{A}_2^*(\mathbf{T}^*)^{\dagger}.\end{aligned}$$

Тоді, визначникове зображення часткового ермітового (косо-ермітового) розв'язку $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ може бути отримане як $y_{ij} = \frac{1}{2}(x_{ij} + \overline{x_{ji}})$, ($y_{ij} = \frac{1}{2}(x_{ij} + \overline{x_{ji}})$) для всіх $i, j = 1, \ldots, n$, де x_{ij} визначаються Теоремою 4.30.

4.3.4. Правила Крамера для системи двосторонніх матричних рівнянь з η-ермітовістю. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{A}_1^{\eta*} = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{A}_2^{\eta*} = \mathbf{C}_2. \end{cases} \tag{4.257}$$

У цьому пункті ми побудуємо визначникові зображення (аналоги правила Крамера) загальних та η-(косо-)ермітових розв'язків системи (4.257). Отримані правила Крамера є прямим методом для знаходження η-(косо-)ермітових розв'язків кватерніонових матричних рівнянь. Інші знайдені точні представлення розв'язків мають в основному тільки теоретичне значення (див., напр. [69–71,155,279]).

Маємо

$$\mathbf{Q}_{A_i^{\eta*}} = (\mathbf{A}_i^{\eta*})^{\dagger}\,\mathbf{A}_i^{\eta*} = \left(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_i^{\dagger}\right)^{\eta*} = \mathbf{P}_{A_i}^{\eta},$$

аналогічно, $\mathbf{P}_{A_i^{\eta*}} = \mathbf{Q}_{A_i}^{\eta}$, $\mathbf{L}_{A_i^{\eta*}} = \mathbf{R}_{A_i}^{\eta}$ та $\mathbf{R}_{A_i^{\eta*}} = \mathbf{L}_{A_i}^{\eta}$ для довільного $i = 1, 2$. Підставивши $\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i^{\eta*}$ у системі (4.189), одержимо

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_{A_1^{\eta*}}\mathbf{A}_2^{\eta*} = (\mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1})^{\eta*} = \mathbf{H}^{\eta*}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{A}_2^{\eta*}\mathbf{L}_{H^{\eta*}} = (\mathbf{R}_H\mathbf{A}_2)^{\eta*} = \mathbf{T}^{\eta*}.$$

Звідси випливає наступний аналог Леми 4.22.

Лема 4.28. *Нехай $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k\times n}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{k\times k}$ є відомими матрицями системи (4.257), а $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – невідома. Система (4.257) є сумісною тоді і тільки тоді, коли*

$$\mathbf{P}_{A_i}\mathbf{C}_i\mathbf{P}_{A_i}^{\eta} = \mathbf{C}_i, \quad i = 1, 2; \tag{4.258}$$

$$\mathbf{T}\left[\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger} - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\right]\mathbf{T}^{\eta*} = \mathbf{0}. \tag{4.259}$$

У цьому випадку загальний розв'язок системи (4.257) може бути виражаєтьcя як

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =& \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^{\eta*}\right)^{\dagger} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{H}^{\dagger}\left(\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger} - \mathbf{I}\right)\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{Q}_{A_2} - \\ &- \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} - \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} + \\ &+ \mathbf{L}_{A_1}\left(\mathbf{Z} - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{H}\mathbf{Z}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger}\right) - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{L}_T\mathbf{W}\mathbf{H}^{\eta*}(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger} + \\ &+ \left(\mathbf{W} - \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{H}^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger}\right)\mathbf{L}_{A_1}.\end{aligned}$$

де $\mathbf{Z}$ і $\mathbf{W}$ – довільні кватерніонові матриці відповідних розмірів.

Поклавши $\mathbf{Z}$, $\mathbf{W}$ нульовими, одержимо частковий розв'язок системи (4.257)

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =& \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^{\eta*}\right)^{\dagger} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} + \\ &+ \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{Q}_{A_2} - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{Q}_{A_2} - \\ &- \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger} - \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger}.\end{aligned} \tag{4.260}$$

Далі, побудуємо покомпонентне визначникове зображення розв'язку (4.260).

Припустимо, що $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}_{r_2}^{k\times n}$ і $\operatorname{rank}\mathbf{H} = r_3$, and $\operatorname{rank}\mathbf{T} = r_4$.

Розглянемо кожен доданок розв'язку (4.260), окремо.

(i) Позначимо $\mathbf{C}_{11} := \mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^\eta$. Для доданку, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^{\eta*}\right)^\dagger = (x_{ij}^{(1)})$, маємо

$$x_{ij}^{(1)} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{t=1}^{m} a_{il}^{(1),\dagger} c_{lt}^{(1)} a_{tj}^{(1),\eta*,\dagger}.$$

Беручи визначникові зображення (2.7) і (2.27) для матриць Мура-Пенроуза $\mathbf{A}_1^\dagger$ і $(\mathbf{A}_1^{\eta*})^\dagger$, відповідно, одержимо

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(1),*}\right)\right)_\beta^\beta c_{lt}^{(1)}\left(-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}(\mathbf{a}_{t.}^{(1)})\right)_\alpha^\alpha\eta\right)}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\alpha^\alpha\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\beta^\beta}.$$

Нехай $\mathbf{e}_{.f}$ і $\mathbf{e}_{s.}$ є одиничними вектор-стовпцем та вектор-рядком. Оскільки, $\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{t=1}^{m} a_{fl}^{(1),*}c_{lt}^{(1)}a_{ts}^{(1),\eta} = c_{fs}^{(11)}$, тоді

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.\,i}(\mathbf{e}_{.f})\right)_\beta^\beta c_{fs}^{(11)}\left(-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}(\mathbf{e}_{s.})\right)_\alpha^\alpha\eta\right)}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\alpha^\alpha\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\beta^\beta}. \tag{4.261}$$

Поклавши

$$\begin{aligned} v_{is}^{(1)} :=& \sum_{f=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}(\mathbf{e}_{.f})\right)_\beta^\beta c_{fs}^{(11)} = \\ &= \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{c}_{.s}^{(11)}\right)\right)_\beta^\beta \end{aligned} \tag{4.262}$$

як s-ту компоненту вектор-рядка $\mathbf{v}_{i.}^{(1)} = \left[v_{i1}^{(1)}, \ldots, v_{in}^{(1)}\right]$, маємо

$$\sum_{s=1}^{m} v_{is}^{(1)}\left(-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}(\mathbf{e}_{s.})\right)_\alpha^\alpha\eta\right) = -\eta\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}(\mathbf{v}_{i.}^{(1),\eta})\right)_\alpha^\alpha\eta. \tag{4.263}$$

Очевидно, що $\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\beta^\beta = \sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\alpha^\alpha$. Підставивши (4.262) і (4.263) у формулу (4.261), одержимо

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}^{(1),\eta}\right)\right)_\alpha^\alpha\eta}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\alpha^\alpha\right)^2}, \tag{4.264}$$

де

$$\mathbf{v}_{i.}^{(1),\eta}=\left[-\eta\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{c}_{.s}^{(11)}\right)\right)_\beta^\beta\eta\right]\in\mathbb{H}^{1\times n},\quad s=1,\ldots,n.$$

Якщо введемо

$$v_{fj}^{(2)}:=\sum_{s=1}^n c_{fs}^{(11)}\left(-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{j.}(\mathbf{e}_{s.})\right)_\alpha^\alpha\eta\right)=$$
$$=-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{j.}(\mathbf{c}_{f.}^{(11),\eta})\right)_\alpha^\alpha\eta \tag{4.265}$$

– f-ту компоненту вектор-рядка $\mathbf{v}_{.j}^{(2)}=\left[v_{1j}^{(2)},\ldots,v_{nj}^{(2)}\right]$, тоді

$$\sum_{f=1}^n\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}(\mathbf{e}_{.f})\right)_\beta^\beta v_{fj}^{(2)}=\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta. \tag{4.266}$$

Підставивши (4.265) і (4.266) у рівняння (4.261), одержимо інше визначникове зображення першого доданку

$$x_{ij}^{(1)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{v}_{.j}^{(2)}\right)\right)_\beta^\beta}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right|_\beta^\beta\right)^2}, \tag{4.267}$$

де

$$\mathbf{v}_{.j}^{(2)}=\left[-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_1,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{j.}(\mathbf{c}_{f.}^{(11),\eta})\right)_\alpha^\alpha\eta\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\quad f=1,\ldots,n.$$

Тут $\mathbf{c}_{f.}^{(11),\eta}$ є f-м рядком матриці $\mathbf{C}_{11}^\eta=\mathbf{A}_1^{\eta*}\mathbf{C}_1^\eta\mathbf{A}_1$.

(ii) Аналогічно, для другого доданку $\mathbf{X}_2=\mathbf{H}^\dagger\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta*})^\dagger=\left(x_{ij}^{(2)}\right)$, маємо

$$x_{ij}^{(2)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\mathbf{d}_{.j}^{A_2}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,n}}\left|\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right|_\alpha^\alpha} \tag{4.268}$$

$$=\frac{-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{j.}\left(\mathbf{d}_{i.}^{H}\right)\right)_\alpha^\alpha\eta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,n}}\left|\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right|_\alpha^\alpha}, \tag{4.269}$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{A_2}=\left[-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_2,n}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{j.}\left(\mathbf{c}_{q.}^{(21),\eta}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\quad q=1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{H}=\left[-\eta\sum_{\beta\in J_{r_3,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\mathbf{c}_{.l}^{(21)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\eta\right]\in\mathbb{H}^{1\times n},\quad l=1,\ldots,n.$$

Тут $\mathbf{c}_{q.}^{(21)}$ і $\mathbf{c}_{.l}^{(21)}$ є q-им рядком і l-им стовпцем матриці $\mathbf{C}_{21}=\mathbf{H}^*\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2^{\eta}$.

(iii) Визначникове зображення третього доданку, $\mathbf{X}_3=\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^{\eta *})^{\dagger}=\left(x_{ij}^{(3)}\right)$, одержується, аналогічно. Отже,

$$x_{ij}^{(3)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\mathbf{d}_{.j}^{H}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,n}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_{\alpha}^{\alpha}} \tag{4.270}$$

$$=\frac{-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\mathbf{d}_{i.}^{T}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,n}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.271}$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{H}=\left[-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_3,n}\{f\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\mathbf{c}_{q.}^{(22),\eta}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\quad q=1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{T}=\left[-\eta\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\mathbf{c}_{.l}^{(22)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\eta\right]\in\mathbb{H}^{1\times n},\quad l=1,\ldots,n.$$

Тут $\mathbf{c}_{q.}^{(22)}$, $\mathbf{c}_{.l}^{(22)}$ – q-й рядок і l-й стовпець матриці $\mathbf{C}_{22}=\mathbf{T}^*\mathbf{C}_2\mathbf{H}^{\eta}$.

(iv) Розглянемо $\mathbf{X}_4=\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta *})^{\dagger}\mathbf{Q}_{A_2}=\left(x_{ij}^{(4)}\right)$. Використавши (2.7) для визначникового зображення матриць $\mathbf{H}^{\dagger}$ і $\mathbf{T}^{\dagger}$, отримаємо

$$x_{ij}^{(4)}=\frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{z=1}^{n}\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.s}^{(2,H)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}\{s\}}\mathrm{cdet}_s\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.s}\left(\mathbf{a}_{.z}^{(2,T)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}x_{zf}^{(1)}q_{fj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{4.272}$$

де $\mathbf{a}_{.s}^{(2,H)}$, $\mathbf{a}_{.z}^{(2,T)}$ – s-й і z-й стовпці матриць $\mathbf{H}^*\mathbf{A}_2$ і $\mathbf{T}^*\mathbf{A}_2$, відповідно; $x_{zf}^{(1)}$ є (zf)-м елементом першого доданку, знайденого у пункті (i); q_{fj} – (fj)-й елемент матриці $\mathbf{Q}_{A_2}$, що за формулою (2.15) може бути виражений як

$$q_{fj} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2)_{j.} \left(\dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Тут $\dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)}$ – f-й рядок матриці $\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2$. Позначимо

$$q_{zj}^{(1)} := \sum_{f=1}^{n} x_{zf}^{(1)} \sum_{\alpha \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2)_{j.} \left(\dot{\mathbf{a}}_{f.}^{(2)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} =$$
$$\sum_{\alpha \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2)_{j.} \left(\widetilde{\mathbf{x}}_{z.}^{(1)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \tag{4.273}$$

де $\widetilde{\mathbf{x}}_{z.}^{(1)}$ – z-й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2$ для всіх $z, j = 1, \ldots, n$, $\mathbf{X}_1$ є знайденим у пункті (i). Побудуємо матрицю $\mathbf{Q}_1 = (q_{zj}^{(1)}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. Далі, вводимо

$$t_{sj}^{(1)} := \sum_{z=1}^{n} \sum_{\beta \in J_{r_4,n}\{s\}} \operatorname{cdet}_s \left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.s} \left(\mathbf{a}_{.z}^{(2,T)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} q_{zj}^{(1)} = \sum_{\beta \in J_{r_4,n}\{s\}} \operatorname{cdet}_s \left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.s} \left(\tilde{\mathbf{t}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}$$

де $\tilde{\mathbf{t}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^*\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_1$, знаходимо матрицю $\mathbf{T}_1 = (t_{qj}^{(1)}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ і побудуємо матрицю $\widetilde{\mathbf{H}} := \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{T}_1$. З цих позначень та рівняння (4.272), випливає

$$x_{ij}^{(4)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i} \left(\tilde{\mathbf{h}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.274}$$

де $\tilde{\mathbf{h}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{H}}$.

(v) Для $\mathbf{X}_5 = \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{Q}_{A_2} = \left(x_{ij}^{(5)} \right)$, маємо

$$x_{ij}^{(5)} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i} \left(\mathbf{a}_{.s}^{(2,H)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} x_{sf}^{(1)} q_{fj}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\beta}^{\beta}}.$$

Позначимо $\widehat{\mathbf{H}} := \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_1$, де $\mathbf{Q}_1 = (q_{sj}^{(1)})$ визначається з рівності (4.273). Аналогічно до попереднього випадку, одержимо

$$x_{ij}^{(5)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{.i} \left(\widehat{\mathbf{h}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_3,n}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}} |\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.275}$$

де $\widehat{\mathbf{h}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widehat{\mathbf{H}}$.

(vi) Розглянемо шостий доданок $\mathbf{X}_6 = \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta *})^{\dagger} = \left(x_{ij}^{(6)}\right)$. Тоді за Теоремою 4.11,

$$x_{ij}^{(6)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,H)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\phi_{qj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,n}}\left|\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{4.276}$$

де

$$\phi_{qj} = \sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.\,q}\left(\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{A_2}\right)\right)_{\beta}^{\beta} = -\eta\sum_{\alpha\in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{j.}\left(\boldsymbol{\varphi}_{q.}^{T}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta, \tag{4.277}$$

та

$$\boldsymbol{\varphi}_{.j}^{A_2} = \left[-\eta\sum_{\alpha\in I_{r_2,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right)_{j.}\left(\mathbf{c}_{q.}^{(23),\eta}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right] \in \mathbb{H}^{1\times n},\quad q = 1,\ldots,n,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{q.}^{T} = \left[-\eta\sum_{\beta\in J_{r_4,n}\{q\}} \operatorname{cdet}_q\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.q}\left(\mathbf{c}_{.l}^{(23)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\eta\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1},\quad l = 1,\ldots,n.$$

Тут $\mathbf{c}_{.l}^{(23)}$ – l-й стовпець матриці $\mathbf{C}_{23} = \mathbf{T}^*\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2^{\eta}$ і $\mathbf{c}_{q.}^{(23),\eta}$ – q-й рядок матриці $\mathbf{C}_{23}^{\eta}$. Побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = (\phi_{qj})$ таку, що ϕ_{qj} визначаються у (4.277), і знайдемо $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{H}^*\mathbf{A}_2\mathbf{\Phi}$. Підставивши ці результати у рівність (4.276), одержимо

$$x_{ij}^{(6)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{.i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}\right)\right)_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,n}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\beta\in J_{r_2,n}}\left|\mathbf{A}_2^*\mathbf{A}_2\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{4.278}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$.

(vii) Накінець, розглянемо сьомий доданок

$$\mathbf{X}_7 = \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta *})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta *}(\mathbf{H}^{\eta *})^{\dagger} = \left(x_{ij}^{(7)}\right).$$

Використавши (2.7) для визначникового зображення матриці Мура-Пенроуза $\mathbf{T}^{\dagger}$ і (2.27) – для $(\mathbf{H}^{\eta *})^{\dagger}$, отримаємо

$$x_{ij}^{(7)} = \frac{\sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.q}^{(2,T)}\right)\right)_{\beta}^{\beta} x_{qf}^{(1)}\left(-\eta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{f.}^{(2,H,\eta *)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_4,n}}\left|\mathbf{T}^*\mathbf{T}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_3,r}}\left|\mathbf{H}^*\mathbf{H}\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.279}$$

де $\mathbf{a}_{.q}^{(2,T)}$, $\mathbf{a}_{f.}^{(2,H,\eta*)}$ – q-й стовпець матриці $\mathbf{T}^*\mathbf{A}_2$ і f-й рядок матриці $\mathbf{A}_2^{\eta*}\mathbf{H}$, відповідно. Позначимо

$$\omega_{qj} := \sum_{f=1}^{n} x_{qf}^{(1)} \left(-\eta \sum_{\alpha \in I_{r_3,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{j.} \left(\mathbf{a}_{f.}^{(2,H,\eta*)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta \right) =$$

$$-\eta \sum_{\alpha \in I_{r_3,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{H}^*\mathbf{H})_{j.} \left(\widehat{\mathbf{x}}_{q.}^{(1,\eta)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \eta, \tag{4.280}$$

де $\widehat{\mathbf{x}}_{q.}^{(1,\eta)}$ – q-й рядок матриці $\widehat{\mathbf{X}}_1^{\eta} := \mathbf{X}_1^{\eta}\mathbf{A}_2^{\eta*}\mathbf{H}$. Знайдемо матрицю $\mathbf{\Omega} = (\omega_{qj})$, що визначається формулою (4.280), і позначимо $\widehat{\mathbf{\Omega}} := \mathbf{T}^*\mathbf{A}_2\mathbf{\Omega}$. Підставивши ці результати у рівняння (4.279), одержимо

$$x_{ij}^{(7)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{T}^*\mathbf{T})_{.i} \left(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_4,n}} |\mathbf{T}^*\mathbf{T}|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_3,r}} |\mathbf{H}^*\mathbf{H}|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{4.281}$$

де $\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widehat{\mathbf{\Omega}}$.

Таким чином, ми довели теорему.

Теорема 4.31. *Нехай* $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}_{r_2}^{k\times n}$, $\operatorname{rank}\mathbf{H} = r_3$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{T} = r_4$. *Розв'язок (4.260) системи (4.211) покомпонентно виражається як*

$$x_{ij} = \sum_{\delta=1}^{4} x_{ij}^{(\delta)} - \sum_{\delta=5}^{7} x_{ij}^{(\delta)}, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

де $x_{ij}^{(1)}$ *має визначникові зображення (4.264) та (4.267),* $x_{ij}^{(2)}$ *– (4.268) і (4.269),* $x_{ij}^{(3)}$ *– (4.270) і (4.271),* $x_{ij}^{(4)}$ *– (4.274),* $x_{ij}^{(5)}$ *– (4.275),* $x_{ij}^{(6)}$ *– (4.278), та* $x_{ij}^{(7)}$ *– (4.281).*

Нехай тепер маємо наступні умови

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1^{\eta*}, \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2^{\eta*}, \tag{4.282}$$

$$\mathbf{C}_1 = -\mathbf{C}_1^{\eta*}, \mathbf{C}_2 = -\mathbf{C}_2^{\eta*}. \tag{4.283}$$

Частковий η-ермітовий розв'язок $\mathbf{Y}_1$ і η-косо-ермітовий розв'язок $\mathbf{Y}_2$ системи (4.257) з обмеженнями (4.282) або (4.283), відповідно, можуть бути виражені наступним чином,

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{X} + \mathbf{X}^{\eta*}\right), \ \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{\eta*}\right),$$

де $\mathbf{X}$ – довільний розв'язок системи (4.257). Враховуючи частковий розв'язок (4.260) та обмеження (4.282), маємо

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{\eta*} = \left(x_{ij}^{\eta*}\right) = \left(\overline{x}_{ji}{}^{\eta}\right) = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^{\eta*}\right)^{\dagger} + \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger} + \\ + \mathbf{P}_{A_2}(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} - \mathbf{P}_{A_2}(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} - \\ - \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger},\end{aligned}$$

А враховуючи обмеження (4.283), одержимо наступне

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{\eta*} = -\left(\overline{x}_{ji}{}^{\eta}\right) = -\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^{\eta*}\right)^{\dagger} - \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} - \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger} - \\ - \mathbf{P}_{A_2}(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{P}_{A_2}(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} + \\ + \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger},\end{aligned}$$

Отже, частковий η-ермітовий і η-косо-ермітовий розв'язки системи (4.211) з обмеженнями (4.282) і (4.283), відповідно, мають наступний вираз

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^{\eta*}\right)^{\dagger} + \\ + \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger}\right] + \frac{1}{2}\left[\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger}\right] \\ + \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{P}_{A_2} + \mathbf{P}_{A_2}(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger}\right] \\ - \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{P}_{A_2} + \mathbf{P}_{A_2}(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger}\right] \\ - \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger}\right] \\ - \frac{1}{2}\left[\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{H}^{\eta*})^{\dagger} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1(\mathbf{A}_1^{\eta*})^{\dagger}\mathbf{A}_2^{\eta*}(\mathbf{T}^{\eta*})^{\dagger}\right].\end{aligned}$$

Визначникові зображення $\mathbf{Y}_1 = (y_{ij}^{(1)})$ і $\mathbf{Y}_2 = (y_{ij}^{(2)})$ покомпонентно виражаються наступним чином

$$y_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(x_{ij} + \overline{x}_{ji}{}^{\eta}\right), \quad y_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(x_{ij} - \overline{x}_{ji}{}^{\eta}\right),$$

для всіх $i, j = 1, \ldots, n$, де x_{ij} задається Теоремою 4.31.

4.3.5. Приклад правила Крамера для системи двосторонніх матричних рівнянь. Нехай маємо рівняння

$$\begin{cases}\mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{A}_1^* = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{A}_2^* = \mathbf{C}_2\end{cases} \tag{4.284}$$

де

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5\mathbf{k} & 0.5\mathbf{i} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{i} & -\mathbf{k} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = 0.5 \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & -\mathbf{k} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{j} & -\mathbf{k} & 1 \\ \mathbf{i} & 1 & \mathbf{k} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & 1 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$\det(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^*) = \det \begin{bmatrix} 1.5 & -2\mathbf{j} \\ 2\mathbf{j} & 3 \end{bmatrix} = 0.5, \ \det(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_2^*) = \det \begin{bmatrix} 3 & -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 3 \end{bmatrix} = 8,$$

то $\operatorname{rank}\mathbf{A}_1 = 2$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}_2 = 2$. За Теоремою 2.2, знайдемо

$$\mathbf{A}_1^\dagger = \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{j} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & \mathbf{k} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{A}_1 = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{j} \\ 0 & -\mathbf{j} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_{A_1} = 0.5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathbf{j} \\ 0 & \mathbf{j} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2^\dagger = 0.25 \begin{bmatrix} -2\mathbf{j} & -2\mathbf{i} \\ \mathbf{k} & 1 \\ 1 & -\mathbf{k} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1} = 0.5 \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j}-\mathbf{k} & 1-\mathbf{i} \\ 0 & 1-\mathbf{i} & -\mathbf{j}+\mathbf{k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^\dagger = 0.25 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{j}+\mathbf{k} & 1+\mathbf{i} \\ 1+\mathbf{i} & \mathbf{j}-\mathbf{k} \end{bmatrix}, \mathbf{R}_H = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \mathbf{R}_H\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{j} & 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

З того, що $\mathbf{Q}_{A_1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q}_{A_2} = \mathbf{I}$, $\mathbf{T}\mathbf{A}_2^\dagger\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2^{*,\dagger}\mathbf{T}^* = \mathbf{T}\mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\mathbf{A}_1^{*,\dagger}\mathbf{T}^*$, і за Лемою 4.27, випливає, що система (4.284) є сумісною.

Спочатку, знайдемо розв'язок (4.284) прямим обчисленням. Оскільки

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1^\dagger\mathbf{C}_1\left(\mathbf{A}_1^*\right)^\dagger = 0.5 \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{H}^\dagger\mathbf{C}_2(\mathbf{A}_2^*)^\dagger = 0.125 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\mathbf{j}+2\mathbf{k} & \mathbf{j}+\mathbf{k} & -1+\mathbf{i} \\ -2+2\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} & -\mathbf{j}-\mathbf{k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{T}^\dagger \mathbf{C}_2 (\mathbf{H}^*)^\dagger = 0.25 \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j}-\mathbf{k} & 1-\mathbf{j} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{A}_2 \mathbf{T}^\dagger \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^*)^\dagger \mathbf{P}_{A_2} = \mathbf{0},\ \mathbf{X}_5 = -\mathbf{H}^\dagger \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^*)^\dagger \mathbf{P}_{A_2} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{X}_6 = -\mathbf{H}^\dagger \mathbf{A}_2 \mathbf{T}^\dagger \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2^*)^\dagger = \mathbf{0},\ \mathbf{X}_7 = -\mathbf{T}^\dagger \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1^*)^\dagger \mathbf{A}_2^* (\mathbf{H}^*)^\dagger = \mathbf{0},$$

то

$$\mathbf{X} = \sum_\delta \mathbf{X}_\delta = 0.125 \begin{bmatrix} 4\mathbf{k} & 2\mathbf{j}-2\mathbf{k} & 2-2\mathbf{j} \\ 2\mathbf{j}+2\mathbf{k} & \mathbf{j}+\mathbf{k} & -1+\mathbf{i} \\ -2+2\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} & -\mathbf{j}-\mathbf{k} \end{bmatrix}. \qquad (4.285)$$

Тепер, знайдемо розв'язок (4.284) за правилом Крамера з Теореми 4.31. З того, що

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{A}_1^* \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_1 = 0.125 \begin{bmatrix} 4\mathbf{k} & 12 & 12\mathbf{j} \\ -12 & 9\mathbf{k} & -9\mathbf{i} \\ 12\mathbf{i} & -9\mathbf{i} & -9\mathbf{k} \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1 = 0.125 \begin{bmatrix} 16 & -12\mathbf{k} & 12\mathbf{i} \\ 12\mathbf{k} & 10 & 10\mathbf{j} \\ -12\mathbf{i} & -10\mathbf{j} & 10 \end{bmatrix},$$

за формулою (4.151) слідує

$$v_{11}^{(1)} = \sum_{\beta \in J_{2,3}\{1\}} \operatorname{cdet}_1 \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.1} \left(\mathbf{c}_{.1}^{(11)} \right) \right)_\beta^\beta =$$

$$= \operatorname{cdet}_1 \begin{bmatrix} 0.5\mathbf{k} & -1.5\mathbf{k} \\ -1.5 & 1.25 \end{bmatrix} + \operatorname{cdet}_1 \begin{bmatrix} 0.5\mathbf{k} & 1.5\mathbf{i} \\ 1.5\mathbf{j} & 1.25 \end{bmatrix} = 0.5\mathbf{k}.$$

Аналогічно, одержимо $v_{12}^{(1)} = 0.375$, $v_{13}^{(1)} = 0.375\mathbf{j}$. Отже, $\mathbf{v}_{1.}^{(1)} = [0.5\mathbf{k}\ 0.375\ 0.375\mathbf{j}]$. Далі за умовою (4.196) маємо

$$x_{11}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{2,3}\{1\}} \operatorname{rdet}_1 \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{1.} \left(\mathbf{v}_{1.}^{(1)} \right) \right)_\alpha^\alpha}{\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{2,3}} |\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1|_\alpha^\alpha \right)^2} =$$

$$= 4 \left(\operatorname{rdet}_1 \begin{bmatrix} 0.5\mathbf{k} & 0.375 \\ 1.5\mathbf{k} & 1.25 \end{bmatrix} + \operatorname{rdet}_1 \begin{bmatrix} 0.5\mathbf{k} & 0.375\mathbf{j} \\ -1.5\mathbf{j} & 1.25 \end{bmatrix} \right) = 0.5\mathbf{k}.$$

Оскільки,

$$\mathbf{C}_{21} = \mathbf{H}^*\mathbf{C}_2\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{j}+\mathbf{k} & \mathbf{j}+\mathbf{k} & -1+\mathbf{i} \\ -1+\mathbf{i} & -1+\mathbf{i} & -\mathbf{j}-\mathbf{k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{22} = \mathbf{T}^*\mathbf{C}_2\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j}-\mathbf{k} & 1-\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{H}^*\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathbf{j} \\ 0 & \mathbf{j} & 1 \end{bmatrix},$$

і $\operatorname{rank}\mathbf{H} = \operatorname{rank}\mathbf{T} = 1$, то

$$\mathbf{d}_{i.}^{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d}_{.j}^{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Отже, за умовами (4.238) і (4.200) маємо $x_{11}^{(2)} = 0$ і $x_{11}^{(3)} = 0$, відповідно. Таким чином, $x_{11}^{(\delta)} = 0$ для всіх $\delta = 4, \ldots, 7$, і $x_{11} = x_{11}^{(1)} = 0.5\mathbf{k}$.

Отже, x_{11} отримані за правилом Крамера і матричним методом (4.285) співпадають.

Продовжуючи аналогічно, знайдемо розв'язок (4.284) за правилом Крамера з Теореми 4.31, який дорівнює (4.285).

4.4. Висновки до розділу

У розділі 4 вивчаються кватерніонові двосторонні матричні рівнянння та його часткові випадки, узагальнене кватерніонове матричне рівняння Сильвестра та його часткові і деякі особливі випадки, системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь, її часткові та деякі особливі випадки. Використовуючи визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза та проективних матриць, отримані наступні результати.

1. У першому підрозділі побудовані визначникові зображення, аналоги правила Крамера для розв'язку, нормального, $*$-ермітового і η-ермітового розв'язків кватерніонових двостороннього матричного рівняння та його часткових односторонніх випадків.

2. У другому підрозділі побудовані аналоги правила Крамера для розв'язку, $*$-ермітового і η-ермітового розв'язків узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливих випадків з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю.
3. У третьому підрозділі отримані аналоги правила Крамера для розв'язку, $*$-ермітового і η-ермітового розв'язків системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь, усіх її часткових випадків та особливих випадків з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю.

Результати цього розділу опубліковані у роботах [102, 103, 105, 106, 110, 113, 117, 118, 120–123, 125, 127, 134, 135, 141, 201, 309, 312–315]

РОЗДІЛ 5

Визначникові зображення розв'язків кватерніонових матричних та дифиренціально-матричних рівнянь з обмеженнями

Узагальнено-обернені розв'язки з використанням узагальненої оберненої матриці Дразіна, зважених узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна, серцевинної оберненої і її узагальнень дають розв'язки матричних рівнянь з різного роду обмеженнями. Застосування визначникових зображень цих узагальнених обернених матриць приводять до аналогів правила Крамера таких матричних рівнянь з обмеженнями, що і буде розглянуто в даному розділі.

5.1. Визначникові зображення Дразіна узагальнено-обернених розв'язків кватерніонових матричних та дифиренціально-матричних рівнянь

У цьому підрозділі будуть побудовані правила Крамера для знаходження Дразіна оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з обмеженнями і його часткових випадків, а також деяких кватерніонових сингулярних диференціальних матричних рівнянь.

5.1.1. Правила Крамера для Дразіна оберненого розв'язку матричних рівнянь. Розглянемо рівняння

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{D}, \tag{5.1}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ задані матриці, і $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ – невідома. Нехай $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k_1$ і $\operatorname{Ind}\mathbf{B} = k_2$.

Відомо, що (див., напр. [224]) рівняння (5.1) з обмеженнями

$$\mathcal{R}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^{k_1}), \tag{5.2}$$

$$\mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_r(\mathbf{B}^{k_2}), \quad \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l(\mathbf{B}^{k_2}), \tag{5.3}$$

має єдиний розв'язок $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d$, де $\mathbf{A}^d$, $\mathbf{B}^d$ – узагальнені обернені матриці Дразіна матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$, відповідно.

Будемо розглядати визначникове зображення цього розв'язку в залежності від того чи матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ є ермітовими.

Випадок ермітових матриць.

Теорема 5.1. *Нехай матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ і $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ обидві є ермітовими, при цьому $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k_1+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k_1} = r_1 \leq n$ і $\operatorname{rank}\mathbf{B}^{k_2+1} = \operatorname{rank}\mathbf{B}^{k_2} = r_2 \leq m$. Позначимо $\mathbf{A}^{k_1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{k_2} =: \widetilde{\mathbf{D}} = (\widetilde{d}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$. Тоді розв'язок $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ рівняння (5.1) з обмеженнями (5.2)-(5.3) має визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.\,j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|^\alpha_\alpha} = \tag{5.4}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^\beta_\beta\right| \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|^\alpha_\alpha}, \tag{5.5}$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.\,j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}^{k_1+1}\right)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{l.}\right)\right)^\alpha_\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{5.6}$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.t}\right)\right)^\beta_\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times m}, \quad t = 1, \ldots, m. \tag{5.7}$$

Тут $\widetilde{\mathbf{d}}_{i.}$ і $\widetilde{\mathbf{d}}_{.j}$ – i-й рядок і j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{D}}$ для всіх $i = i, \ldots, n$, $j = i, \ldots, m$.

Доведення. Довільний (ij)-й елемент розв'язку $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ можна подати як

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} a^d_{it} d_{ts} b^d_{sj}. \tag{5.8}$$

За Теоремою 2.10 визначникові зображення узагальнених обернених матриць Дразіна $\mathbf{A}^d = \left(a_{ij}^d\right)$, $\mathbf{B}^d = \left(b_{ij}^d\right)$ візьмемо як

$$a_{it}^d = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.\,i} \left(\mathbf{a}_{.t}^{(k_1)}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|_\beta^\beta}, \tag{5.9}$$

$$b_{sj}^d = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}^{k_2+1})_{j\,.} (\mathbf{b}_{s.}^{(k_2)})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|_\alpha^\alpha}. \tag{5.10}$$

Нехай $\mathbf{e}_{t.}$ і $\mathbf{e}_{.\,l}$ є, відповідно, одиничними t-м вектор-рядком та l-м вектор-стовпцем. Підставивши (5.9) і (5.10) у рівняння (5.8), одержимо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} \sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.\,i} (\mathbf{e}_{.\,l})\right)_\beta^\beta \widetilde{d}_{lt} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}^{k_2+1})_{j\,.} (\mathbf{e}_{t.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|_\alpha^\alpha}, \tag{5.11}$$

де $\widetilde{d}_{lt}$ – (lt)-й елемент матриці $\widetilde{\mathbf{D}}$. Нехай

$$d_{it}^A := \sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.\,i} (\mathbf{e}_{.\,l})\right)_\beta^\beta \widetilde{d}_{lt} =$$
$$= \sum_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.\,i} \left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.\,t}\right)\right)_\beta^\beta$$

є t-ю компонентою вектор-рядка $\mathbf{d}_{i.}^A = \left[d_{i1}^A, \ldots, d_{im}^A\right]$ для всіх $t = i, \ldots, m$. Підставивши її у рівняння (5.11), отримаємо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} d_{it}^A \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}^{k_2+1})_{j\,.} (\mathbf{e}_{t.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|_\alpha^\alpha}.$$

З того, що $\sum\limits_{t=1}^{m} d_{it}^A \mathbf{e}_{t.} = \mathbf{d}_{i\,.}^A$, випливає формула (5.5).

Якщо введемо

$$d_{lj}^B := \sum_{t=1}^{m} \widetilde{d}_{lt} \sum_{\alpha \in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}^{k_2+1})_{j\,.} (\mathbf{e}_{t.})\right)_\alpha^\alpha =$$
$$= \sum_{\alpha \in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}^{k_2+1})_{j\,.} (\widetilde{\mathbf{d}}_{l.})\right)_\alpha^\alpha \tag{5.12}$$

як l-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{d}_{.j}^{B}=\left[d_{1j}^{B},...,d_{nj}^{\mathbf{B}}\right]^{T}$ для всіх $l=1,\ldots,n$ і підставимо її у рівняння (5.11), одержимо

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.i}(\mathbf{e}_{.l})\right)_{\beta}^{\beta}d_{lj}^{B}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}}\left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}}\left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Оскільки $\sum\limits_{l=1}^{n}\mathbf{e}_{.l}d_{lj}^{B}=\mathbf{d}_{.j}^{B}$, то з цього слідує формула (5.4). □

Розглянемо рівняння

$$\mathbf{AX}=\mathbf{D},\tag{5.13}$$

де матриці $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{D}\in\mathbb{H}^{n\times m}$ є заданими, при цьому $\mathbf{A}$ – ермітова, а матриця $\mathbf{X}\in\mathbb{H}^{n\times m}$ є невідомою. Нехай $\operatorname{Ind}\mathbf{A}=k$. Позначимо $\mathbf{A}^{k}\mathbf{D}=:\hat{\mathbf{D}}=(\hat{d}_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times m}$. Маємо наступний наслідок Теореми 5.1.

Наслідок 5.1. *Якщо* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{n\times n}$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1}=\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k}=r\leq n$, *то для розв'язку* $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{d}\mathbf{D}=(x_{ij})$ *рівняння (5.13) з обмеженням (5.2) маємо*

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\hat{\mathbf{d}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}},\tag{5.14}$$

де $\hat{\mathbf{d}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\hat{\mathbf{D}}$ *для всіх* $j=i,\ldots,m$.

Доведення. Доведення, очевидно, випливає з доведення Теореми 5.1, поклавши матрицю $\mathbf{B}$, як одиничну матрицю $\mathbf{I}_m$. □

Розглянемо рівняння

$$\mathbf{XB}=\mathbf{D},\tag{5.15}$$

де матриці $\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{D}\in\mathbb{H}^{n\times m}$ є заданими, при цьому $\mathbf{B}$ – ермітова, а матриця $\mathbf{X}\in\mathbb{H}^{n\times m}$ є невідомою. Нехай $\operatorname{Ind}\mathbf{B}=k$ і позначимо $\mathbf{DB}^{k}=:\check{\mathbf{D}}=(\check{d}_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times m}$. Маємо наступний наслідок.

Наслідок 5.2. *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{B}^{k+1}=\operatorname{rank}\mathbf{B}^{k}=r\leq n$ *для матриці* $\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{n\times n}$, *тоді розв'язок* $\mathbf{X}=\mathbf{DB}^{d}=:(x_{ij})$ *рівняння (5.15) з обмеженням (5.3) для всіх*

$i = i, \dots, n$, $j = i, \dots, m$ виражається як

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}^{k+1} \right)_{j\,.} \left(\check{\mathbf{d}}_{i\,.} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,m}} \left| \mathbf{B}^{k+1} \right|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{5.16}$$

де $\check{\mathbf{d}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\check{\mathbf{D}}$.

Доведення. Доведення, очевидно, випливає з доведення Теореми 5.1, поклавши матрицю $\mathbf{A}$, як одиничну матрицю $\mathbf{I}_n$. □

Випадок неермітових матриць. У цьому пункті розглянемо випадок, коли обидві матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ не є ермітовими.

Теорема 5.2. *Нехай матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ і $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m \times m}$ не є ермітовими. Позначимо $(\mathbf{A}^{2k_1+1})^* \mathbf{A}^{k_1} \mathbf{D} \mathbf{B}^{k_2} (\mathbf{B}^{2k_2+1})^* =: \widetilde{\mathbf{D}} = (\widetilde{d}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n \times m}$. Якщо $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{k_1+1} = \operatorname{rank} \mathbf{A}^{k_1} = r_1 \leq n$ і $\operatorname{rank} \mathbf{B}^{k_2+1} = \operatorname{rank} \mathbf{B}^{k_2} = r_2 \leq m$, тоді розв'язок $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d \mathbf{D} \mathbf{B}^d = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n \times m}$ рівняння (5.1) має наступні визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}^{(k_1)} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{2k_1+1} \right)^* \left(\mathbf{A}^{2k_1+1} \right)_{.\,l} \left(\mathbf{d}_{.j}^{B} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k_1+1} \right)^* \mathbf{A}^{2k_1+1} \right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,\,m}} \left| \mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1} \right)^* \right|_{\alpha}^{\alpha}} = \tag{5.17}$$

$$= \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,\,m}\{s\}} \operatorname{rdet}_s \left(\left(\mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1} \right)^* \right)_{.\,s} \left(\mathbf{d}_{i\,.}^{A} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right) b_{sj}^{(k_2)}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k_1+1} \right)^* \mathbf{A}^{2k_1+1} \right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,\,m}} \left| \mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1} \right)^* \right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{5.18}$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{B} = \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{\alpha \in I_{r_2,\,m}\{k\}} \operatorname{rdet}_k \left(\left(\mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1} \right)^* \right)_{.\,k} \left(\widetilde{\mathbf{d}}_{t.} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right) b_{kj}^{(k_2)} \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \tag{5.19}$$

$$\mathbf{d}_{i\,.}^{A} = \left[\sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k_1)} \sum_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left(\left(\mathbf{A}^{2k_1+1} \right)^* \left(\mathbf{A}^{2k_1+1} \right)_{.\,t} \left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.p} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times m}. \tag{5.20}$$

Тут $\widetilde{\mathbf{d}}_{t.}$ і $\widetilde{\mathbf{d}}_{.s}$ – t-й рядок і s-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{D}}$ для всіх $t = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, m$.

Доведення. Оскільки обидві матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ не є ермітовими, то для визначникового зображення узагальнених обернених матриць Дразіна використаємо (2.84) для матриці $\mathbf{A}^d = \left(a_{it}^d\right)$ і (2.85) для матриці $\mathbf{B}^d = \left(b_{sj}^d\right)$. Підставимо ці значення у рівняння (5.8)

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}^{(k_1)} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)_{.\,l}\left(\mathbf{e}_{.\,t}\right)\right)_{\beta}^{\beta} \widetilde{d}_{ts}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \mathbf{A}^{2k_1+1}\right|_{\beta}^{\beta}}$$
$$\times \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,\,m}\{k\}} \operatorname{rdet}_k \left(\left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^*\right)_{.k}\left(\mathbf{e}_{s\,.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha} b_{kj}^{(k_2)}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,\,m}} \left|\mathbf{B}^{2k_2+1}\left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}. \qquad (5.21)$$

Поклавши

$$d_{tj}^{B} := \sum_{s=1}^{m} \widetilde{d}_{ts} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha \in I_{r_2,\,m}\{k\}} \operatorname{rdet}_k \left(\left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^*\right)_{.k}\left(\mathbf{e}_{s\,.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha} b_{kj}^{(k_2)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha \in I_{r_2,\,m}\{k\}} \operatorname{rdet}_k \left(\left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^*\right)_{.k}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{t\,.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha} b_{kj}^{(k_2)}$$

як t-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{d}_{.j}^{B} = \left[d_{1j}^{B}, \ldots, d_{nj}^{B}\right]^T$ для всіх $t = 1, \ldots, n$ і підставивши її у рівняння (5.21), одержимо (5.17).

Поклавши

$$d_{sj}^{A} := \sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k_1)} \sum_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)_{.\,l}\left(\mathbf{e}_{.\,t}\right)\right)_{\beta}^{\beta} \widetilde{d}_{ts} =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k_1)} \sum_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)_{.\,l}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.\,s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

як s-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{d}_{i.}^{A} = \left[d_{i1}^{A}, \ldots, d_{im}^{A}\right]$ для всіх $s = 1, \ldots, n$ і підставивши її у рівняння (5.21), одержимо (5.17). □

Наступні наслідки, очевидно, випливають з Теореми 5.2, поклавши матриці $\mathbf{B}$ чи $\mathbf{A}$ як одиничні.

Наслідок 5.3. *Якщо* $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{k_1+1} = \operatorname{rank} \mathbf{A}^{k_1} = r \leq n$ *для* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *тоді для* *розв'язку* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D} = (x_{ij})$ *рівняння (5.13) з обмеженням (5.2), маємо*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}^{(k_1)} \sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left(\left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)_{.t} \left(\hat{\mathbf{d}}_{.j}\right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \mathbf{A}^{2k_1+1} \right|_\beta^\beta}. \tag{5.22}$$

де $\hat{\mathbf{d}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{A}^{2k_1+1})^*\mathbf{A}^{k_1}\mathbf{D}$ *для всіх* $j = 1, \dots, m$.

Наслідок 5.4. *Якщо* $\mathrm{rank}\,\mathbf{B}^{k_2+1} = \mathrm{rank}\,\mathbf{B}^{k_2} = r \leq m$ *для* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, *тоді для розв'язку* $\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{B}^d =: (x_{ij})$ *рівняння (5.15) з обмеженням (5.3), маємо*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{s\}} \mathrm{rdet}_s \left(\left(\mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^*\right)_{.s} \left(\hat{\mathbf{d}}_{i.}\right) \right)_\alpha^\alpha \right) b_{sj}^{(k_2)}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}} \left| \mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^* \right|_\alpha^\alpha}. \tag{5.23}$$

де $\hat{\mathbf{d}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{B}^{k_2}(\mathbf{B}^{2k_2+1})^*$ *для всіх* $i = 1, \dots, n$.

Змішані випадки. У цьому пункті розглянемо змішані випадки, коли з пари матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ лише одна є ермітовою. Оскільки їх доведення аналогічні доведенню Теорем 5.1 і 5.2, то розглянемо ці теореми без доведень.

Теорема 5.3. *Нехай матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *– ермітова, а матриця* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *не є ермітовою,* $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{k_1+1} = \mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{k_1} = r_1 \leq n$ *і* $\mathrm{rank}\,\mathbf{B}^{k_2+1} = \mathrm{rank}\,\mathbf{B}^{k_2} = r_2 \leq m$. *Позначимо* $\mathbf{A}^{k_1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{k_2}(\mathbf{B}^{2k_2+1})^* =: \widetilde{\mathbf{D}} = (\widetilde{d}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$. *Тоді розв'язок* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *рівняння (5.1) з обмеженнями (5.2)-(5.3) має визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.i} \left(\mathbf{d}_{.j}^B\right) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}} \left| \mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^* \right|_\alpha^\alpha} = \tag{5.24}$$

$$= \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}\{s\}} \mathrm{rdet}_s \left(\left(\mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^*\right)_{.s} \left(\mathbf{d}_{i.}^A\right) \right)_\alpha^\alpha \right) b_{sj}^{(k_2)}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}} \left| \mathbf{B}^{2k_2+1} \left(\mathbf{B}^{2k_2+1}\right)^* \right|_\alpha^\alpha}, \tag{5.25}$$

де $\mathbf{d}_{.j}^{B}$ *знайдемо за формулою (5.19), а* $\mathbf{d}_{i.}^A$ *– за формулою (5.7).*

Теорема 5.4. *Нехай матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *не є ермітова, а* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *– ермітова,* $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{k_1+1} = \operatorname{rank} \mathbf{A}^{k_1} = r_1 \leq n$ *і* $\operatorname{rank} \mathbf{B}^{k_2+1} = \operatorname{rank} \mathbf{B}^{k_2} = r_2 \leq m$. *Позначимо* $(\mathbf{A}^{2k_1+1})^* \mathbf{A}^{k_1} \mathbf{D} \mathbf{B}^{k_2} =: \widetilde{\mathbf{D}} = (\widetilde{d}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$. *Тоді розв'язок* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d \mathbf{D} \mathbf{B}^d = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *рівняння (5.1) з обмеженнями (5.2)-(5.3) має визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}^{(k_1)} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)_{.\,l} \left(\mathbf{d}_{.\,j}^{B}\right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \mathbf{A}^{2k_1+1} \right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}} \left| \mathbf{B}^{k_2+1} \right|_{\alpha}^{\alpha}} = \tag{5.26}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)_{j\,.} \left(\mathbf{d}_{i\,.}^{A}\right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k_1+1}\right)^* \mathbf{A}^{2k_1+1} \right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,m}} \left| \mathbf{B}^{k_2+1} \right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{5.27}$$

де $\mathbf{d}_{.\,j}^{A}$ *знайдемо за формулою (5.20), а* $\mathbf{d}_{i\,.}^{B}$ *– за формулою (5.6).*

5.1.2. Елементи теорії кватерніонових диференціальних рівнянь.

Останнім часом значна увага приділяється кватерніоновим диференціальним рівнянням з дійсною змінною, які мають багато застосувань. Зокрема, у гідромеханіці [93, 206], квантовій механіці [1, 146], для вивчення триграннику Френе в диференціальній геометрії [65], у просторовій динаміці тіла [94, 243], і т.д.

Хоча кватерніонові диференціальні рівняння з дійсною змінною мають багато застосувань, їх теоретичні аспекти були розглянуті у порівняно невеликій кількості наукових робіт.

Лео і Дукаті [147] розв'язували деякі прості кватерніонові диференціальні рівняння другого порядку. Кампос і Махін [25] вивчали існування періодичних розв'язків для кватерніонового рівняння Ріккаті. Жолсадек [297] дав повний опис динаміки рівняння Ріккаті. Вільчинські довів існування двоперіодичних розв'язків кватерніонових рівнянь Ріккаті в роботі [269], і розглянув деякі достатні умови існування принаймні одно-періодичного розв'язку кватерніонових поліномних рівнянь у [270, 271]. Гасуль та ін. [92] довів існування періодичних орбіт, гомоклінічних петель, інваріантних торів для одновимірного кватерніонового однорідного диференціального рівняння. Жаг [287] вивчав глобальну структуру кватерніонних рівнянь Бернуллі. Недавно, Кай і Коу [21] застосували перетворення Лапласа для вирішення лінійних кватерніонових диференціальних рівнянь.

Ще менше робіт присвячено кватерніоновим системам лінійних диференціальних рівнянь та лінійним диференціально-матричним рівнянням. Відмітимо недавню роботу [100], де автори вивчають базову теорію кватерніонових систем лінійних диференціальних рівнянь другого степеня, такі як фундаментальна матриця, алгебраїчна структура розв'язку, і т.д., використовуючи визначник Келі та подвійний визначник. Пропоновна нижче теорія кватерніонових систем лінійних диференціальних рівнянь розглядається у рамках стовпцево-рядкових визначників.

Розглянемо кватерніонову функцію дійсної змінної, $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{H}$, $(t\in\mathbb{R})$ таку, що $\mathbf{f}(t)=f_0(t)+f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}$. Першу похідну кватерніонової функції дійсної змінної $\mathbf{f}(t)$ можна ввести наступним чином,

$$\mathbf{f}'(t):=\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f_0(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}+\frac{\mathrm{d}f_3(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}.$$

Маємо наступні властивості похідної кватерніонової функції.

Лема 5.1. *Якщо* $\mathbf{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{H}$ *і* $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{H}$ *є диференційованими, тоді* $(\mathbf{q}\pm\mathbf{r})(t)$, $\mathbf{qr}(t)$ *і для довільного цілого* $n\geq 1$, $\mathbf{q}^n$ *є диференційованої, і*

$$(\mathbf{q}\pm\mathbf{r})'(t)=\mathbf{q}'(t)\pm\mathbf{r}'(t),$$
$$(\mathbf{qr})'(t)=\mathbf{q}'(t)\mathbf{r}(t)+\mathbf{q}(t)\mathbf{r}'(t),$$
$$[\mathbf{q}^n(t)]'=\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{q}^j(t)\mathbf{q}'(t)\mathbf{q}^{n-j}(t).$$

Введемо експоненту довільного кватерніона $q\in\mathbb{H}$, поклавши

$$e^q=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{n!}. \tag{5.28}$$

З означення (5.28), випливають такі властивості.

Лема 5.2. *1. Якщо* $q,r\in\mathbb{H}$ *такі, що* $qr=rq$, *тоді* $e^{q+r}=e^qe^r$.

2. Якщо функція $\mathbf{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{H}$ *є диференційованою і* $\mathbf{q}'(t)\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}(t)\mathbf{q}'(t)$*, тоді*

$$\left[e^{\mathbf{q}(t)}\right]'=\left[e^{\mathbf{q}(t)}\right]\mathbf{q}'(t)$$

Якщо $f_i(t)$ для всіх $i=0,\ldots,3$ є інтегрованими на проміжку $[a,b]\subset\mathbb{R}$, тоді функція $\mathbf{f}(t)$ є інтегрованою, і

$$\int_a^b\mathbf{f}(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f_0(t)\mathrm{d}t+\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t\,\mathbf{i}+\int_a^b f_2(t)\mathrm{d}t\,\mathbf{j}+\int_a^b f_3(t)\mathrm{d}t\,\mathbf{k}.$$

У роботі [94] розглядалися лінійні кватерніонові диференціальні рівняння,

$$\mathbf{q}'(t)=\mathbf{a}(t)\mathbf{q}(t), \tag{5.29}$$

$$\mathbf{q}'(t)=\mathbf{q}(t)\mathbf{a}(t), \tag{5.30}$$

з початковою умовою $q(t_0)=q_0$ і наступний результат був отриманий.

Лема 5.3. *Нехай* $\mathbf{q}(t)=\mathbf{\Phi}_l(t)q_0$ *і* $\mathbf{q}(t)=q_0\mathbf{\Phi}_r(t)$ *є розв'язками рівнянь (5.29) і (5.30), відповідно. Якщо*

$$\mathbf{a}(t)\int_{t_0}^t\mathbf{a}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^t\mathbf{a}(\tau)\mathrm{d}\tau\,\mathbf{a}(t), \tag{5.31}$$

тоді

$$\mathbf{\Phi}_l(t)=\mathbf{\Phi}_r(t)=e^{\int_{t_0}^t\mathbf{a}(\tau)\mathrm{d}t}. \tag{5.32}$$

Якщо $\mathbf{a}$ *– константа, тоді* $\int_{t_0}^t\mathbf{a}\mathrm{d}\tau=\mathbf{a}\,(t-t_0)$ *і* $\mathbf{\Phi}_l(t)=\mathbf{\Phi}_r(t)=e^{\mathbf{a}(t-t_0)}$.

Аналогічний результат був так само отриманий в [25]. Більш того, у роботі [25] були розглянуті наступні неоднорідні диференціальні рівняння

$$\mathbf{q}'(t)=\mathbf{a}(t)\mathbf{q}(t)+\mathbf{f}(t), \tag{5.33}$$

де $\mathbf{f}:[0,T]\to\mathbb{H}$ і $\mathbf{a}:[0,T]\to\mathbb{H}$. Було показано, якщо умова (5.31) виконується, тоді розв'язки рівняння (5.33) задаються як

$$\mathbf{q}(t)=e^{\int_0^t\mathbf{a}(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(\mathbf{q}(0)+\int_0^t e^{\int_0^s(-\mathbf{a}(\tau))\mathrm{d}\tau}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s\right),\quad (t\in[0,T]).$$

В особливому випадку, коли $\mathbf{a}$ є константою і $\mathbf{q}(0)=0$, тоді розв'язки рівняння (5.33) задаються як

$$\mathbf{q}(t)=e^{\mathbf{a}t}\left(\int_0^t e^{-\mathbf{a}s}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s\right),\quad (t\in[0,T]).$$

Будемо розглядати матричнозначну функцію $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{H}^{n\times n} \otimes \mathbb{R}$, де $a_{ij}(t)$ є кватерніонові функції дійсної змінної t для всіх $i, j = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{n\times n}, \qquad \int_a^b \mathbf{A}(t)\mathrm{d}t = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right)_{n\times n}.$$

Визначимо також експоненту кватерніонної квадратної матриці.

Означення 5.1. *Експонента кватерніонової квадратної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ визначається як ряд*

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\propto} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}. \tag{5.34}$$

Нехай для кватерніонової квадратної матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\|\mathbf{A}\|$ – її векторна норма. Оскільки, для довільного $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{I}\| + \|\mathbf{A}\| + \frac{1}{2!}\|\mathbf{A}^2\| + \cdots + \frac{1}{k!}\|\mathbf{A}^k\| \leq e^{\|\mathbf{A}\|},$$

тоді ряд (5.34) збігається абсолютно.

Теорема 5.5. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$.*

(i) Якщо $\mathbf{0}$ – $n \times n$ нуль-матриця і $\mathbf{I}$ – $n \times n$ одинична, тоді $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$ і $e^{\mathbf{I}} = e\mathbf{I}$.

(ii) $e^{\mathbf{A}} = \lim_{k\mapsto\propto} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{k}\mathbf{A}\right)^k$.

(iii) $\left(e^{\mathbf{A}}\right)^T = e^{\left(\mathbf{A}^T\right)}$, $\left(e^{\mathbf{A}}\right)^* = e^{(\mathbf{A}^*)}$.

(iv) Для всіх невід'ємних цілих k маємо $\mathbf{A}^k e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}}\mathbf{A}^k$.

(v) Якщо $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, тоді $\mathbf{A}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ і $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$.

(vi) Якщо $s, t \in \mathbb{H}$, тоді $e^{\mathbf{A}s}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(s+t)}$.

(vii) Якщо $\mathbf{A}$ – оборотна, тоді $\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{\left(\mathbf{A}^{-1}\right)}$.

(viii) Якщо матриця $\mathbf{D} = \mathrm{diag}[d_1, \ldots, d_n]$, де $d_i \in \mathbb{H}$ для всіх $i = 1, \ldots, n$, тоді $e^{\mathbf{D}} = \mathrm{diag}[e^{d_1}, \ldots, e^{d_n}]$.

(ix) Якщо матриця $\mathbf{A}$ є діагоналізованою, $\mathbf{P}$ – оборотною і $\mathbf{D}$ – діагональною матрицею, що задовольняють $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, тоді $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}$.

(x) Якщо матриця $\mathbf{A}$ – ермітова, тоді $\det e^{\mathbf{A}} = \mathrm{tr}\mathbf{A}$.

Доведення. Доведення тверджень (i)-(ix) очевидно слідують з Означення 5.1.

Доведемо пункт (x). Оскільки, $\mathbf{A}$ – ермітова, тоді $e^{\mathbf{A}}$ є ермітовою також. І можна дати означення визначника експоненти, поклавши

$$\det e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\propto} \frac{(\det \mathbf{A})^n}{n!}$$

і оскільки $\sum_{n=0}^{\propto} \frac{|\det \mathbf{A}|^n}{n!} < \propto$. За твердженням (ii) цієї теореми,

$$\det e^{\mathbf{A}} = \det\left(\lim_{k\mapsto\propto}\left(\mathbf{I}+\frac{1}{k}\mathbf{A}\right)^k\right) = \lim_{k\mapsto\propto}\det\left(\mathbf{I}+\frac{1}{k}\mathbf{A}\right)^k.$$

Використовуючи Теорему 1.4 про характеристичний многочлен ермітової матриці та властивості границі, одержимо

$$\det e^{\mathbf{A}} = \lim_{k\mapsto\propto}\left(1+\frac{\mathrm{tr}\mathbf{A}}{k}+O(k^{-2})\right)^k = \lim_{k\mapsto\propto}\left(1+\frac{\mathrm{tr}\mathbf{A}}{k}\right)^k = e^{\mathrm{tr}\mathbf{A}}.$$

□

5.1.3. Розв'язок лінійних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь першого степеня. Розглянемо праве лінійне кватерніонове диференціальне матричне рівняння

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}, \tag{5.35}$$

де $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{n\times n}$, а матриці, $\mathbf{B}(t)$ і $\mathbf{X}(t)$, відповідно, кватерніонно-значні матричні функції з дійсною змінною.

Теорема 5.6. *Рівняння (5.35) з початковою умовою $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$ має єдиний розв'язок для кожної початкової умови, $t_0\in\mathbb{R}$ і $\mathbf{X}_0\in\mathbb{H}^{n\times n}$, що задається як*

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}_0 + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{5.36}$$

Доведення. Доведення аналогічне доведенню теореми у комплексному чи дійсному випадку.

Запишемо дане рівняння як $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}$, і помножимо його зліва на $e^{-\mathbf{A}t}$,

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{X}' - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{X} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}.$$

Оскільки $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}$ і використовуючи формули для похідної експоненти та добутку, отримаємо

$$\left(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{X}\right)' = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}.$$

Інтегрування останнього рівняння на інтервалі $[t_0,t]$ дає

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{X}(t) - e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{X}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Використавши те, що $\left(e^{-\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{\mathbf{A}t}$, маємо

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{X}_0 + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Оскільки $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t_0} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$, звідси випливає (5.36). □

Розглянемо ліве лінійне кватерніонове диференціальне матричне рівняння

$$\mathbf{X}^{'} = \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{B}, \tag{5.37}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, а матриці, $\mathbf{B}(t)$ і $\mathbf{X}(t)$, відповідно, кватерніонно-значні матриці з дійсною змінною.

Аналогічно Теоремі 5.6 можна довести наступну теорему.

Теорема 5.7. *Рівняння (5.37) з початковою умовою* $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ *має єдиний розв'язок для кожної початкової умови* $t_0 \in \mathbb{R}$ *і* $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *що задається як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 e^{\mathbf{A}(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{B}(\tau)e^{-\mathbf{A}\tau}\mathrm{d}\tau\, e^{\mathbf{A}t}.$$

Зауваження 5.1. *Загальні розв'язки рівнянь (5.35) і (5.37) відповідно є*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\int e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}(t)\mathrm{d}t, \tag{5.38}$$

$$\mathbf{x}(t) = \int \mathbf{B}(t)e^{-\mathbf{A}t}\mathrm{d}t\, e^{\mathbf{A}t}.$$

5.1.4. Визначникові зображення розв'язів лінійних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь першого степеня з постійними матрицями.

Нехай матриця $\mathbf{B}$ є матрицею з постійними елементами.

1. Якщо матриця $\mathbf{A}$ – оборотня, тоді

$$\int e^{-\mathbf{A}t}dt = -\mathbf{A}^{-1}e^{-\mathbf{A}t} + \mathbf{G},$$

де $\mathbf{G}$ – довільна $n\times n$ матриця. Тоді для правого лінійного неоднорідного рівняння, $\mathbf{X}^{'}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}$, маємо, відповідно, наступний загальний розв'язок та розв'язок задачі з початковими умовами

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\int e^{-\mathbf{A}t}\mathrm{d}t\,\mathbf{B} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{G}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{X}(t) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}_0\mathbf{B}.$$

Для лівого лінійного неоднорідного рівняння, $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{A} + \mathbf{B}$, маємо наступний загальний розв'язок та розв'язок задачі з початковими умовами

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{B} \int e^{-\mathbf{A}t} \mathrm{d}t\, e^{\mathbf{A}t} = -\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{G}e^{\mathbf{A}t},$$

$$\mathbf{X}(t) = -\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{X}_0 e^{\mathbf{A}(t-t_0)}.$$

Якщо $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$ або (що є еквівалентним) $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{0}$, тоді частковий розв'язок правого лінійного неоднорідного рівняння, $\mathbf{X}(t) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, за формулами (4.5) та (4.3), відповідно, має наступні визначникові зображення:

$$x_{ij} = -\frac{\mathrm{cdet}_i \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{b}_{.j})}{\det \mathbf{A}}, \quad \text{коли} \quad \mathbf{A} - \text{ермітова};$$
$$x_{ij} = -\frac{\mathrm{cdet}_i (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{b}_{.j})}{\mathrm{ddet}\mathbf{A}}, \quad \text{коли} \quad \mathbf{A} - \text{довільна}.$$

Аналогічно, якщо $\mathbf{G}$ чи $\mathbf{X}_0$ є нульовими матрицями, тоді частковий розв'язок лівого лінійного неоднорідного рівняння, $\mathbf{X}(t) = -\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = (x_{ij})$, за формулами (4.10) та (4.8), відповідно, має наступні визначникові зображення:

$$x_{ij} = -\frac{\mathrm{rdet}_i \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{b}_{i.})}{\det \mathbf{A}}, \quad \text{коли} \quad \mathbf{A} - \text{ермітова};$$
$$x_{ij} = -\frac{\mathrm{rdet}_i (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{b}_{i.})}{\mathrm{ddet}\mathbf{A}}, \quad \text{коли} \quad \mathbf{A} - \text{довільна}.$$

2. Нехай тепер $\mathbf{A}$ не є оборотна. Тоді, відповідно до [24], наступна теорема може бути узагальнена для кватерніонових матриць.

Теорема 5.8. *Якщо матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ має індекс k, тоді*

$$\int e^{-\mathbf{A}t}\mathrm{d}t = -\,\mathbf{A}^d e^{-\mathbf{A}t} +$$
$$+(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)t\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{2}t + \frac{\mathbf{A}^2}{3!}t^2 + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}\mathbf{A}^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right] + \mathbf{G}, \quad (5.39)$$

де $\mathbf{A}^d$ – узагальнена обернена матриця Дразіна.

Доведення. Диференціюючи рівняння (5.39) і за означення експоненти $e^{-\mathbf{A}t}$, маємо

$$e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{A}^d\mathbf{A}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2}t^2 + \ldots + \frac{(-1)^k\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \ldots\right) + (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d) -$$
$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)\mathbf{A}t + (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)\frac{\mathbf{A}^2}{2}t^2 + \ldots + (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)\frac{(-1)^{k-1}\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}. \quad (5.40)$$

Оскільки $\mathbf{A}^d\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^d$, то з (5.40) випливає рівність,

$$\begin{aligned}e^{-\mathbf{A}t} =&\mathbf{A}^D\mathbf{A}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2}t^2 + \ldots + \frac{(-1)^k\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \ldots\right) - \\ &-\mathbf{A}^D\mathbf{A}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2}t^2 + \ldots + \frac{(-1)^k\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \ldots\right) + \\ &+\mathbf{I} - \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2}t^2 + \ldots + \frac{(-1)^k\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \ldots\end{aligned}$$

Що завершує доведення. □

Зауваження 5.2. *Відмітимо, що з (5.40) слідує наступна рівність,*

$$e^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)\left[\mathbf{I} - \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\right].$$

Аналогічно, маємо

$$e^{\mathbf{A}t}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\right]. \tag{5.41}$$

Розглянемо праве неоднорідне диференціальне рівняння

$$\mathbf{X}^{'}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B},$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – вироджена і $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$. Виходячи з рівнянь (5.39) і (5.41), маємо наступний загальний розв'язок,

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}(t) = \\ =&\left\{-\mathbf{A}^d + (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)t\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\right] + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{G}\right\}\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Поклавши $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, тоді одержимо наступний частковий розв'язок

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) =& - \mathbf{A}^d\mathbf{B} + (\mathbf{B} - \mathbf{A}^d\mathbf{A}\mathbf{B})t+ \\ &+\frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{A}^d\mathbf{A}^2\mathbf{B})t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} - \mathbf{A}^d\mathbf{A}^k\mathbf{B})t^k.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Теорема 5.9. *Якщо матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *має індекс* k *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k = r \leq n$, *тоді частковий розв'язок (5.42),* $\mathbf{X}(t) = (x_{ij}(t))$, *має наступні визначникові зображення,* *(i) коли матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – ермітова, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|} + \left(b_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k+1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right) t$$

$$- \frac{1}{2}\left(\widehat{b}^{(1)}_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k+2)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right) t^2 + ...$$

$$\frac{(-1)^k}{k!}\left(\widehat{b}^{(k-1)}_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(2k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right) t^k \quad (5.43)$$

де $\mathbf{A}^l\mathbf{B} =: \widehat{\mathbf{B}}^{(l)} = \left(\widehat{b}^{(l)}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *для всіх* $l = 1, \ldots, 2k$*;*

(ii) коли $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *- довільна, то*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} a^{(k)}_{it} \sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{s\}} \operatorname{cdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{(0)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}$$

$$+ \left(b_{ij} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} a^{(k)}_{is} \sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{s\}} \operatorname{cdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right) t$$

$$- \frac{1}{2}\left(\widehat{b}^{(1)}_{ij} - \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} a^{(k)}_{it} \sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{s\}} \operatorname{cdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{(2)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right) t^2 + \cdots$$

$$\frac{(-1)^k}{k!}\left(\widehat{b}^{(k-1)}_{ij} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} a^{(k)}_{is} \sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{s\}} \operatorname{cdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right) t^k \quad (5.44)$$

де $(\mathbf{A}^{2k+1})^{*}\mathbf{A}^{k+l}\mathbf{B} =: \widehat{\mathbf{D}}^{(l)} = (\widehat{d}^{(l)}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *для всіх* $l = 0, \ldots, k$.

Доведення. (i) Якщо $\mathbf{A}$ – ермітова, то для $\mathbf{A}^d$ можемо використати визначникове зображення (2.77), тоді для $\mathbf{A}^d\mathbf{A}^m\mathbf{B} := \mathbf{Y} = (y_{ij})$ маємо

$$y_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a^d_{is} \sum_{t=1}^{n} a^{(m)}_{st} b_{tj} = \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.s}{}^{(k)}\right)\right)^{\beta}_{\beta} \cdot \sum\limits_{t=1}^{n} a^{(m)}_{st} b_{tj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|^{\beta}_{\beta}} =$$

$$= \sum_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} \operatorname{cdet}_i \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i} \left(\mathbf{a}_{.t}^{(k+m)} \right) \right)_{\beta}^{\beta} \cdot b_{tj}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left| \mathbf{A}^{k+1} \right|_{\beta}^{\beta}} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i} \left(\widehat{\mathbf{b}}_{.j}^{(k+m)} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}} \left| \mathbf{A}^{k+1} \right|_{\beta}^{\beta}}$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$ і $m = 0, \ldots, k$. Звідси випливає (5.43).

(ii) Доведення визначникового зображення (5.44) аналогічне доведенню у пункті (i). У випадку коли $\mathbf{A}$ не є ермітовою, то для визначникового зображення $\mathbf{A}^d$ використаємо формулу (2.84). □

Розглянемо ліве неоднорідне диференціальне рівняння

$$\mathbf{X}^{'}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{A} + \mathbf{B},$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ – вироджена і $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$. Маємо наступний загальний розв'язок

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{B} \left\{ -\mathbf{A}^d + (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)t \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1} \right] + \mathbf{G}\mathbf{e}^{\mathbf{At}} \right\}.$$

Поклавши $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, одержимо наступний частковий розв'язок,

$$\mathbf{X}(t) =$$
$$= -\mathbf{B}\mathbf{A}^d + (\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}^d)t + \frac{1}{2}(\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^d)t^2 + \cdots \frac{1}{k!}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{B}\mathbf{A}^k\mathbf{A}^d)t^k. \tag{5.45}$$

Теорема 5.10. *Якщо* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k = r$, *тоді розв'язок (5.45),* $\mathbf{X}(t) = (x_i(t))$, *можна подати наступним чином.*

(i) Коли $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$*- ермітова, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\mathbf{A}^{k+1}_{j.} \left(\check{\mathbf{b}}_{.i}^{(k)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}} \left| \mathbf{A}^{k+1} \right|_{\alpha}^{\alpha}} + \left(b_{ij} - \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\mathbf{A}^{k+1}_{j.} \left(\check{\mathbf{b}}_{i.}^{(k+1)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}} \left| \mathbf{A}^{k+1} \right|_{\alpha}^{\alpha}} \right) t -$$

$$-\frac{1}{2} \left(\check{b}_{ij}^{(1)} - \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\mathbf{A}^{k+1}_{j.} \left(\check{\mathbf{b}}_{i.}^{(k+2)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}} \left| \mathbf{A}^{k+1} \right|_{\alpha}^{\alpha}} \right) t^2 + \cdots +$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}}{k!} \left(\check{b}_{ij}^{(k-1)} - \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\mathbf{A}^{k+1}_{j.} \left(\check{\mathbf{b}}_{i.}^{(2k)} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}} \left| \mathbf{A}^{k+1} \right|_{\alpha}^{\alpha}} \right) t^k,$$

де $\mathbf{BA}^l =: \check{\mathbf{B}}^{(l)} = \left(\check{b}_{ij}^{(l)}\right)$ *для всіх* $l = 1, \ldots, 2k$.

(ii) Коли $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *- довільна, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,s}(\check{\mathbf{d}}^{(0)})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right)a_{sj}^{(k)}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}} +$$

$$+\left(\bar{b}_{ij}^{(0)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,s}(\check{\mathbf{d}}^{(1)})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right)a_{sj}^{(k)}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}\right)t-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\check{b}_{ij}^{(1)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,s}(\check{\mathbf{d}}^{(2)})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right)a_{sj}^{(k)}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}\right)t^2 + \cdots +$$

$$+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\left(\bar{b}_{ij}^{(k-1)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.\,s}(\check{\mathbf{d}}^{(k)})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right)a_{sj}^{(k)}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,n}}\left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}\right)t^k,$$

де $\mathbf{BA}^{k+l}(\mathbf{A}^{2k+1})^* = \mathbf{BA}^l\check{\mathbf{A}} =: \check{\mathbf{D}}^{(l)} = (\check{d}_{ij}^{(l)}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *для всіх* $l = 0, \ldots, k$.

Доведення. Доведення теореми аналогічне доведенню Теореми 5.9, використовуючи визначникові зображення матриці Дразіна (2.78) для випадку (i) та (2.85) для випадку (ii), відповідно. □

5.1.5. Приклад розв'язку лінійного кватерніонового диференціального матричного рівняння першого степеня. Розглянемо диференціальне матричне рівняння

$$\mathbf{X}' + \mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{5.46}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{k} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{k} & 2 & \mathbf{j} \\ \mathbf{i} & -\mathbf{j} & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -\mathbf{k} & \mathbf{j} \\ 1 & 0 & \mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{A}$ є ермітовою. З того, що

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}3 & 4\mathbf{k} & -3\mathbf{i}\\ -4\mathbf{k} & 6 & 4\mathbf{j}\\ 3\mathbf{i} & -4\mathbf{j} & 3\end{bmatrix}, \det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}^2=0,$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & \mathbf{k}\\ -\mathbf{k} & 2\end{bmatrix}=1, \det\begin{bmatrix}3 & 4\mathbf{k}\\ -4\mathbf{k} & 6\end{bmatrix}=2,$$

випливає, що $\operatorname{Ind}\mathbf{A}=1$ і $r_1=\operatorname{rank}\mathbf{A}=2$. Тоді розв'язок $\mathbf{X}\in\mathbb{H}^{3\times 3}$ рівняння (5.46) будемо шукати за формулою (5.43) як

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^2_{.i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}}\left|\left(\mathbf{A}^2\right)^{\beta}_{\beta}\right|}+\left(b_{ij}-\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^2_{.i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(2)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}}\left|\left(\mathbf{A}^2\right)^{\beta}_{\beta}\right|}\right)t$$

для всіх $i,j=1,2,3$. Маємо $\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}}\left|\left(\mathbf{A}^2\right)^{\beta}_{\beta}\right|=4$,

$$\widehat{\mathbf{B}}^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathbf{k} & 1+\mathbf{j} & 1-\mathbf{i}+\mathbf{k}\\ 2 & \mathbf{i}-2\mathbf{k} & 1+2\mathbf{j}-\mathbf{k}\\ -\mathbf{j} & \mathbf{i}+\mathbf{k} & 1+\mathbf{i}-\mathbf{j}\end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{B}}^{(2)}=\begin{bmatrix}4\mathbf{k} & 4+3\mathbf{j} & 3-4\mathbf{i}+3\mathbf{k}\\ 6 & 4\mathbf{i}-6\mathbf{k} & 4+6\mathbf{j}-4\mathbf{k}\\ -4\mathbf{j} & 4\mathbf{i}+3\mathbf{k} & 4+3\mathbf{i}-3\mathbf{j}\end{bmatrix}.$$

Тоді,

$$x_{11}=\frac{1}{4}\left(\operatorname{cdet}_1\begin{bmatrix}\mathbf{k} & 4\mathbf{k}\\ 2 & 6\end{bmatrix}+\operatorname{cdet}_1\begin{bmatrix}\mathbf{k} & -3\mathbf{i}\\ -\mathbf{j} & 3\end{bmatrix}\right)+\left(\mathbf{i}-\frac{1}{4}\left(\operatorname{cdet}_1\begin{bmatrix}4\mathbf{k} & 4\mathbf{k}\\ 6 & 6\end{bmatrix}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\operatorname{cdet}_1\begin{bmatrix}4\mathbf{k} & -3\mathbf{i}\\ -4\mathbf{j} & 3\end{bmatrix}\right)\right)t=\frac{1}{4}(-2\mathbf{k})+\left(\mathbf{i}-\frac{1}{4}\left[0\right]\right)t=-0.5\mathbf{k}+\mathbf{i}t.$$

Продовжуючи аналогічним чином, одержимо

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-0.5\mathbf{k}+\mathbf{i}t & -0.5+0.5\mathbf{j}+0.5\mathbf{j}t & 0.5+0.5\mathbf{i}+0.5\mathbf{k}+(-0.5-4.5\mathbf{k})\,t\\ 1+(1+\mathbf{k})t & -0.5\mathbf{i}-\mathbf{k} & -0.5+\mathbf{j}+0.5\mathbf{k}\\ 0.5\mathbf{j}+t & -0.5\mathbf{i}+0.5\mathbf{k}-0.5\mathbf{k}t & -0.5+0.5\mathbf{i}-0.5\mathbf{j}+(0.5\mathbf{i}-0.5\mathbf{j})t\end{bmatrix}$$

5.2. Визначникові зображення зваженої Мура-Пенроуза узагальнен обернених розв'язків кватерніонових матричних рівнянь.

5.2.1. Визначникове зображення зваженого Мура-Пенроуза розв'язку систем лінійних рівнянь. У цьому пункті на прикладі систем лінійних рівнянь дамо характеризацією зваженого Мура-Пенроуза розв'язку та його визначникове зображення.

Розглянемо праву систему лінійних рівнянь над тілом кватерніонів,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{5.47}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ – матриця кватерніонових коефіцієнтів, $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^{m\times 1}$ – стовпець відомих і $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n\times 1}$ – стовпець невідомих. Слідуючи за [222], розглянемо теорему, що характеризує зважений Мура-Пенроуза розв'язок системи (5.47).

Теорема 5.11. *[222] Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, а матриці $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ є додатноозначеними порядків m і n відповідно. Права система лінійних рівнянь (5.47) з обмеженням $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_r(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M})$ має єдиний розв'язок*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}\mathbf{b}. \tag{5.48}$$

Позначимо $\mathbf{A}^{\sharp} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$.

Визначникові зображення розв'язку (5.48) розглядаємо в залежності від рангу матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та від того, чи є вона ермітовою.

Теорема 5.12. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ і $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – ермітова.*

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = k \le m < n$, тоді розв'язок (5.48), $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, має визначникове зображення

$$x_i = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}(\mathbf{f})\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}}, \tag{5.49}$$

де $\mathbf{f} = \mathbf{A}^{\sharp}\,\mathbf{b}$ для всіх $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$*, тоді для всіх* $i = 1, \ldots, n$ *маємо*

$$x_i = \frac{\operatorname{cdet}_i \left(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}\right)_{.i} (\mathbf{f})}{\det \left(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}\right)}. \tag{5.50}$$

Доведення. (i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = k \leq m < n$, тоді за Теоремою 2.7 зважену узагальнену обернену матрицю Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$ подамо за формулою (2.55). Звідси, покомпонентно для розв'язку (5.48) маємо

$$x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}\right)_{.\,i} \left(\mathbf{a}^\sharp_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}} \cdot b_j = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}\right)_{.\,i} (\mathbf{f})\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta}},$$

де $\mathbf{f} = \mathbf{A}^\sharp \mathbf{b}$ для всіх $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, тоді $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$ може бути подана як (2.58). Звідси, представляючи $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}$ покомпонентно, одержимо (5.50). □

Теорема 5.13. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *не є ермітовою.*

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = k \leq m < n$*, тоді розв'язок (5.48),* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$*, має визначникове зображення*

$$x_i = \frac{\sum\limits_{k} n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_k \left(\left(\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right)_{.\,k} \left(\hat{\mathbf{f}}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\right|^{\beta}_{\beta}},$$

де $\hat{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}^* \mathbf{M}\right) \mathbf{b}$ *і* $n_{ik}^{(-\frac{1}{2})}$ *є* (ik)*-м елементом матриці* $\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}$ *для всіх* $i, k = 1, \ldots, n$*.*

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$*, тоді для всіх* $i = 1, \ldots, n$ *маємо*

$$x_i = \frac{\operatorname{cdet}_i (\mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{A})_{.i} \left(\check{\mathbf{f}}\right)}{\det (\mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{A})}.$$

де $\check{\mathbf{f}} = \mathbf{A}^* \mathbf{M}\, \mathbf{b}$ *для всіх* $j = 1, \ldots, m$*.*

Доведення. Доведення подібне до доведення Теореми 5.12, використовуючи покомпонентне визначникове зображення $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$ за формулою (2.64) у випадку (i), та (2.66) у випадку (ii), відповідно. □

Тепер, розглянемо ліву систему лінійних рівнянь над тілом кватерніонів,

$$\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{b}, \tag{5.51}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ – матриця коефіцієнтів, $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^{1\times n}$ – рядок відомих значень, і $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{1\times m}$ – невідомий вектор-рядок. Наступна теорема характеризує зважений Мура-Пенроуза розв'язок системи (5.51).

Теорема 5.14. *Ліва система лінійних рівнянь (5.51) з обмеженням $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^\sharp)$ має єдиний розв'язок*

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}. \tag{5.52}$$

Теорема 5.15. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ і $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp \in \mathbb{H}^{m\times m}$ є ермітовою.*

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = k \le n < m$, тоді визначникове зображення розв'язку (5.52), $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, має вигляд

$$\tilde{x}_j = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{j\,.}(\mathbf{g}) \right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\mathbf{g} = \mathbf{b}\,\mathbf{A}^\sharp$ для всіх $j = 1, \ldots, m$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, тоді для всіх $j = 1, \ldots, m$ маємо

$$x_j = \frac{\operatorname{rdet}_j \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp\right)_{j.}(\mathbf{g})}{\det \mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp}.$$

Доведення. Доведення подібне до доведенню Теореми 5.12, використовуючи визначникове зображення (2.56) матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ у випадку (i), та (2.59) у випадку (ii), відповідно. □

Теорема 5.16. *Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ і матриця $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp \in \mathbb{H}^{m\times m}$ не є ермітовою.*

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = k \le n < m$, тоді визначниковим зображенням розв'язку (5.52), $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, є

$$x_j = \frac{\sum\limits_{l} \sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{l\}} \operatorname{rdet}_l \left(\left(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\right)_{l.}(\hat{\mathbf{g}}) \right)^{\alpha}_{\alpha} m^{(\frac{1}{2})}_{lj}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\right|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{b}\left(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\right)$, $m_{lj}^{(\frac{1}{2})}$ *is* (lj)*-им елементом матриці* $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$ *для всіх* $l, j = 1, \ldots, m$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$*, тоді для всіх* $j = 1, \ldots, m$*, маємо*

$$\tilde{x}_j = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*)_{j.}\,\check{\mathbf{g}}}{\det(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*)}.$$

де $\check{\mathbf{g}} = \mathbf{b}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*$.

Доведення. Доведення подібне до доведенню Теореми 5.12, використовуючи визначникове зображення (2.67) матриці $\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}$ у випадку (i), та (2.69) – у випадку (ii), відповідно. □

5.2.2. Правила Крамера зваженого Мура-Пенроуза розв'язку двостороннього кватерніонового матричного рівняння з обмеженнями. Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{p\times q}$. Ведемо позначення

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_r(\mathbf{A},\mathbf{B}) &:= \mathcal{C}_r(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} : \mathbf{X}^{n\times q}\},\\
\mathcal{N}_r(\mathbf{A},\mathbf{B}) &:= \mathcal{N}_r(\mathbf{X}) = \{\mathbf{X}^{n\times p} : \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{0}\},\\
\mathcal{R}_l(\mathbf{A},\mathbf{B}) &:= \mathcal{R}_l(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} : \mathbf{X}^{n\times q}\},\\
\mathcal{N}_l(\mathbf{A},\mathbf{B}) &:= \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) = \{\mathbf{X}^{n\times p} : \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{0}\}.
\end{aligned}$$

Лема 5.4. *[224] Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{r_2}^{p\times q}$*, а матриці* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ *і* $\mathbf{Q}$ *є додатноозначеними порядків* m, n, p *і* q*, відповідно. Позначимо* $\mathbf{A}^\sharp = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$ *and* $\mathbf{B}^\sharp = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}$*. Якщо* $\mathbf{D} \subset \mathcal{C}_r\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp, \mathbf{B}^\sharp\mathbf{B}\right)$ *і* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_l\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)$ *для двостороннього рівняння з обмеженнями*

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{D}, \tag{5.53}$$

$$\mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathbf{N}^{-1}\mathcal{C}_r(\mathbf{A}^*),\ \mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathbf{P}^{-1}\mathcal{N}_r(\mathbf{B}^*), \tag{5.54}$$

$$\mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^*)\mathbf{M},\ \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l(\mathbf{B}^*)\mathbf{Q} \tag{5.55}$$

тоді єдиним розв'язком рівняння (5.53) з обмеженнями (5.54)-(5.55) є

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}_{P,Q}^{\dagger}. \tag{5.56}$$

У цьому підрозділі, ми виведемо визначникові зображення розв'язку (5.56), використовуючи визначникові зображення зваженої кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. Розглянемо різні випадки в залежності від того, чи матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}$ є ермітовими чи ні.

Випадок, коли обидві матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}$ є ермітовими.

Теорема 5.17. *Нехай $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}$ – ермітові. Позначимо $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\sharp}$. Тоді розв'язок (5.56) має наступні визначникові зображення.*

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^{B}_{.\,j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right|^{\alpha}_{\alpha}} = \tag{5.57}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^{A}_{i\,.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{5.58}$$

де

$$\mathbf{d}^{B}_{.\,j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{k.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{5.59}$$

$$\mathbf{d}^{A}_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.\,l}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}, \quad l = 1,\ldots,p. \tag{5.60}$$

Тут $\tilde{\mathbf{d}}_{\,k\,.}$ і $\tilde{\mathbf{d}}_{\,.\,l}$ – k-й рядок і l-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{D}}$ для всіх $k = 1,\ldots,n$, $l = 1,\ldots,p$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}^{B}_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp})} = \tag{5.61}$$

$$= \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp})_{j.}\left(\mathbf{d}^{A}_{i\,.}\right)}{\det(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp})}, \tag{5.62}$$

де

$$\mathbf{d}^{B}_{.j} := \left[\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp})_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{k\,.}\right)\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{5.63}$$

$$\mathbf{d}^{A}_{i\,.} := \left[\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.\,l}\right)\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}, \quad l = 1,\ldots,p. \tag{5.64}$$

(iii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$*, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}|\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|^\alpha_\alpha} = \tag{5.65}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}|\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|^\alpha_\alpha}, \tag{5.66}$$

де $\mathbf{d}^B_{.j}$ *є (5.59) і* $\mathbf{d}^A_{i.}$ *знаходиться за формулою (5.64).*

(iv) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$*, тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|^\beta_\beta\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)} = \tag{5.67}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|^\beta_\beta\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)}, \tag{5.68}$$

де $\mathbf{d}^B_{.j}$ *є (5.63) і* $\mathbf{d}^A_{i.}$ *визначається формулою (5.60).*

Доведення. (i) Якщо $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{p\times q}_{r_2}$ і $r_1 < n$, $r_2 < p$, тоді за Теоремою 2.7 матриці $\mathbf{A}^\dagger = \left(a^\ddagger_{ij}\right)\in\mathbb{H}^{n\times m}$ і $\mathbf{B}^\dagger = \left(b^\ddagger_{ij}\right)\in\mathbb{H}^{q\times p}$ мають, відповідно, визначникові зображення

$$a^\ddagger_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}^\sharp_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|^\beta_\beta}, \tag{5.69}$$

$$b^\ddagger_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j\,.}(\mathbf{b}^\sharp_{i.})\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}|\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|^\alpha_\alpha}. \tag{5.70}$$

За Лемою 5.4, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\dagger_{M,N}\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger_{P,Q}$ і елементи матриці $\mathbf{X} = (x_{ij})$ є

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}a^\ddagger_{ik}d_{ks}b^\ddagger_{sj}. \tag{5.71}$$

Нехай $\mathbf{e}_{s.}$ і $\mathbf{e}_{.\,s}$ є одиничними вектор-рядком і вектор-стовпцем, відповідно. Підставивши (5.69) і (5.70) у рівняння (5.71), одержимо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{p}\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}(\mathbf{e}_{.\,l})\right)_\beta^\beta \widetilde{d}_{lt} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j\,.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}} |\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|_\alpha^\alpha}, \tag{5.72}$$

де $\widetilde{d}_{lt}$ – (lt)-й елемент матриці $\widetilde{\mathbf{D}}$. Позначимо

$$d_{it}^A := \sum_{l=1}^{n}\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}(\mathbf{e}_{.l})\right)_\beta^\beta \widetilde{d}_{lt} = \sum_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.t}\right)\right)_\beta^\beta$$

як t-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{d}_{i.}^A = \left[d_{i1}^A, ..., d_{ip}^A\right]$ для всіх $t = 1, \ldots, p$. Підставивши її у (5.72), маємо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{p} d_{it}^A \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j\,.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}} |\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|_\alpha^\alpha}.$$

В силу того, що $\sum\limits_{t=1}^{p} d_{it}^A \mathbf{e}_{t.} = \mathbf{d}_{i\,.}^A$, звідси випливає (5.58).

Якщо ж введемо

$$d_{lj}^B := \sum_{t=1}^{p} \widetilde{d}_{lt} \sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j\,.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j\,.}(\widetilde{\mathbf{d}}_{l.})\right)_\alpha^\alpha$$

як l-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{d}_{.j}^B = \left[d_{1j}^B, ..., d_{jn}^B\right]^T$ для всіх $l = 1, \ldots, n$ і підставимо її у (5.72), тоді одержимо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}(\mathbf{e}_{.\,l})\right)_\beta^\beta d_{lj}^B}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}} |\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp|_\alpha^\alpha}.$$

Оскільки, $\sum\limits_{l=1}^{n} \mathbf{e}_{.l} d_{lj}^B = \mathbf{d}_{.j}^B$, то звідси слідує (5.57).

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ і $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, то за Теоремою 2.7 матриці $\mathbf{A}_{M,N}^\dagger = \left(a_{ij}^\ddagger\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ і $\mathbf{B}_{P,Q}^\dagger = \left(b_{ij}^\ddagger\right) \in \mathbb{H}^{q\times p}$ мають визначникові зображення

$$a_{ij}^{\ddagger} = \frac{\mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.\,j}^{\sharp}\right)}{\det(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})}, \tag{5.73}$$

$$b_{ij}^{\ddagger} = \frac{\mathrm{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp})_{j.}\left(\mathbf{b}_{i.}^{\sharp}\right)}{\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp})}. \tag{5.74}$$

Підставивши їх у (5.71), одержимо (5.61) та (5.62).

(iii) Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{r_2}^{p\times q}$ і $r_1 = n$, $r_2 < p$, тоді для матриць $\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}$ і $\mathbf{B}_{P,Q}^{\dagger}$ визначникові зображення (5.73) і (5.70), відповідно, є більш застосовними. Підставивши їх у (5.71) аналогічно до попереднього, одержимо визначникові зображення (5.65) і (5.66).

(iv) У цьому випадку для матриць $\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}$ і $\mathbf{B}_{P,Q}^{\dagger}$ використаємо визначникові зображення (5.69) та (5.74), відповідно. $\square$

Наслідок 5.5. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{m\times p}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *є додатноозначеними матрицями порядку* m *і* n, *відповідно, і* $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ *– ермітова. Позначимо* $\widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{D}$. *Якщо* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})$ *і* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})$, *і для рівняння*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}, \tag{5.75}$$

виконуються умови

$$\mathcal{R}_r(\mathbf{X}) \subset \mathbf{N}^{-1}\mathcal{R}_r(\mathbf{A}^*),\ \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^*)\mathbf{M}, \tag{5.76}$$

тоді єдиним розв'язком рівняння (5.75) з обмеженнями (5.76) є

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}\mathbf{D}$$

який має наступні визначникові зображення.

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.\,j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\widehat{\mathbf{d}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{D}}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$, *тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})}.$$

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з доведення Теореми 5.17 поклавши матриці $\mathbf{B}$, $\mathbf{P}$ і $\mathbf{Q}$ одиничними. □

Наслідок 5.6. *Нехай* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{p\times q}_{r_2}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times q}$, $\mathbf{P}$ *і* $\mathbf{Q}$ *є додатноозначеними матрицями порядку* p *і* q, *відповідно, а матриця* $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}$ *– ермітова. Позначимо* $\check{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{B}^{\sharp}$. *Якщо* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{B}^{\sharp}\mathbf{B})$ *і* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp})$ *для рівнянні*

$$\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{D}, \tag{5.77}$$

$$\mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathbf{P}^{-1}\mathcal{N}_r(\mathbf{B}^*), \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l(\mathbf{B}^*)\mathbf{Q}, \tag{5.78}$$

тоді єдиним розв'язком рівняння (5.77) з обмеженнями (5.78) є

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}_{P,Q},$$

котрий має наступні визначникові зображення.

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right)_{j\,.}\left(\check{\mathbf{d}}_{i\,.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\check{\mathbf{d}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\check{\mathbf{D}}$ *для всіх* $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,p$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{rdet}_j\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right)_{j.}\left(\check{\mathbf{d}}_{i.}\right)}{\det\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right)}.$$

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з доведення Теореми 5.17 поклавши матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ одиничними. □

Випадок обох неермітових матриць $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}$. Позначимо

$$\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} = (\widetilde{a}_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times n}, \widetilde{\mathbf{B}} := \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} = \left(\widetilde{b}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{p\times q}.$$

Тоді $\widetilde{\mathbf{A}}^* = \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$ і $\widetilde{\mathbf{B}}^* = \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}^*\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 5.18. *Нехай матриці* $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ *і* $\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp$ *будуть обидві неермітові. Тоді розв'язок (5.56) має наступні визначникові зображення.*

(i) Нехай $\widetilde{\mathbf{D}} := \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} = (\widetilde{d}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times p}$. *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_k n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{k\}} \operatorname{cdet}_k\left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.\,k}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^\alpha_\alpha} = \tag{5.79}$$

$$= \frac{\sum\limits_l \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{l\}} \operatorname{rdet}_l\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^\alpha_\alpha \cdot p_{lj}^{(\frac{1}{2})}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^\alpha_\alpha}, \tag{5.80}$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} = \left[\sum_l \sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{l\}} \operatorname{rdet}_l\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{t.}\right)\right)^\alpha_\alpha \cdot p_{lj}^{(\frac{1}{2})}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \tag{5.81}$$

$$\mathbf{d}^A_{i.} = \left[\sum_k n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{k\}} \operatorname{cdet}_k\left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.\,k}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.f}\right)\right)^\beta_\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}. \tag{5.82}$$

Тут $\tilde{\mathbf{d}}_{t.}$ *та* $\tilde{\mathbf{d}}_{.f}$ *–* t*-й рядок і* f*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{D}}$ *для всіх* $t = 1, \ldots, n$, $f = 1, \ldots, p$.

(ii) Нехай $\widehat{\mathbf{D}} := \mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^* \in \mathbb{H}^{n\times p}$. *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)}, \tag{5.83}$$

$$= \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)}, \tag{5.84}$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} := \left[\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{t\,.}\right)\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \tag{5.85}$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} := \left[\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.f}\right)\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}. \tag{5.86}$$

Тут $\widehat{\mathbf{d}}_{t\,.}$ *і* $\widehat{\mathbf{d}}_{.f}$ *–* t*-й рядок і* f*-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{D}}$*, відповідно.*

(iii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B}=r_2<p$*, тоді*

$$x_{ij}=\frac{\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}^{\,B}_{.j}\right)\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}}= \tag{5.87}$$

$$=\frac{\sum\limits_{l}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,\,p}\{l\}}\operatorname{rdet}_l\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}\left(\mathbf{d}^{A}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\cdot p^{(\frac{1}{2})}_{lj}}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{5.88}$$

де $\mathbf{d}^{B}_{.j}$ *є (5.81) і* $\mathbf{d}^{A}_{i.}$ *визначаєтьcя у (5.86).*

(iv) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A}=r_1<n$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{B}=p$*, тоді*

$$x_{i\,j}=\frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}^{A}_{i\,.}\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^{\beta}_{\beta}\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)}= \tag{5.89}$$

$$=\frac{\sum\limits_{k}n^{(-\frac{1}{2})}_{ik}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{k\}}\operatorname{cdet}_k\left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.\,k}\left(\mathbf{d}^{B}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^{\beta}_{\beta}\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)}, \tag{5.90}$$

де $\mathbf{d}^{B}_{.j}$ *визначаєтьcя у (5.85), а* $\mathbf{d}^{A}_{i.}$ *у (5.82).*

Доведення. (i) Якщо матриці $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{p\times q}_{r_2}$ обидві є неермітовими, і $r_1<n$, $r_2<p$, тоді за Теоремою 2.8 матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}=\left(a^{\ddagger}_{ij}\right)\in\mathbb{H}^{n\times m}$ і $\mathbf{B}^{\dagger}_{P,Q}=\left(b^{\ddagger}_{ij}\right)\in\mathbb{H}^{q\times p}$ мають, відповідно, визначникові зображення

$$a^{\ddagger}_{ij}=\frac{\sum\limits_{k}n^{(-\frac{1}{2})}_{ik}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{k\}}\operatorname{cdet}_k\left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.\,k}\left(\widehat{\mathbf{a}}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^{\beta}_{\beta}}, \tag{5.91}$$

де $\widehat{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$;

$$b^{\ddagger}_{ij}=\frac{\sum\limits_{l}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,\,p}\{l\}}\operatorname{rdet}_l\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}\left(\widehat{\mathbf{b}}_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\cdot p^{(\frac{1}{2})}_{lj}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{5.92}$$

де $\widehat{\mathbf{b}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$. За Лемою 5.4, $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}_{P,Q}$ і елементи матриці $\mathbf{X}=(x_{ij})$ виражаються як

$$x_{ij}=\sum_{s=1}^{q}\sum_{t=1}^{m}a^{\ddagger}_{it}d_{ts}b^{\ddagger}_{sj} \tag{5.93}$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$. Нехай $\mathbf{e}_{s.}$ і $\mathbf{e}_{.s}$ є одиничними вектор-рядком та вектор-стовпцем. Підставивши (5.91) і (5.92) у рівняння (5.93), одержимо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{p}\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{k} n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{k\}} \mathrm{cdet}_k \left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.k}(\mathbf{e}_{.f})\right)_{\beta}^{\beta} \widetilde{d}_{ft} \sum\limits_{l} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}\{l\}} \mathrm{rdet}_l \left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha} \cdot p_{lj}^{(\frac{1}{2})}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}} \left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{5.94}$$

Позначивши

$$d_{it}^A := \sum_{f=1}^{n}\sum_{k} n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{k\}} \mathrm{cdet}_k \left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.k}(\mathbf{e}_{.f})\right)_{\beta}^{\beta} \widetilde{d}_{ft} =$$
$$= \sum_{k} n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{k\}} \mathrm{cdet}_k \left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.k}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.t}\right)\right)_{\beta}^{\beta}$$

як t-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{d}_{i.}^A = \left[d_{i1}^A, ..., d_{ip}^A\right]$ для всіх $t = 1, \ldots, p$ та підставивши її у рівняння (5.94), маємо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{p} d_{it}^A \sum\limits_{l} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}\{l\}} \mathrm{rdet}_l \left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha} \cdot p_{lj}^{(\frac{1}{2})}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}} \left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

З того, що $\sum\limits_{t=1}^{p} d_{it}^A \mathbf{e}_{t.} = \mathbf{d}_{i.}^A$, випливає формула (5.80). Якщо позначимо

$$d_{fj}^B := \sum_{t=1}^{p} \widetilde{d}_{ft} \sum_{l} \sum_{\alpha \in I_{r_2,p}\{l\}} \mathrm{rdet}_l \left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}(\mathbf{e}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha} \cdot p_{lj}^{(\frac{1}{2})} =$$
$$= \sum_{l} \sum_{\alpha \in I_{r_2,p}\{l\}} \mathrm{rdet}_l \left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{f.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha} \cdot p_{lj}^{(\frac{1}{2})}$$

як f-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{d}_{.j}^B = \left[d_{1j}^B, \ldots, d_{jn}^B\right]^T$ для всіх $f = 1, \ldots, n$ і підставимо її в (5.94), тоді

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{f=1}^{n}\sum\limits_{k} n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{k\}} \mathrm{cdet}_k \left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.k}(\mathbf{e}_{.f})\right)_{\beta}^{\beta} d_{fj}^B}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}} \left|\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Оскільки, $\sum\limits_{f=1}^{n} \mathbf{e}_{.f} d_{fj}^B = \mathbf{d}_{.j}^B$, то з цього випливає формула (5.79).

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ і $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, тоді за Теоремою 2.8 матриці $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N} = \left(a^{\ddagger}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ і $\mathbf{B}^{\dagger}_{P,Q} = \left(b^{\ddagger}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{q\times p}$ мають визначникові зображення

$$a^{\ddagger}_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.i}\left(\widehat{\mathbf{a}}_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})}, \tag{5.95}$$

$$b^{\ddagger}_{ij} = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}(\widehat{\mathbf{b}}_{i.})}{\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)}. \tag{5.96}$$

де $\widehat{\mathbf{a}}_{.j}$ – j -й стовпець матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{M}$ для всіх $j = 1,\ldots,m$, а $\widehat{\mathbf{b}}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*$ для всіх $i = 1,\ldots,n$. Підставивши їх у рівняння (5.93), одержимо

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{p}\sum\limits_{f=1}^{n}\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{e}_{.f}\right)\widehat{d}_{ft}\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{t.})}{\det\left(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}\right)\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)},$$

де $\mathbf{e}_{.f}$ і $\mathbf{e}_{t.}$ – одиничні вектор-рядок і вектор-стовпець, а $\widehat{d}_{ft}$ – (ft)-й елемент матриці $\widehat{\mathbf{D}} := \mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*$. Введемо

$$d^{A}_{it} := \operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.i}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.t}\right)$$

як t-у компоненту вектор-рядка $\mathbf{d}^{A}_{i.} = \left[d^{A}_{i1},...,d^{A}_{ip}\right]$ для всіх $t = 1,\ldots,p$. Підставивши її в рівняння (5.94), звідси випливає (5.83).

Аналогічно одержимо (5.84).

(iii) Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{p\times q}_{r_2}$ і $r_1 = n$, $r_2 < p$, тоді для матриць $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ і $\mathbf{B}^{\dagger}_{P,Q}$ визначникові зображення (5.95) і (5.91), відповідно, є більш застосовними. Підставивши їх у рівняння (5.93) аналогічно попередньому, одержимо визначникові зображення (5.87) і (5.88).

(iv) У цьому випадку для $\mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}$ і $\mathbf{B}^{\dagger}_{P,Q}$, використаємо визначникові зображення (5.91) і (5.96), відповідно. $\square$

Наслідок 5.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{m\times p}$, *і матриці* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *є додатноозначеними порядку* m *і* n, *відповідно, а матриця* $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ *не є ермітовою. Якщо* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})$ *і* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A})$, *тоді єдиний розв'язок* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}_{M,N}\mathbf{D}$ *рівняння* $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}$ *з обмеженням (5.76) має визначникові зображення:*

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$*, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{k} n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_k \left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^* \widetilde{\mathbf{A}} \right)_{.\,k} \left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}} \left| \widetilde{\mathbf{A}}^* \widetilde{\mathbf{A}} \right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\widetilde{\mathbf{d}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{D}$ *для всіх* $j = 1, \ldots, p$*.*

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$*, тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{cdet}_i \left(\mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{A} \right)_{.\,i} \left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j} \right)}{\det \left(\mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{A} \right)},$$

де $\widehat{\mathbf{d}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^* \mathbf{M} \mathbf{D}$*.*

Доведення. Доведення, очевидно, випливає з Теореми 5.18, коли матриці $\mathbf{B}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ покладемо як одиничні. □

Наслідок 5.8. *Нехай* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{r_2}^{p \times q}$*,* $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n \times q}$*, і матриці* $\mathbf{P}$ *та* $\mathbf{Q}$ *є додатноозначеними порядку* p *і* q*, відповідно, а* $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}$ *не є ермітовою. Якщо* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{B}^{\sharp}\mathbf{B})$ *і* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp})$*, тоді єдиний розв'язок* $\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{P,Q}^{\dagger}$ *рівняння* $\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{D}$ *з обмеженням (5.78) має наступні визначникові зображення.*

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$*, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{l} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,q}\{l\}} \operatorname{rdet}_l \left(\left(\widetilde{\mathbf{B}} \widetilde{\mathbf{B}}^* \right)_{l\,.} \left(\widetilde{\mathbf{d}}_{i\,.} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} p_{lj}^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,q}} \left| \widetilde{\mathbf{B}} \widetilde{\mathbf{B}}^* \right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\widetilde{\mathbf{d}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$ *та* $p_{lj}^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ *–* (lj)*-ий елемент матриці* $\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$*.*

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$*, тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{rdet}_j \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^* \right)_{j.} \left(\widehat{\mathbf{d}}_{i.} \right)}{\det \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^* \right)}, \tag{5.97}$$

де $\widehat{\mathbf{d}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*$*.*

Доведення. Доведення, очевидно, випливає з Теореми 5.18, коли матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$ покладемо як одиничні. □

Змішані випадки. У цьому пункті розглянемо змішані випадки, коли з пари матриць $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp$ лише одна є ермітовою. Оскільки їх доведення аналогічні до доведенню Теорем 5.17 і 5.18, то розглянемо ці теореми без доведень.

Теорема 5.19. *Нехай матриця* $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ *– ермітова, а* $\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp$ *не є ермітовою. Позначимо* $\widetilde{\mathbf{B}} := \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{H}^{p\times q}$. *Тоді розв'язок (5.56) має наступні визначникові зображення.*

(i) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^\alpha_\alpha} = \\ = \frac{\sum\limits_{l}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{l\}} \operatorname{rdet}_l\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^\alpha_\alpha \cdot p^{(\frac{1}{2})}_{lj}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}} \left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^\alpha_\alpha},$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} = \left[\sum_{l}\sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{l\}} \operatorname{rdet}_l\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{t.}\right)\right)^\alpha_\alpha \cdot p^{(\frac{1}{2})}_{lj}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \tag{5.98}$$

$$\mathbf{d}^A_{i.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.f}\right)\right)^\beta_\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}. \tag{5.99}$$

Тут $\widetilde{\mathbf{d}}_{t.}$ *і* $\widetilde{\mathbf{d}}_{.f}$ *–* t*-й рядок і* f*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{D}} := \mathbf{A}^\sharp\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$ *для всіх* $t = 1,\ldots,n$, $f = 1,\ldots,p$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})_{.i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)} = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)},$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} := \left[\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{t.}\right)\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \tag{5.100}$$

$$\mathbf{d}^A_{i.} := \left[\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})_{.i}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.f}\right)\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}. \tag{5.101}$$

Тут $\widehat{\mathbf{d}}_{t.}$, $\tilde{\mathbf{d}}_{.f}$ *–* t*-й рядок і* f*-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^\sharp\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*$.

(iii) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *and* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^{\,B}_{.j}\right)\right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^\alpha_\alpha} = \frac{\sum\limits_l\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,\,p}\{l\}}\operatorname{rdet}_l\left(\left(\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right)_{l.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^\alpha_\alpha\cdot m^{(\frac{1}{2})}_{lj}}{\det(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{B}}^*\right|^\alpha_\alpha},$$

де $\mathbf{d}^B_{.j}$ *визначаєтьcя у (5.98) і* $\mathbf{d}^A_{i.}$ *є (5.101).*

(iv) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right|^\beta_\beta\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.\,j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right|^\beta_\beta\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)},$$

де $\mathbf{d}^B_{.j}$ *є (5.100) і* $\mathbf{d}^A_{i.}$ *– (5.99).*

Теорема 5.20. *Нехай* $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ *не є ермітовою, а* $\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp$ *– ермітова. Позначимо* $\widetilde{\mathbf{A}} := \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. *Тоді розв'язок (5.56) має визначникові зображення.*

(i) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_k n^{(-\frac{1}{2})}_{ik}\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{k\}}\operatorname{cdet}_k\left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.\,k}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^\beta_\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right|^\alpha_\alpha} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^\beta_\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right|^\alpha_\alpha},$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j\,.}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{t\,.}\right)\right)^\alpha_\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \tag{5.102}$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} = \left[\sum_k n^{(-\frac{1}{2})}_{ik}\sum_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{k\}}\operatorname{cdet}_k\left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.\,k}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.f}\right)\right)^\beta_\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}. \tag{5.103}$$

Тут $\widetilde{\mathbf{d}}_{t.}$ *і* $\widetilde{\mathbf{d}}_{.f}$ *–* t*-й рядок і* f*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{D}} := \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{B}^\sharp$ *для всіх* $t = 1,\ldots,n$, $f = 1,\ldots,p$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})\cdot\det\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)} = \frac{\operatorname{rdet}_j\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})\cdot\det\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)},$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} := \left[\operatorname{rdet}_j\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j.}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{t\,.}\right)\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \tag{5.104}$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} := \left[\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.f}\right)\right] \in \mathbb{H}^{1\times p}. \tag{5.105}$$

Тут $\widehat{\mathbf{d}}_{t\,.}$, $\widehat{\mathbf{d}}_{.f}$ *– t-й рядок і f-й стовпець матриці* $\widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{B}^\sharp$.

(iii) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r_2 < p$, *тоді*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right|^\alpha_\alpha} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\det(\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A})\cdot\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right|^\alpha_\alpha},$$

де $\mathbf{d}^B_{.j}$ *із (5.102) і* $\mathbf{d}^A_{i.}$ *із (5.105).*

(iv) Якщо $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B} = p$, *тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{rdet}_j\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^\beta_\beta\cdot\det\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp\right)} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^\beta_\beta\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)},$$

де $\mathbf{d}^B_{.j}$ *є (5.104) і* $\mathbf{d}^A_{i.}$ *визначається у (5.103).*

5.2.3. Приклад правила Крамера двостороннього матричного рівняння з обмеженнями.

Розглянемо матричне рівняння з обмеженнями

$$\begin{gathered}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{D},\\ \mathcal{R}_r(\mathbf{X}) \subset \mathbf{N}^{-1}\mathcal{R}_r(\mathbf{A}^*),\ \mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathbf{P}^{-1}\mathcal{N}_r(\mathbf{B}^*),\\ \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^*)\mathbf{M},\ \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l(\mathbf{B}^*)\mathbf{Q}\end{gathered} \tag{5.106}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{k} & -\mathbf{j} & \mathbf{j}\\ 1 & 0 & \mathbf{k}\end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix}5 & 0 & -4\mathbf{j}\\ 0 & 4 & 0\\ 4\mathbf{j} & 0 & 5\end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix}5 & 4\mathbf{k}\\ -4\mathbf{k} & 5\end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix}\mathbf{i} & -\mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\mathbf{k} & 0 & \mathbf{j}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{k} & -\mathbf{j} & \mathbf{j}\\ 0 & 1 & \mathbf{i}\end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix}1 & \mathbf{i} & 0\\ -\mathbf{i} & 2 & -\mathbf{j}\\ 0 & \mathbf{j} & 2\end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix}2.5 & -1.5\mathbf{j}\\ 1.5\mathbf{j} & 2.5\end{bmatrix}.$$

Оскільки,

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & 1 \\ \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{j} & -\mathbf{k} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & 0 \\ \mathbf{j} & 1 \\ -\mathbf{j} & -\mathbf{i} \end{bmatrix},$$

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \det \begin{bmatrix} 3 & -\mathbf{i}+\mathbf{k} \\ \mathbf{i}-\mathbf{k} & 2 \end{bmatrix} = 4, \ \det(\mathbf{B}\mathbf{B}^*) = \det \begin{bmatrix} 3 & -\mathbf{j}+\mathbf{k} \\ \mathbf{j}-\mathbf{k} & 2 \end{bmatrix} = 4,$$

тоді $\mathrm{rank}\mathbf{A} = \mathrm{rank}\mathbf{B} = 2$.

За Теоремою 1.4 про обернені для ермітових матриць, маємо

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -4\mathbf{i} & -3\mathbf{k} \\ 4\mathbf{i} & 5 & 3\mathbf{j} \\ 3\mathbf{k} & -3\mathbf{j} & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9}\mathbf{j} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{4}{9}\mathbf{j} & 0 & \frac{5}{9} \end{bmatrix}.$$

Неважко перевірити, що обидві матриці $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp = \mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}$ не є ермітовими. Отже, будемо шукати розв'язок рівняння (5.106) за формулою (5.89). Тоді,

$$x_{i\,j} = \frac{\mathrm{rdet}_j(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}} \left|\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right|^\beta_\beta \cdot \det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)}, \ i = 1,2,3, \ \ j = 1,2, \tag{5.107}$$

де $\mathbf{d}^A_{i\,.}$ знаходимо за формулою (5.82), а саме

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} = \left[\sum_k n_{ik}^{(-\frac{1}{2})} \sum_{\beta\in J_{2,\,3}\{k\}} \mathrm{cdet}_k \left(\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_{.\,k}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.f}\right)\right)^\beta_\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times 2}. \tag{5.108}$$

Щоб отримати $\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}$, спочатку знайдемо власні значення матриці $\mathbf{N}$, котрі є коренями характеристичного многочлена

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-5 & 0 & 4\mathbf{j} \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ -4\mathbf{j} & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 14\lambda^2 + 49\lambda - 36 \ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 4, \\ \lambda_3 = 9. \end{cases}$$

Обчисливши пов'язані власні вектори, після їх ортонормалізації отримуємо унітарну матрицю $\mathbf{U}$ стовпці якого є власними векторами матриці $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.5 - 0.5\mathbf{j} & 0 & 0.5 + 0.5\mathbf{j} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 + 0.5\mathbf{j} & 0 & 0.5 - 0.5\mathbf{j} \end{bmatrix}.$$

Отже,

$$\mathbf{N}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{U}^*\mathbf{D}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\mathbf{j} \\ 0 & 2 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$ є діагональною матрицею з $1, 2, 3$ на головній діагоналі. Тоді за Теоремою 1.4,

$$\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\mathbf{j} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3}\mathbf{j} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 3 \end{bmatrix}$. Далі, шукаємо

$$\widetilde{\mathbf{D}} := \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^*\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{6} + \frac{125}{3}\mathbf{i} + \frac{143}{6}\mathbf{j} - \frac{187}{3}\mathbf{k} & \frac{47}{2} - \frac{133}{3}\mathbf{i} + \frac{61}{6}\mathbf{j} - \frac{67}{3}\mathbf{k} \\ \frac{15}{2} + \frac{43}{2}\mathbf{i} + \frac{13}{2}\mathbf{j} - \frac{33}{2}\mathbf{k} & \frac{15}{2} + \frac{19}{2}\mathbf{i} - \frac{17}{2}\mathbf{j} - \frac{29}{2}\mathbf{k} \\ \frac{35}{3} + \frac{289}{6}\mathbf{i} - \frac{101}{3}\mathbf{j} + \frac{149}{6}\mathbf{k} & -\frac{47}{3} + \frac{79}{6}\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - \frac{235}{6}\mathbf{k} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k} & -\mathbf{i} & -\frac{2}{3} - \mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{k} \\ 2 + \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{k} & \frac{1}{2}\mathbf{j} & \frac{2}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{82}{9} & -\frac{5}{6}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} & 3\mathbf{i} + \frac{56}{9}\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ \frac{5}{6}\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} - \frac{4}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{k} \\ -3\mathbf{i} - \frac{56}{9}\mathbf{j} - 3\mathbf{k} & \frac{3}{2} + \frac{4}{3}\mathbf{i} - \frac{5}{3}\mathbf{k} & \frac{58}{9} \end{bmatrix}.$$

$$\sum_{\beta\in J_{2,3}}\left|\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_\beta^\beta\right| = \det\begin{bmatrix}\frac{82}{9} & -\frac{5}{6}\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\\ \frac{5}{6}\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}+$$

$$\det\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{2}-\frac{4}{3}\mathbf{i}+\frac{5}{3}\mathbf{k}\\ \frac{3}{2}+\frac{4}{3}\mathbf{i}-\frac{5}{3}\mathbf{k} & \frac{58}{9}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}\frac{82}{9} & 3\mathbf{i}+\frac{56}{9}\mathbf{j}+3\mathbf{k}\\ -3\mathbf{i}-\frac{56}{9}\mathbf{j}-3\mathbf{k} & \frac{58}{9}\end{bmatrix}=$$

$$\frac{5}{4}+\frac{5}{4}+2=4.5,$$

$$\det\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*\right)=\det\begin{bmatrix}10 & 1-2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}\\ 1+2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k} & 3\end{bmatrix}=8.$$

Тепер знайдемо компоненти вектор-рядка (5.108), $\mathbf{d}^A_{1.}=\left[d^A_{11},d^A_{12}\right]$,

$$d^A_{11}=\frac{2}{3}\left(\mathrm{cdet}_1\begin{bmatrix}-\frac{7}{6}+\frac{125}{3}\mathbf{i}+\frac{143}{6}\mathbf{j}-\frac{187}{3}\mathbf{k} & -\frac{5}{6}\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\\ \frac{15}{2}+\frac{43}{2}\mathbf{i}+\frac{13}{2}\mathbf{j}-\frac{33}{2}\mathbf{k} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.\mathrm{cdet}_1\begin{bmatrix}-\frac{7}{6}+\frac{125}{3}\mathbf{i}+\frac{143}{6}\mathbf{j}-\frac{187}{3}\mathbf{k} & 3\mathbf{i}+\frac{56}{9}\mathbf{j}+3\mathbf{k}\\ \frac{35}{3}+\frac{289}{6}\mathbf{i}-\frac{101}{3}\mathbf{j}+\frac{149}{6}\mathbf{k} & \frac{58}{9}\end{bmatrix}\right)-$$

$$\frac{1}{3}\mathbf{j}\left(\mathrm{cdet}_2\begin{bmatrix}\frac{82}{9} & -\frac{7}{6}+\frac{125}{3}\mathbf{i}+\frac{143}{6}\mathbf{j}-\frac{187}{3}\mathbf{k}\\ -3\mathbf{i}-\frac{56}{9}\mathbf{j}-3\mathbf{k} & \frac{35}{3}+\frac{289}{6}\mathbf{i}-\frac{101}{3}\mathbf{j}+\frac{149}{6}\mathbf{k}\end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.\mathrm{cdet}_2\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{15}{2}+\frac{43}{2}\mathbf{i}+\frac{13}{2}\mathbf{j}-\frac{33}{2}\mathbf{k}\\ \frac{3}{2}+\frac{4}{3}\mathbf{i}-\frac{5}{3}\mathbf{k} & \frac{35}{3}+\frac{289}{6}\mathbf{i}-\frac{101}{3}\mathbf{j}+\frac{149}{6}\mathbf{k}\end{bmatrix}\right)=-\frac{55}{12}-\frac{587}{24}\mathbf{i}+\frac{13}{6}\mathbf{j}-\frac{253}{8}\mathbf{k}.$$

Аналогічно, $d^A_{12}=-\frac{13}{12}-\frac{581}{24}\mathbf{i}+\frac{39}{4}\mathbf{j}+\frac{161}{8}\mathbf{k}$. Продовжуючи так само, одержимо

$$\mathbf{d}^A_{2.}=\left[\frac{232}{3}+\frac{1763}{9}\mathbf{i}+\frac{1093}{18}\mathbf{j}+\frac{1795}{12}\mathbf{k},-\frac{419}{6}+\frac{3035}{36}\mathbf{i}-\frac{751}{9}\mathbf{j}-\frac{1189}{9}\mathbf{k}\right],$$
$$\mathbf{d}^A_{3.}=\left[\frac{116}{9}-\frac{239}{12}\mathbf{i}+\frac{25}{36}\mathbf{j}+\frac{299}{9}\mathbf{k},-\frac{117}{24}+\frac{95}{6}\mathbf{i}-\frac{99}{8}\mathbf{j}+\frac{245}{12}\mathbf{k}\right].$$

Кінцево, маємо

$$x_{11}=\frac{\mathrm{rdet}_1(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)_{1.}\left(\mathbf{d}^A_{1.}\right)}{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}}\left|\left(\widetilde{\mathbf{A}}^*\widetilde{\mathbf{A}}\right)_\beta^\beta\right|\cdot\det(\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^*)}=$$

$$=\frac{1}{36}\,\mathrm{rdet}_1\begin{bmatrix}-\frac{55}{12}-\frac{587}{24}\mathbf{i}+\frac{13}{6}\mathbf{j}-\frac{253}{8}\mathbf{k} & -\frac{13}{12}-\frac{581}{24}\mathbf{i}+\frac{39}{4}\mathbf{j}+\frac{161}{8}\mathbf{k}\\ 1+2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k} & 3\end{bmatrix}=$$

$$= -\frac{1013}{864} + \frac{1}{144}\mathbf{i} - \frac{359}{864}\mathbf{j} + \frac{173}{144}\mathbf{k}.$$

Аналогічно, одержимо

$$x_{12} = \frac{19}{288} - \frac{2459}{864}\mathbf{i} - \frac{257}{864}\mathbf{j} + \frac{3247}{864}\mathbf{k},$$

та

$$x_{21} = \frac{1162}{324} - \frac{8935}{1296}\mathbf{i} - \frac{5983}{1296}\mathbf{j} + \frac{1759}{432}\mathbf{k}, \quad x_{22} = \frac{1631}{432} + \frac{1285}{324}\mathbf{i} - \frac{817}{324}\mathbf{j} - \frac{10631}{432}\mathbf{k},$$
$$x_{31} = \frac{127}{864} + \frac{83}{864}\mathbf{i} - \frac{545}{864}\mathbf{j} - \frac{329}{864}\mathbf{k}, \quad x_{32} = \frac{311}{1296} + \frac{367}{162}\mathbf{i} - \frac{949}{1296}\mathbf{j} + \frac{77}{36}\mathbf{k}.$$

5.3. Визначникові зображення зваженої Дразіна узагальнено-обернених розв'язків кватерніонових матричних рівнянь.

У цьому підрозділі досліджуються аналоги правила Крамера для W-зважених Дразіна обернених розв'язків наступних матричних рівнянь над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$,

$$\mathbf{WAWX} = \mathbf{D}, \tag{5.109}$$

$$\mathbf{XWAW} = \mathbf{D}, \tag{5.110}$$

$$\mathbf{W}_1\mathbf{AW}_1\mathbf{XW}_2\mathbf{BW}_2 = \mathbf{D}. \tag{5.111}$$

Характеризація W-зваженого оберненого Дразіна розв'язку була встановлена у роботі [266]. Вей дав правило Крамера для розв'язку системи рівнянь з обмеженнями

$$\mathbf{WAWx} = \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \in \mathcal{R}\left[(\mathbf{AW})^{k_1}\right], \tag{5.112}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ з $\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}) = k_1$, $\mathrm{Ind}(\mathbf{WA}) = k_2$ і $\mathrm{rank}\,(\mathbf{AW})^{k_1} = r_1$, $\mathrm{rank}\,(\mathbf{WA})^{k_2} = r_2$. Було встановлено, що матричне рівняння з обмеженнями (5.112) має єдиний розв'язок, $\mathbf{x} = \mathbf{A}_{d,W}\mathbf{b}$, і представлено його правило Крамера наступним чином,

$$x_j = \det\begin{pmatrix} \mathbf{WAW}(j \longrightarrow \mathbf{b}) & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_1(j \longrightarrow 0) & 0 \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} \mathbf{WAW} & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.113}$$

де $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{C}^{n\times n-r_2}_{n-r_2}$, $\mathbf{V}_1^* \in \mathbb{C}^{m\times m-r_1}_{m-r_1}$ є матрицями, стовпці яких утоворюють базиси просторів $\mathcal{N}((\mathbf{WA})^{k_2})$ і $\mathcal{N}((\mathbf{AW})^{k_1^*})$, відповідно.

У рамках теорії стовпцево-рядкових визначників, Song [226] розглянув характеристику W-зваженої оберненої матриці Дразіна над тілом кватерніонів, та представив правило Крамера матричного рівняння з обмеженнями,

$$\mathbf{W}_1\mathbf{A}\mathbf{W}_1\mathbf{X}\mathbf{W}_2\mathbf{B}\mathbf{W}_2 = \mathbf{D}, \tag{5.114}$$

$$\mathcal{R}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_r\left((\mathbf{A}\mathbf{W}_1)^{k_1}\right),\ \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l\left((\mathbf{W}_1\mathbf{A})^{k_1}\right), \tag{5.115}$$

$$\mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l\left((\mathbf{B}\mathbf{W}_2)^{k_2}\right),\ \mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_r\left((\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2}\right), \tag{5.116}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W}_1 \in \mathbb{H}^{n\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{p\times q}$, $\mathbf{W}_2 \in \mathbb{H}^{q\times p}$ і $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times p}$ з індексами $k_1 = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{A}\mathbf{W}_1), \mathrm{Ind}\,(\mathbf{W}_1\mathbf{A})\}$, $k_2 = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{B}\mathbf{W}_2), \mathrm{Ind}\,(\mathbf{W}_2\mathbf{B})\}$, та рангами $\mathrm{rank}\,(\mathbf{A}\mathbf{W}_1)^{k_1} = s_1$, $\mathrm{rank}\,(\mathbf{B}\mathbf{W}_2)^{k_2} = s_2$.

Було доведено, що коли

$$\mathbf{D} \in \mathcal{R}_r\left((\mathbf{W}_1\mathbf{A})^{k_1}, (\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2}\right),\ \mathbf{D} \in \mathcal{R}_l\left((\mathbf{A}\mathbf{W}_1)^{k_1}, (\mathbf{B}\mathbf{W}_2)^{k_2}\right)$$

і існують допоміжні матриці повного стовпцевого рангу, $\mathbf{L}_1 \in \mathbb{H}^{n\times n-s_1}_{n-s_1}$, $\mathbf{M}_1^* \in \mathbb{H}^{m\times m-s_1}_{m-s_1}$, $\mathbf{L}_2 \in \mathbb{H}^{q\times q-s_2}_{q-s_2}$, $\mathbf{M}_2^* \in \mathbb{H}^{p\times p-s_2}_{p-s_2}$ з додатковими умовами на їх стовпцеві та нульові простори, тоді матричне рівняння з обмеженнями (5.114) має єдиний розв'язок,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}_1}\mathbf{D}\mathbf{B}_{d,\mathbf{W}_2}.$$

Використовуючи допоміжні матриці, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{M}_2$, Song представив його правило Крамера за аналогією до (5.113).

У пропонованому тут підході уникнено використання допоміжних матриць і отримано точні покомпонентні формули з визначниковим зображенням розв'язків рівнянь (5.109) -(5.110) -(5.111) з обмеженнями, використовуючи тільки вхідні матриці.

5.3.1. Правило Крамера Дразіна зваженого оберненого розв'язку двостороннього матричного рівняння з обмеженнями. Розглянемо наступне матричне рівняння з обмеженням,

$$\mathbf{WAWX} = \mathbf{D}, \tag{5.117}$$

$$\mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r\left((\mathbf{AW})^k\right),\ \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l\left((\mathbf{WA})^k\right), \tag{5.118}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times p}$ та $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}_r$ з індексом $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$, $\mathrm{rank}\,(\mathbf{AW})^k = \mathrm{rank}\ \mathbf{V}^k = r_1$ і $\mathrm{rank}\,(\mathbf{WA})^k = \mathrm{rank}\ \mathbf{U}^k = r_2$.

Теорема 5.21. *Якщо* $\mathbf{D} \subset \mathcal{C}_r\left((\mathbf{AW})^k\right)$ *і* $\mathbf{D} \supset \mathcal{N}_l\left((\mathbf{WA})^k\right)$, *тоді рівняння (5.117) з обмеженням (5.118) має єдиний розв'язок,*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,W}\mathbf{D}, \tag{5.119}$$

котрий має визначникові зображення для всіх $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$,

(i)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{W}^*\mathbf{W})_{.i}\,(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}} |\mathbf{W}^*\mathbf{W}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_2,\,n}} \left|\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\mathbf{U}^{2k+1}\right|^{\beta}_{\beta}}, \tag{5.120}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{\Omega}}_1 = \mathbf{W}^*\mathbf{U}^k\mathbf{\Omega}_1$ *і матриця* $\mathbf{\Omega}_1 = \left(\omega^{(1)}_{tj}\right)$ *така, що*

$$\omega^{(1)}_{ts} := \sum_{\beta\in J_{r_2,\,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.t}(\hat{\mathbf{d}}_{.j})\right)^{\beta}_{\beta} \tag{5.121}$$

де $\hat{\mathbf{d}}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{U}^{2k+1})^*\mathbf{U}^k\mathbf{D}$.

(ii)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v^{(k)}_{it} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,t}\left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|^{\beta}_{\beta}\right)^2}, \tag{5.122}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^{(1)}_{.j}$ - j*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{\Psi}}_1 := (\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{2k}\mathbf{\Psi}\mathbf{AD}$. *Матриця* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{sj}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *така, що*

$$\psi_{sj} = \sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{s\}} \mathrm{cdet}_s\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,s}(\hat{\mathbf{v}}_{.\,j})\right)^{\beta}_{\beta}$$

і $\hat{\mathbf{v}}_{.j}$ *- j-й стовпець* $(\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^k =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m\times n}$.

(iii) Якщо $\mathbf{AW} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *– ермітова, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{AW}\right)^{k+2}_{.i}\left(\mathbf{f}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}} \left|\left(\mathbf{AW}\right)^{k+2}\right|^{\beta}_{\beta}}, \tag{5.123}$$

де $\mathbf{f}_{.j}$ *– j–й стовпець матриці* $\mathbf{F} = (\mathbf{AW})^k\mathbf{AD}$.

Доведення. Спершу встановимо існування розв'язку рівняння (5.117), який представляється як (5.119). За означенням правого стовпцевого простору, маємо $\mathbf{D} = (\mathbf{WA})^k\mathbf{Y}$ для деякої матриці $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{n\times p}$. З цього випливає, що $\mathcal{R}_r(\mathbf{D}) \subset \mathcal{R}_r\left((\mathbf{WA})^k\right)$. Оскільки,

$$\mathbf{WAWA}_{d,W}\mathbf{D} = \mathbf{P}_{\mathcal{R}_r((\mathbf{WA})^k),\mathcal{N}_r((\mathbf{WA})^k)}\mathbf{D} = \mathbf{D}.$$

Отже, (5.119) – розв'язок рівняння (5.117), що задовольняє умову (5.118).

Тепер доведемо єдиність розв'язку (5.119). Нехай $\mathbf{X}_0$ є розв'язком рівняння (5.117). Тоді він задовольняє умову (5.118), і

$$\mathbf{A}_{d,W}\mathbf{D} = \mathbf{A}_{d,W}\mathbf{WAWX}_0 = \mathbf{P}_{\mathcal{R}_r((\mathbf{WA})^k),\mathcal{N}_r((\mathbf{WA})^k)}\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0.$$

(i) Щоб вивести правило Крамера (5.120), використаємо визначникове зображення (2.113) для $\mathbf{A}_{d,W}$. Тоді

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^{p} a^{d,\mathbf{W}}_{is} d_{sj} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{W}^*\mathbf{W}\right)_{.i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.s}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,m}} \left|\mathbf{W}^*\mathbf{W}\right|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_2,n}} \left|\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\mathbf{U}^{2k+1}\right|^{\beta}_{\beta}} d_{sj},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.s}$ – s-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{W}^*\mathbf{U}^k\mathbf{\Omega}$ і матриця $\mathbf{\Omega} = (\omega_{ts})$ така, що

$$\omega_{ts} := \sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.t}\left(\hat{\mathbf{u}}_{.s}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$$

і $\hat{\mathbf{u}}_{.s}$ – s-й стовпець матриці $\hat{\mathbf{U}} = (\mathbf{U}^{2k+1})^*\mathbf{U}^k$.

Позначимо $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{D} = (\mathbf{U}^{2k+1})^*\mathbf{U}^k\mathbf{D}$. З того, що $\sum\limits_{s=1}^{p}\hat{\mathbf{u}}_{.s}d_{sj} = \hat{\mathbf{d}}_{.j}$, де $\hat{\mathbf{d}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\hat{\mathbf{D}}$, і ввівши $\omega^{(1)}_{tj}$ за формулою (5.121), одержимо (5.120).

(ii) Щоб знайти правило Крамера (5.122), використаємо визначникове зображення (2.113) для $\mathbf{A}_{d,W}$. Тоді

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}^{d,\mathbf{W}} d_{sj} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1} \right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right)_{.\,t} \left(\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.\,s} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,m}} \left| \left(\mathbf{V}^{2k+1} \right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right|_{\beta}^{\beta} \right)^2} d_{sj},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.\,j}$ - j-й стовпець $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} := (\mathbf{V}^{2k+1})^* \mathbf{V}^{2k} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$, і $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{sj}) \in \mathbb{H}^{m \times n}$ така, що

$$\psi_{sj} = \sum_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{s\}} \operatorname{cdet}_s \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1} \right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right)_{.\,s} (\hat{\mathbf{v}}_{.\,j}) \right)_{\beta}^{\beta}$$

і $\hat{\mathbf{v}}_{.\,j}$ - j-й стовпець матриці $(\mathbf{V}^{2k+1})^* \mathbf{V}^k =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m \times n}$. Позначимо $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_1 := (\mathbf{V}^{2k+1})^* \mathbf{V}^{2k} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{A} \mathbf{D}$. З того, що $\sum\limits_{s=1}^{p} \boldsymbol{\psi}_{.s}^{(1)} d_{sj} = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_{.j}^{(1)}$, слідує (5.122).

(iii) У випадку, коли $\mathbf{AW} \in \mathbb{H}^{m \times m}$ – ермітова, тоді застосувавши визначникове зображення (2.126), одержимо (5.123). $\square$

Зауваження 5.3. *У комплексному випадку, коли* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{C}_r^{n \times m}$, $\operatorname{rank} \mathbf{V}^k = r_1$ *і* $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times p}$, *визначникове зображення розв'язку рівняння (5.117) з обмеженням (5.118) має вид*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{i\}} \left| (\mathbf{AW})_{.\,i}^{k+2} (\mathbf{f}_{.j}) \right|_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,m}} \left| (\mathbf{AW})^{k+2} \right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\mathbf{f}_{.j}$ *–* j*–й стовпець матриці* $\mathbf{F} = (\mathbf{AW})^k \mathbf{AD}$.

Розглянемо тепер наступне рівняння з обмеженням,

$$\mathbf{XWAW} = \mathbf{D}, \tag{5.124}$$

$$\mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l \left((\mathbf{AW})^k \right), \ \mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_r \left((\mathbf{WA})^k \right), \tag{5.125}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q \times m}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}_{r_1}^{n \times m}$ з індексом $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{AW}), \operatorname{Ind}(\mathbf{WA})\}$, $\operatorname{rank}(\mathbf{AW})^k = \operatorname{rank} \mathbf{V}^k = r_1$, та $\operatorname{rank}(\mathbf{WA})^k = \operatorname{rank} \mathbf{U}^k = r_2$.

Теорема 5.22. *Якщо* $\mathbf{D} \subset \mathcal{R}_l\left((\mathbf{AW})^k\right)$ *і* $\mathbf{D} \supset \mathcal{N}_r\left((\mathbf{WA})^k\right)$, *тоді рівняння (5.124) з обмеженням (5.125) має єдиний розв'язок,*

$$\mathbf{X} = \mathbf{DA}_{d,W}, \tag{5.126}$$

з визначниковим зображенням

(i)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{WW}^*)_{j\,.} (\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}^{(1)}_{i.}) \right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,m}} \left| \mathbf{V}^{2k+1} \left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \right|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}} \left| \mathbf{WW}^* \right|^{\alpha}_{\alpha}} \tag{5.127}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}^{(1)}_{i.}$ *– i–й рядок матриці* $\widetilde{\boldsymbol{\Upsilon}}_1 = \boldsymbol{\Upsilon}_1 \mathbf{V}^k \mathbf{W}^*$, $\mathbf{V} = \mathbf{AW}$ *і* $\boldsymbol{\Upsilon}_1 = \left(\upsilon^{(1)}_{it}\right)$ *така, що*

$$\upsilon^{(1)}_{it} := \sum_{\alpha \in I_{r_1,m}\{t\}} \operatorname{rdet}_t \left(\left(\mathbf{V}^{2k+1} \left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^* \right)_{t.} (\check{\mathbf{d}}_{i\,.}) \right)^{\alpha}_{\alpha}.$$

Тут $\check{\mathbf{d}}_{i\,.}$ *– i-й рядок матриці* $\check{\mathbf{D}} = \mathbf{DV}^k \left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*$.

(ii)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}\{s\}} \operatorname{rdet}_s \left(\left(\mathbf{U}^{2k+1} \left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^* \right)_{s.} (\widetilde{\boldsymbol{\phi}}^{(1)}_{i\,.}) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right) u^{(k)}_{sj}}{\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}} \left| \mathbf{U}^{2k+1} \left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^* \right|^{\alpha}_{\alpha} \right)^2}, \tag{5.128}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}^{(1)}_{i\,.}$ *- i-й рядок* $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 := \mathbf{DA\Phi U}^{2k}(\mathbf{U}^{2k+1})^* \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *і* $\boldsymbol{\Phi} = (\phi_{iq}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *така, що*

$$\phi_{iq} = \sum_{\alpha \in I_{r_2,n}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left(\left(\mathbf{U}^{2k+1} \left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^* \right)_{q.} (\check{\mathbf{u}}_{i\,.}) \right)^{\alpha}_{\alpha}$$

і $\check{\mathbf{u}}_{i\,.}$ *- i-й рядок* $\mathbf{U}^k(\mathbf{U}^{2k+1})^* =: \check{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{m\times n}$.

(iii) Якщо $\mathbf{AW} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *– ермітова, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{WA})^{k+2}_{j\,.}(\mathbf{g}_{i.}) \right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,n}} \left| (\mathbf{WA})^{k+2} \right|^{\alpha}_{\alpha}}. \tag{5.129}$$

де $\mathbf{g}_{i.}$ *– i–й рядок матриці* $\mathbf{G} = \mathbf{DA}(\mathbf{WA})^k$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$.

Доведення. Доведення аналогічне доведенню Теореми 5.21, вибравши для зваженої узагальненої оберненої матриці Дразіна $\mathbf{A}_{d,W}$, у випадку (i) визначникове зображення (2.112), у випадку (ii) – (2.98) і у випадку (iii) – (2.128). □

Зауваження 5.4. *У комплексному випадку, коли* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{C}_r^{n\times m}$, $\operatorname{rank}(\mathbf{AW})^k = \operatorname{rank}\mathbf{V}^k = r_1$, $\operatorname{rank}(\mathbf{WA})^k = \operatorname{rank}\mathbf{U}^k = r_2$ *та* $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n\times p}$, *правило Крамера для рівняння (5.124) з обмеженням (5.125) є наступним*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,n}\{j\}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}_{j\,.}(\mathbf{g}_{i.})\right|^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,n}} \left|(\mathbf{WA})^{k+2}\right|^{\alpha}_{\alpha}}.$$

де $\mathbf{g}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\mathbf{G} = \mathbf{DA}(\mathbf{WA})^k$ *для всіх* $i = 1,\dots,n$.

Розглянемо рівняння (5.114) з обмеженнями (5.115)-(5.116).

Теорема 5.23. *Нехай* $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times p}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{p\times q}$, $\mathbf{W}_1 \in \mathbb{H}^{n\times m}_{r_1}$ *з індексом* $k_1 = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{AW}_1), \operatorname{Ind}(\mathbf{W}_1\mathbf{A})\}$ *і* $\operatorname{rank}(\mathbf{W}_1\mathbf{A})^{k_1} = \operatorname{rank}(\mathbf{U}_1)^{k_1} = r_{11}$, $\operatorname{rank}(\mathbf{AW}_1)^{k_1} = \operatorname{rank}(\mathbf{V}_1)^{k_1} = r_{12}$, *а матриця* $\mathbf{W}_2 \in \mathbb{H}^{q\times p}_{r_2}$ *з індексом* $k_2 = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{BW}_2), \operatorname{Ind}(\mathbf{W}_2\mathbf{B})\}$, *при цьому* $\operatorname{rank}(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2} = \operatorname{rank}(\mathbf{U}_2)^{k_2} = r_{21}$ *і* $\operatorname{rank}(\mathbf{BW}_2)^{k_2} = \operatorname{rank}(\mathbf{V}_2)^{k_2} = r_{22}$. *Якщо* $\mathbf{D} \in \mathcal{R}_r\left((\mathbf{W}_1\mathbf{A})^{k_1}, (\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2}\right)$, $\mathbf{D} \in \mathcal{R}_l\left((\mathbf{AW}_1)^{k_1}, (\mathbf{BW}_2)^{k_2}\right)$, *тоді рівняння з обмеженнями (5.114) має єдиний розв'язок,*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}_1}\mathbf{D}\mathbf{B}_{d,\mathbf{W}_2}, \tag{5.130}$$

який має визначникові зображення для всіх $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,q$.

(i)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^*)_{j\,.}(\mathbf{d}^{W_1}_{i.})\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}} |\mathbf{W}_1^*\mathbf{W}_1|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_{11},n}} \left|\left(\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_{22},q}} \left|\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}} |\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^*|^{\alpha}_{\alpha}} = \tag{5.131}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{W}_1^*\mathbf{W}_1)_{.\,i}(\mathbf{d}^{W_2}_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}} |\mathbf{W}_1^*\mathbf{W}_1|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_{11},n}} \left|\left(\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_{22},q}} \left|\mathbf{V}_2^{2k_1+1}\left(\mathbf{V}_2^{2k_1+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}} |\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{5.132}$$

де

$$\mathbf{d}^{W_1}_{i.}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{W}_1^*\mathbf{W}_1\right)_{.i}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{.v}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times q},\quad v=1,\ldots,q,$$

$$\mathbf{d}^{W_2}_{.j}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,\,q}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^*\right)_{j\,.}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_{l.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{m\times 1},\quad l=1,\ldots,m$$

є, відповідно, вектор-рядком і вектор-стовпцем, а $\widetilde{\mathbf{d}}_{.v}$ *і* $\widetilde{\mathbf{d}}_{l.}$ *є* v*-м стовпцем та* l*-м рядком матриці* $\widetilde{\mathbf{D}}=\mathbf{W}_1^*\mathbf{U}_1^{k_1}\mathbf{\Omega}\mathbf{D}\mathbf{\Upsilon}\mathbf{V}_2^{k_2}\mathbf{W}_2^*\in\mathbb{H}^{m\times q}$. *Тут матриця* $\mathbf{\Omega}=(\omega_{ft})$ *така, що*

$$\omega_{ft}:=\sum_{\beta\in J_{r_{11},\,n}\{f\}}\mathrm{cdet}_f\left(\left(\left(\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right)_{.f}\left(\hat{\mathbf{u}}_{.t}\right)\right)^{\beta}_{\beta}$$

$\hat{\mathbf{u}}_{.t}$ *–* t*-й стовпець матриці* $(\mathbf{U}_1^{2k_1+1})^*\mathbf{U}_1^{k_1}=:\hat{\mathbf{U}}$, *а* $\mathbf{\Upsilon}=(\upsilon_{sz})$ *така, що*

$$\upsilon_{sz}:=\sum_{\alpha\in I_{r_{22},\,q}\{z\}}\mathrm{rdet}_z\left(\left(\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\right)^*\right)_{z.}\left(\check{\mathbf{v}}_{s\,.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}$$

і $\check{\mathbf{v}}_{s.}$ *–* s*-й рядок матриці* $\mathbf{V}_2^{k_2}(\mathbf{V}_2^{2k_2+1})^*=:\check{\mathbf{V}}$.

(ii)

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{f=1}^{m}v_{if}^{(1,k_1)}\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}\{f\}}\mathrm{cdet}_f\left(\left(\left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)_{.\,f}\left(\mathbf{d}^{U_2}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left|\left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right|^{\beta}_{\beta}\right)^2\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,n}}\left|\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}\right)^2}=\tag{5.133}$$

$$=\frac{\sum\limits_{v=1}^{n}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,n}\{v\}}\mathrm{rdet}_v\left(\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\right)^*\right)_{v.}\left(\mathbf{d}^{V_1}_{i\,.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right)u_{vj}^{(2,k_2)}}{\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,n}}\left|\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\right)^*\right|^{\alpha}_{\alpha}\right)^2\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left|\left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right|^{\beta}_{\beta}\right)^2},\tag{5.134}$$

де

$$\mathbf{d}^{U_2}_{.\,j}=\left[\sum_{v=1}^{n}\left(\sum_{\alpha\in I_{r_{21},\,n}\{v\}}\mathrm{rdet}_v\left(\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\right)^*\right)_{v.}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{l.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right)u_{vj}^{(2,k_2)}\right]\in\mathbb{H}^{m\times 1},\tag{5.135}$$

$$\mathbf{d}_{i\,.}^{V_1}=\left[\sum_{f=1}^{m} v_{if}^{(1,k_1)} \sum_{\beta\in J_{r_{12},\,m}\{f\}} \mathrm{cdet}_f\left(\left(\left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)^{*}\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)_{.\,f}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.v}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times q} \tag{5.136}$$

є, відповідно, вектор-стовпцем і вектор-рядком, а $\widehat{\mathbf{d}}_{.v}$ *і* $\widehat{\mathbf{d}}_{l.}$ *є* v*-м стовпцем та* l*-м рядком матриці* $\widehat{\mathbf{D}}=\left(\mathbf{V}_1^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{V}_1^{2k}\Psi\mathbf{ADB}\Phi\mathbf{U}_2^{2k_2}\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\right)^{*}\in\mathbb{H}^{m\times q}$. *Матриця* $\mathbf{\Psi}=(\psi_{lt})\in\mathbb{H}^{m\times m}$ *така, що*

$$\psi_{lt}=\sum_{\beta\in J_{r_{12},\,m}\{l\}}\mathrm{cdet}_l\left(\left(\left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)^{*}\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)_{.\,t}(\hat{\mathbf{v}}_{.\,j})\right)_{\beta}^{\beta}$$

і $\hat{\mathbf{v}}_{.\,t}$ *-* j*-й стовпець матриці* $(\mathbf{V}_1^{2k_1+1})^{*}\mathbf{V}_1^{k_1}=:\hat{\mathbf{V}}\in\mathbb{H}^{m\times n}$ *і* $\mathbf{\Phi}=(\phi_{sz})\in\mathbb{H}^{q\times q}$ *така, що*

$$\phi_{sz}=\sum_{\alpha\in I_{r_{21},\,n}\{z\}}\mathrm{rdet}_z\left(\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\right)^{*}\right)_{z.}(\check{\mathbf{u}}_{s\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha}$$

і $\check{\mathbf{u}}_{s\,.}$ *-* s*-й рядок* $\mathbf{U}_2^{k_2}(\mathbf{U}_2^{2k_2+1})^{*}=:\check{\mathbf{U}}\in\mathbb{H}^{q\times q}$.

(iii) Якщо матриці $\mathbf{AW}_1\in\mathbb{H}^{m\times m}$ *і* $\mathbf{W}_2\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{q\times q}$ *обидві є ермітовими, тоді*

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{AW}_1\right)_{.\,i}^{k_1+2}\left(\mathbf{d}_{.\,j}^{\mathbf{B}}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left|\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1+2}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,q}}\left|\left(\mathbf{W}_2\mathbf{B}\right)^{k_2+2}\right|_{\alpha}^{\alpha}}= \tag{5.137}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},q}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{W}_2\mathbf{B}\right)_{j\,.}^{k_2+2}(\mathbf{d}_{i\,.}^{\mathbf{A}})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left|\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1+2}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,q}}\left|\left(\mathbf{W}_2\mathbf{B}\right)^{k_2+2}\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{5.138}$$

де

$$\mathbf{d}_{.\,j}^{\mathbf{B}}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_{21},q}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left(\left(\mathbf{W}_2\mathbf{B}\right)_{j\,.}^{k_2+2}(\bar{\mathbf{d}}_{t.})\right)_{\alpha}^{\alpha}\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\ t=1,\ldots,n$$

$$\mathbf{d}_{i\,.}^{\mathbf{A}}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_{12},\,m}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{AW}_1\right)_{.\,i}^{k_1+2}\left(\bar{\mathbf{d}}_{.\,l}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times q},\ l=1,\ldots,q$$

Тут $\bar{\mathbf{d}}_{i.}$ *і* $\bar{\mathbf{d}}_{.j}$ *–* i*-й рядок і* j*–й стовпець матриці* $\bar{\mathbf{D}}=\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1}\mathbf{ADB}(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2}$ *для всіх* $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,p$.

Доведення. Існування та єдиність розв'язку (5.130) можна довести аналогічно до [226, Теорема 5.2]. Доведемо визначникові зображення розв'язку.

Покомпонентний запис рівняння (5.130) дає

$$x_{ij}=\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{n}a_{it}^{d,W_1}d_{ts}b_{sj}^{d,W_2} \tag{5.139}$$

(i) Для визначникового зображення матриці $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}_1}$ застосуємо представлення (2.113), а матриці $\mathbf{B}_{d,\mathbf{W}_2}$ – (2.112), тоді

$$x_{ij}=\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{W}_1^*\mathbf{W}_1\right)_{.i}\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.t}\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}}\left|\mathbf{W}_1^*\mathbf{W}_1\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\beta\in J_{r_{11},n}}\left|\left(\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right|_\beta^\beta}d_{ts}\times$$
$$\times\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^*\right)_{j\,.}\left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{s.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{22},q}}\left|\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}}\left|\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^*\right|_\alpha^\alpha}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.t}$ – t-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Omega}}=\mathbf{W}_1^*\mathbf{U}_1^{k_1}\mathbf{\Omega}$ і матриця $\mathbf{\Omega}=(\omega_{ft})$ така, що

$$\omega_{ft}:=\sum_{\beta\in J_{r_{11},n}\{f\}}\operatorname{cdet}_f\left(\left(\left(\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right)_{.f}\left(\hat{\mathbf{u}}_{.t}\right)\right)_\beta^\beta$$

$\hat{\mathbf{u}}_{.t}$ – t-й стовпець матриці $(\mathbf{U}_1^{2k_1+1})^*\mathbf{U}_1^{k_1}=:\hat{\mathbf{U}}$;

$\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{s.}$ – s–й рядок матриці $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}}=\mathbf{\Upsilon}\mathbf{V}_2^{k_2}\mathbf{W}_2^*$, $\mathbf{V}_2=\mathbf{B}\mathbf{W}_2$ і $\mathbf{\Upsilon}=(\upsilon_{sz})$ така, що

$$\upsilon_{sz}:=\sum_{\alpha\in I_{r_{22},q}\{z\}}\operatorname{rdet}_z\left(\left(\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\right)^*\right)_{z.}\left(\check{\mathbf{v}}_{s.}\right)\right)_\alpha^\alpha$$

і $\check{\mathbf{v}}_{s.}$ – s-й рядок матриці $\mathbf{V}_2^{k_2}(\mathbf{V}_2^{2k_2+1})^*=:\check{\mathbf{V}}$.

Введемо матрицю $\widetilde{\mathbf{D}}:=\widetilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{\Upsilon}}=\mathbf{W}_1^*\mathbf{U}_1^{k_1}\mathbf{\Omega}\mathbf{D}\mathbf{\Upsilon}\mathbf{V}_2^{k_2}\mathbf{W}_2^*\in\mathbb{H}^{m\times q}$. Тоді

$$x_{ij}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{v=1}^{q}\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{W}_1^*\mathbf{W}_1\right)_{.i}\left(\mathbf{e}_{.l}\right)\right)_\beta^\beta\widetilde{d}_{lv}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,m}}\left|\mathbf{W}_1^*\mathbf{W}_1\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\beta\in J_{r_{11},n}}\left|\left(\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right)^*\mathbf{U}_1^{2k_1+1}\right|_\beta^\beta}\times$$
$$\times\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^*\right)_{j\,.}\left(\mathbf{e}_{v.}\right)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{22},q}}\left|\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{V}_2^{2k_2+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,q}}\left|\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^*\right|_\alpha^\alpha}$$

де $\mathbf{e}_{.l}$ і $\mathbf{e}_{v.}$ – одиничні l-й вектор-стовпець та v-й вектор-рядок, а $\widetilde{d}_{lv}$ – (lv)-й елемент матриці $\widetilde{\mathbf{D}}$. Нехай

$$d_{iv}^{W_1} = \sum_{l} \sum_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{W}_1^* \mathbf{W}_1)_{.i} \left(\mathbf{e}_{.l}\right) \right)_{\beta}^{\beta} \widetilde{d}_{lv} =$$

$$= \sum_{\beta \in J_{r_1,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{W}_1^* \mathbf{W}_1)_{.i} \left(\widetilde{d}_{.v}\right) \right)_{\beta}^{\beta}$$

є v-ю компонентою вектор-рядка $\mathbf{d}_{i.}^{W_1} = \left[d_{i1}^{W_1}, \ldots, d_{iq}^{W_1} \right]$. З того, що $\sum_v d_{iv}^{W_1} \mathbf{e}_{v.} = \mathbf{d}_{i.}^{W_1}$, випливає (5.132). Коли введемо

$$d_{lj}^{W_2} = \sum_{v} \widetilde{d}_{lv} \sum_{\alpha \in I_{r_2,\,q}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{W}_2 \mathbf{W}_2^*)_{j\,.} \left(\mathbf{e}_{v.}\right) \right)_{\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha \in I_{r_2,\,q}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{W}_2 \mathbf{W}_2^*)_{j\,.} (\widetilde{\mathbf{d}}_{l.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \tag{5.140}$$

– l-у компоненту вектор-стовпця $\mathbf{d}_{.j}^{W_2} = \left[d_{1j}^{W_2}, \ldots, d_{mj}^{W_1} \right]$, то з того, що $\sum_l \mathbf{e}_{.l} d_{lj}^{W_2} = \mathbf{d}_{.j}^{W_2}$, випливає (5.131).

(ii) Щоб отримати правила Крамера виражені формулами (5.133) та (5.134) для матриці $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}_1}$ застосуємо визначникове зображення (2.113), тоді

$$a_{it}^{d,W_1} = \frac{\sum\limits_{f=1}^{m} v_{if}^{(1,k_1)} \sum\limits_{\beta \in J_{r_{12},\,m}\{f\}} \mathrm{cdet}_f \left(\left(\left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1} \right)^* \mathbf{V}_1^{2k_1+1} \right)_{.\,f} \left(\widetilde{\psi}_{.\,t} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta \in J_{r_{12},\,m}} \left| \left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1} \right)^* \mathbf{V}_1^{2k_1+1} \right|_{\beta}^{\beta} \right)^2} \tag{5.141}$$

де $v_{if}^{(1,k_1)}$ – (if)-й елемент матриці $\mathbf{V}_1^{k_1}$, $\widetilde{\psi}_{.\,t}$ - t-й стовпець $\widetilde{\mathbf{\Psi}} := (\mathbf{V}_1^{2k_1+1})^* \mathbf{V}_1^{2k_1} \mathbf{\Psi} \mathbf{A}$, і матриця $\mathbf{\Psi} = (\psi_{lt}) \in \mathbb{H}^{m \times m}$ така, що

$$\psi_{lt} = \sum_{\beta \in J_{r_{12},\,m}\{l\}} \mathrm{cdet}_l \left(\left(\left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1} \right)^* \mathbf{V}_1^{2k_1+1} \right)_{.\,t} \left(\hat{\mathbf{v}}_{.\,j} \right) \right)_{\beta}^{\beta}$$

і $\hat{\mathbf{v}}_{.\,t}$ - j-й стовпець матриці $(\mathbf{V}_1^{2k_1+1})^* \mathbf{V}_1^{k_1} =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m \times n}$.

Для матриці $\mathbf{B}_{d,\mathbf{W}_2}$ використаємо визначникове представлення (2.112), тоді

$$b_{sj}^{d,W} = \frac{\sum\limits_{v=1}^{n} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r_{21},\,n}\{v\}} \mathrm{rdet}_v \left(\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1} \left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1} \right)^* \right)_{v.} \left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{s\,.} \right) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right) u_{vj}^{(2,k_2)}}{\left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}} \left| \mathbf{U}_2^{2k_2+1} \left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1} \right)^* \right|_{\alpha}^{\alpha} \right)^2}, \tag{5.142}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{s.}$ - i-й рядок $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{B}\mathbf{\Phi}\mathbf{U}_2^{2k_2}(\mathbf{U}_2^{2k_2+1})^* \in \mathbb{H}^{p\times q}$, і $\mathbf{\Phi} = (\phi_{sz}) \in \mathbb{H}^{q\times q}$ така, що

$$\phi_{sz} = \sum_{\alpha\in I_{r_{21},n}\{z\}} \mathrm{rdet}_z \left(\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1} \left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1} \right)^* \right)_{z.} (\check{\mathbf{u}}_{s.}) \right)_{\alpha}^{\alpha}$$

і $\check{\mathbf{u}}_{s.}$ - s-й рядок $\mathbf{U}_2^{k_2}(\mathbf{U}_2^{2k_2+1})^* =: \check{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}^{q\times q}$. Підставивши (5.141) та (5.142) у рівняння (5.140) та продовжуючи аналогічно до попереднього пункту (i), одержимо визначникові зображення (5.133) та (5.134).

(iii) Якщо обидві матриці $\mathbf{AW}_1 \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times m}$ і $\mathbf{W}_2\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{r_2}^{q\times q}$ є ермітовими з індексами $\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}_1) = k_1$, $\mathrm{Ind}(\mathbf{W}_2\mathbf{B}) = k_2$ та рангами $\mathrm{rank}(\mathbf{AW}_1)^{k_1} = r_{12}$, $\mathrm{rank}(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2} = r_{21}$, тоді застосуємо визначникове зображення (2.126) для матриці $\mathbf{A}_{d,W_1} = \left(a_{ij}^{d,W_1}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ та (2.126) – для $\mathbf{B}_{d,W_2} = \left(b_{ij}^{d,W_2}\right) \in \mathbb{H}^{q\times p}$, тоді

$$a_{ij}^{d,W_1} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{AW_1})_{.i}^{k_1+2} (\bar{\mathbf{v}}_{.j}) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},m}} \left| (\mathbf{AW_1})^{k_1+2} \right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{5.143}$$

де $\bar{\mathbf{v}}_{.j}$ – j–й стовпець матриці $\bar{\mathbf{V}} = (\mathbf{AW_1})^{k_1}\mathbf{A}$ для всіх $j = 1, \ldots, m$;

та

$$b_{ij}^{d,W_2} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},q}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{W_2B})_{j.}^{k_2+2} (\bar{\mathbf{u}}_{i.}) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},q}} \left| (\mathbf{W_2B})^{k_2+2} \right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{5.144}$$

де $\bar{\mathbf{u}}_{i.}$ – i–й рядок матриці $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{B}(\mathbf{W_2B})^{k_2}$ для всіх $i = 1, \ldots, p$.

Підставивши (5.141) та (5.141) у рівняння (5.140) та продовжуючи аналогічно доведенню у пункту (i), одержимо визначникові зображення (5.137) та (5.138).

□

У наступному наслідку розглянемо змішані випадки, коли тільки одна із матриць $(\mathbf{AW}_1) \in \mathbb{H}_{r_{12}}^{m\times m}$ чи $(\mathbf{W}_2\mathbf{B}) \in \mathbb{H}_{r_{21}}^{q\times q}$ є ермітовою, вибравши з усіх можливих представлень найбільш спрощені.

Наслідок 5.9. *Нехай в умовах Теореми 5.23*

– *матриця* $\mathbf{AW}_1 \in \mathbb{H}_{r_{12}}^{m\times m}$ *є ермітовою, а матриця* $(\mathbf{W}_2\mathbf{B}) \in \mathbb{H}_{r_{21}}^{q\times q}$ *не є ермі-*

товою. Тоді визначникове зображення розв'язку (5.130) має вигляд

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1+2}_{.\,i}\left(\mathbf{d}^{U_2}_{.\,j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left|\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1+2}\right|^{\beta}_{\beta}\left(\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,n}}\left|\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\left(\mathbf{U}_2^{2k_2+1}\right)^{*}\right|^{\alpha}_{\alpha}\right)^{2}},$$

де вектор-стовпець $\mathbf{d}^{U_2}_{.\,j}$ *шукаємо за формулою (5.135).*

– *матриця* $\mathbf{AW}_1 \in \mathbb{H}^{m\times m}_{r_{12}}$ *не є ермітовою, а матриця* $(\mathbf{W}_2\mathbf{B}) \in \mathbb{H}^{q\times q}_{r_{21}}$ *– ермітова. Тоді визначникове зображення розв'язку (5.130) є*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},q}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2+2}_{j\,.}(\mathbf{d}^{V_1}_{i.})\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left|\left(\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right)^{*}\mathbf{V}_1^{2k_1+1}\right|^{\beta}_{\beta}\right)^{2}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,q}}\left|(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2+2}\right|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де вектор-стовпець $\mathbf{d}^{V_1}_{i.}$ *шукаємо за формулою (5.136).*

Зауваження 5.5. *У комплексному випадку, коли в умовах Теореми 5.23 покладемо* $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n\times p}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{W}_1 \in \mathbb{C}^{n\times m}_{r_1}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *і* $\mathbf{W}_2 \in \mathbb{C}^{q\times p}_{r_2}$ *правило Крамера для рівняння з обмеженнями (5.114) є наступним*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}\{i\}}\left|\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1+2}_{.\,i}\left(\mathbf{d}^{\mathbf{B}}_{.\,j}\right)\right|^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left|\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1+2}\right|^{\beta}_{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,q}}\left|(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2+2}\right|^{\alpha}_{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},q}\{j\}}\left|(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2+2}_{j\,.}(\mathbf{d}^{\mathbf{A}}_{i\,.})\right|^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_{12},\,m}}\left|\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1+2}\right|^{\beta}_{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_{21},\,q}}\left|(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2+2}\right|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де

$$\mathbf{d}^{\mathbf{B}}_{.\,j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_{21},q}\{j\}}\left|(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2+2}_{j\,.}(\bar{\mathbf{d}}_{t.})\right|^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1},\ t = 1,\ldots,n$$

$$\mathbf{d}^{\mathbf{A}}_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_{12},\,m}\{i\}}\left|\left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{d}}_{.\,l}\right)\right|^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times q},\ l = 1,\ldots,q$$

Тут $\bar{\mathbf{d}}_{i.}$ *і* $\bar{\mathbf{d}}_{.j}$ *– i-й рядок і j–й стовпець матриці* $\bar{\mathbf{D}} = \left(\mathbf{AW}_1\right)^{k_1}\mathbf{ADB}(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^{k_2}$ *для всіх* $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,p$.

5.3.2. Приклад правила Крамера Дразіна зваженого оберненого розв'язку. Розглянемо матричне рівняння

$$\mathbf{W}_1\mathbf{A}\mathbf{W}_1\mathbf{X}\mathbf{W}_2\mathbf{B}\mathbf{W}_2 = \mathbf{D}, \tag{5.145}$$

з обмеженнями (5.118), де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{j} & \mathbf{k} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{k} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & -1 \\ \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 1 \\ \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathbf{k} \end{bmatrix}, \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{i} \\ \mathbf{j} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{j} & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки наступні матриці є ермітовими

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} -2 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \mathbf{W}_2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & -1 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

то будемо шукати W-зважений Дразіна обернений розв'язок рівняння (5.145) за формулою (5.26). Маємо

$$k_1 = \max\{Ind(\mathbf{A}\mathbf{W}_1), Ind\,(\mathbf{W}_1\mathbf{A})\} = 1,$$

$$k_2 = \max\{Ind(\mathbf{B}\mathbf{W}_2), Ind\,(\mathbf{W}_2\mathbf{B})\} = 1,$$

і $s_1 = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{W}_1) = 2$, $s_2 = \operatorname{rank}(\mathbf{W}_2\mathbf{B}) = 2$. Оскільки

$$(\mathbf{A}\mathbf{W}_1)^3 = \begin{bmatrix} -13 & 8\mathbf{i} & 0 \\ -8\mathbf{i} & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\mathbf{W}_2\mathbf{B})^3 = \begin{bmatrix} 0 & -3\mathbf{i} & -3\mathbf{i} \\ 3\mathbf{i} & -3 & 0 \\ 3\mathbf{i} & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

то

$$\sum_{\beta\in J_{2,\,3}} \left|(\mathbf{A}\mathbf{W}_1)^3\right|_{\beta}^{\beta} = 1, \sum_{\alpha\in I_{2,\,3}} \left|(\mathbf{W}_2\mathbf{B})^3\right|_{\alpha}^{\alpha} = -27.$$

Маємо

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{AW}_1\mathbf{ADBW}_2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{i}+\mathbf{j} & -7+\mathbf{k} & -5+2\mathbf{k} \\ -1+\mathbf{k} & -5\mathbf{i}-\mathbf{j} & -4\mathbf{i}-2\mathbf{j} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

За формулою (5.59), одержимо

$$\mathbf{d}^{\mathbf{B}}_{.1} = \begin{bmatrix} 36\mathbf{i}-9\mathbf{j} \\ -27-9\mathbf{k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}^{\mathbf{B}}_{.2} = \begin{bmatrix} -27 \\ -18\mathbf{i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}^{\mathbf{B}}_{.3} = \begin{bmatrix} 9-9\mathbf{k} \\ 9\mathbf{i}+3\mathbf{j} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Звідси одержимо

$$x_{11} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}\{1\}} \operatorname{cdet}_1\left(\left(\mathbf{AW}_1\right)^3_{.1}\left(\mathbf{d}^{\mathbf{B}}_{.1}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{2,3}}\left|\left(\mathbf{AW}_1\right)^3{}^{\beta}_{\beta}\right|\sum\limits_{\alpha\in I_{2,3}}\left|\left(\mathbf{W}_2\mathbf{B}\right)^3{}^{\alpha}_{\alpha}\right|} = \frac{36\mathbf{i}-27\mathbf{j}}{-27} = \frac{-4\mathbf{i}+3\mathbf{j}}{3},$$

Продовжуючи аналогічно, отримаємо

$$\mathbf{X} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -12\mathbf{i}+9\mathbf{j} & 3 & -9-7\mathbf{k} \\ -21-15\mathbf{k} & -6\mathbf{i} & 15\mathbf{i}-11\mathbf{j} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.4. Застосування серцевинної матриці та її узагальнень для розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Правила Крамера для деяких спеціальних розв'язків систем лінійних рівнянь чи матричних рівнянь над тілом кватерніонів можуть розглядатися як застосування визначникових зображень серцевинних обернених та її узагальнень.

5.4.1. Правило Крамера для деякої системи лінійних рівнянь з обмеженнями. Розглянемо правило Крамера для кватерніонової системи лінійних рівнянь, яка має важливе прикладне значення.

Спочатку відмітимо, що серцевинна обернена має безпосередній зв'язок з оберненою Ботт-Даффіна. Відповідно до [7,11], обернена Ботт-Даффіна до матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ відносно $\mathcal{C}_r(\mathbf{A})$ може бути задана як

$$\mathbf{A}^{(-1)}_{\mathcal{C}_r(\mathbf{A})} = \mathbf{P}_A \left[(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\mathbf{P}_A + \mathbf{I}_n\right]^{-1}.$$

де $(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)\mathbf{P}_A + \mathbf{I}_n$ є невиродженою. Згідно з [7], $\mathbf{A}^{(-1)}_{\mathcal{C}_r(\mathbf{A})}$ співпадає з правою серцевинною оберненою матрицею $\mathbf{A}^{\oplus}$.

Розглянемо наступні лінійні рівняння з обмеженнями

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}_r(\mathbf{A}), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{N}_r(\mathbf{A}), \tag{5.146}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ і $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^n$. Як доведено у [17], це рівняння виникає (у комплексному випадку) в електричних мережах і його рішення визначається наступною лемою (узагальнивши на кватерніонові матриці).

Лема 5.5. *Нехай* $(\mathbf{A}-\mathbf{I}_n)\mathbf{P}_A+\mathbf{I}_n$ *– невироджена. Тоді система рівнянь (5.146) для кожного вектора* $\mathbf{b}$ *має єдиний розв'язок*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{(-1)}_{\mathcal{C}_r(\mathbf{A})}\mathbf{b}, \tag{5.147}$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^{(-1)}_{\mathcal{C}_r(\mathbf{A})})\mathbf{b}. \tag{5.148}$$

Наступна теорема дає правило Крамера для знаходження розв'язку (5.147).

Теорема 5.24. *Припустимо, що матриця* $\mathbf{A}^{(-1)}_{\mathcal{C}_r(\mathbf{A})}$ *існує. Тоді*

$$x_i = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{5.149}$$

де $\widetilde{\mathbf{b}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{b}$ *і матриця* $\mathbf{\Phi}$ *визначається рівністю* (5.151).

Доведення. Нехай $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]^T$ і $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$. Оскільки обернена Ботт-Даффіна $\mathbf{A}^{(-1)}_{\mathcal{C}_r(\mathbf{A})} = \left(a^{(-1)}_{ij}\right)$ співпадає з правою серцевинною оберненою матрицею $\mathbf{A}^{\oplus}$, то її визначникове зображення можемо отримати за Наслідком 3.1. Використаємо представлення (3.14). Тоді для всіх $i = 1, \dots, n$, маємо

$$x_i = \sum_k a^{(-1)}_{ik} b_k = \sum_k a^{\oplus,r}_{ik} b_k = \frac{\sum\limits_k \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_k \left(\left(\mathbf{A}^2 \left(\mathbf{A}^2\right)^*\right)_{k.} (\hat{\mathbf{a}}_{i.})\right)^{\alpha}_{\alpha} b_k}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|^{\alpha}_{\alpha}}, \tag{5.150}$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}$ – i-й рядок $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2)^*$.

Побудуємо матрицю $\mathbf{\Phi} = \phi_{ik}$ таку, що

$$\phi_{ik} = \sum_{\alpha \in I_{s,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_k \left(\left(\mathbf{A}^2 \left(\mathbf{A}^2 \right)^* \right)_{k.} (\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}) \right)_{\alpha}^{\alpha}, \tag{5.151}$$

і позначимо $\widetilde{\mathbf{b}} := \mathbf{\Phi b}$. Тоді підставивши ці позначення у (5.150), одержимо (5.149). $\square$

Очевидно, що розв'язки $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T$ з умови (5.148) покомпонентно можна подати як $y_i = b_i - \widetilde{x}_i$, де $\widetilde{x}_i$ – i-а координата вектор-стовпця $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$.

5.4.2. Розв'язність та правило Крамера для задач кватерніонових матричних наближень з обмеженнями на основі *EP*-серцевинних обернених. Розглянемо наступну задачу кватерніонових матричних наближень з обмеженнями:

$$\|\mathbf{AXB} - \mathbf{C}\| = \min, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \ \ \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{B}^{k_2}), \tag{5.152}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ з $k_1 = \mathrm{Ind}\,\mathbf{A}$, $k_2 = \mathrm{Ind}\,\mathbf{B}$, $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{k_1} = r_1$ і $\mathrm{rank}\,\mathbf{B}^{k_2} = r_2$.

Задача (5.152) може бути названа як *задача кватерніонно-матричної мінімізації з внутрішньою невідомою (inside-unknown minimization quaternion-matrix problem)* (коротко, IUQ-матрична задача).

Як часткові випадки задачі (5.152), розглянемо також наступні:

$$\|\mathbf{AX} - \mathbf{C}\| = \min \qquad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r\mathbf{A}^{k_1}, \tag{5.153}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ з $k_1 = \mathrm{Ind}\,\mathbf{A}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times n}$; та

$$\|\mathbf{XB} - \mathbf{C}\| = \min \quad \text{subject to} \qquad \mathcal{R}_l\mathbf{X} \subset \mathcal{R}_l\mathbf{B}^{k_2}, \tag{5.154}$$

де $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ з $k_2 = \mathrm{Ind}\,\mathbf{B}$ і $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times n}$.

Задачу (5.153) назвемо *задачею кватерніонно-матричної мінімізації з правою невідомою (right-unknown quaternion-matrix)* або RUQ-матричною задачею. Відповідно, задача (5.154) є *задачею кватерніонно-матричної мінімізації з лівою невідомою (left-unknown quaternion-matrix)* або LUQ-матричною задачею.

Теорема 5.25. *Єдиним розв'язком IUQ-матричної задачі* (5.152) *є*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}}\mathbf{C}\mathbf{B}_{\textcircled{\dagger}}. \tag{5.155}$$

Доведення. За умовою $\mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{k_1})$ і $\mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{B}^{k_2})$, тоді існує така матриця $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, що $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{k_1}\mathbf{Y}\mathbf{B}^{k_2}$. За Лемою 1.26, маємо

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \mathbf{P}_1^*, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^*,$$

де $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{r_1\times r_1}$ і $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{H}^{r_2\times r_2}$ є невиродженими матрицями з $r_1 = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{r_1})$, $r_2 = \operatorname{rank}(\mathbf{B}^{r_2})$, та $\mathbf{A}_3 \in \mathbb{H}^{(m-r_1)\times(m-r_1)}$ і $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{H}^{(n-r_2)\times(n-r_2)}$ є нільпотентними індексів k_1 і k_2, відповідно. За Лемою 3.3, маємо

$$\mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}} = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_1^*, \quad \mathbf{B}_{\textcircled{\dagger}} = [(\mathbf{B}^*)^{\textcircled{\dagger}}]^* = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^{-1})^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^*.$$

Нехай

$$\mathbf{P}_1^*\mathbf{Y}\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1^*\mathbf{C}\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix},$$

де, відповідно, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{r_1\times r_2}$, $\mathbf{Y}_2, \mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{r_1\times(n-r_2)}$, $\mathbf{Y}_3, \mathbf{C}_3 \in \mathbb{H}^{(m-r_1)\times r_2}$ та $\mathbf{Y}_4$, $\mathbf{C}_4 \in \mathbb{H}^{(m-r_1)\times(n-r_2)}$.

Далі, проведемо наступні перетворення

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} &= \mathbf{A}^{k_1+1}\mathbf{Y}\mathbf{B}^{k_2+1} \\
&= \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{k_1} & \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_1^*\mathbf{Y}\mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^*)^{k_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2^* & \mathbf{B}_3^* \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^* \\
&= \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{k_1+1} & \mathbf{A}_1\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^*)^{k_2+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2\mathbf{B}_1^* & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^* \\
&= \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Y}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^*,
\end{aligned}$$

де

$$\widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}_1^{k_1+1}\mathbf{Y}_1(\mathbf{B}_1^*)^{k_2+1} + \mathbf{A}_1\mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_3(\mathbf{B}_1^*)^{k_2+1} + \mathbf{A}_1^{k_1+1}\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_2\mathbf{B}_1^* + \mathbf{A}_1\mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_4\mathbf{Z}_2\mathbf{B}_1^*$$

для матриць $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{H}^{(m-r_1)\times r_1}$ і $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{H}^{(n-r_2)\times r_2}$. Таким чином,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{AXB}-\mathbf{C}\|^2 =& \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}_1 & -\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{C}_3 & -\mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ =& \|\widetilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}_1\|^2 + \|\mathbf{C}_2\|^2 + \|\mathbf{C}_3\|^2 + \|\mathbf{C}_4\|^2.\end{aligned}$$

Оскільки $\mathbf{X}$ є розв'язком задачі (5.152) тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{Y}$ є розв'язком

$$\|\mathbf{A}^{k_1+1}\mathbf{Y}\mathbf{B}^{k_2+1} - \mathbf{C}\| = \min .$$

Відмітимо, що

$$\min_{\mathbf{Y}_i \text{ for } i=1,\ldots,4} \|\widetilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}_1\|^2 = 0,$$

тобто, $\|\mathbf{A}^{k_1+1}\mathbf{Y}\mathbf{B}^{k_2+1} - \mathbf{C}\| = \min = \|\mathbf{C}_2\|^2 + \|\mathbf{C}_3\|^2 + \|\mathbf{C}_4\|^2$ для довільних матриць $\mathbf{Y}_i$ для $i = 2, 3, 4$ і

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A}_1^{-(k_1+1)}\mathbf{C}_1(\mathbf{B}_1^*)^{-(k_2+1)} - \mathbf{A}_1^{-k_1}\mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_3 - \mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_2(\mathbf{B}_1^*)^{-k_2} - \mathbf{A}_1^{-k_1}\mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_4\mathbf{Z}_2(\mathbf{B}_1^*)^{-k_2}. \tag{5.156}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =& \mathbf{A}^{k_1}\mathbf{Y}\mathbf{B}^{k_2} = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{k_1} & \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^*)^{k_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^* \\ =& \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{k_1}\mathbf{Y}_1(\mathbf{B}_1^*)^{k_2} + \mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_3(\mathbf{B}_1^*)^{k_2} + \mathbf{A}_1^{k_1}\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_4\mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^*. \end{aligned} \tag{5.157}$$

Підставивши (5.156) в (5.157), кінцево, одержимо, що

$$\begin{aligned}\mathbf{X} =& \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{B}_1^*)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^* = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^*)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^* \\ =& \mathbf{A}^{\oplus}\mathbf{C}\mathbf{B}_{\oplus}\end{aligned}$$

є єдиним розв'язком задачі (5.152). □

Відмітимо, що якщо $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$ або $\operatorname{Ind}\mathbf{B} = 1$ в умовах Теореми 5.25, то права *EP*-серцевинна обернена $\mathbf{A}^{\oplus}$ стає серцевинною оберненою $\mathbf{A}^{\textcircled{\#}}$, а ліва *EP*-серцевинна обернена $\mathbf{B}_{\oplus}$ перетворюється у ліву серцевинну обернену $\mathbf{B}_{\textcircled{\#}}$.

У випадку, коли $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ в умовах задачі (5.152), одержимо RUQ-матричну задачу (5.153) і, застосувавши Теорему 5.25, дамо її розв'язок.

Наслідок 5.10. *Єдиним розв'язком RUQ-матричної задачі* (5.153) *є*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}}\mathbf{C}. \tag{5.158}$$

Для $\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$, очевидно, отримаємо LUQ-матричну задачу (5.154).

Наслідок 5.11. *Єдиним розв'язком LUQ-матричної задачі* (5.154) *є*

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{B}_{\textcircled{\dagger}}. \tag{5.159}$$

Частковими випадками матричних задач (5.153) та (5.154) є векторні задачі:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = \min, \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \tag{5.160}$$

$$\|\mathbf{x}\mathbf{B} - \mathbf{d}\| = \min, \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{R}_l(\mathbf{B}^{k_2}), \tag{5.161}$$

відповідно, де $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $k_1 = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$, $k_2 = \operatorname{Ind}\mathbf{B}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{H}^{n\times 1}$, and $\mathbf{d} \in \mathbb{H}^{1\times n}$.

Наслідок 5.12. *Єдині розв'язки задач* (5.160) *та* (5.161) *можна подати як*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}}\mathbf{c}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}\mathbf{B}_{\textcircled{\dagger}}.$$

Відмітимо, що задача (5.160) зводиться до результатів для невироджених комплексних матриць та матриць індексу один, розглянутих у [251].

Тепер дамо визначникові зображення розв'язків задач апроксимації матриць з обмеженнями.

Теорема 5.26. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *з* $k_1 = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$, $k_2 = \operatorname{Ind}\mathbf{B}$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k_1} = r_1$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{B}^{k_2} = r_2$. *Єдиний розв'язок* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *заданий умовою* (5.155) *покомпонентно можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_1,m}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\beta\in J_{r_2,n}} \left|\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^*\mathbf{B}^{k_2+1}\right|_{\beta}^{\beta}}, \tag{5.162}$$

де $\widetilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}) = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{\Psi}$. *Тут* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ij})$ *і* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{ij})$ *задаються умовами*

$$\phi_{ik} = \sum_{\alpha\in I_{r_1,m}\{k\}} \operatorname{rdet}_k\left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right)_{k.}(\hat{\mathbf{a}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}, \tag{5.163}$$

$$\psi_{lj} = \sum_{\beta\in J_{r_2,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l\left(\left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^*\mathbf{B}^{k_2+1}\right)_{.l}(\check{\mathbf{b}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}, \tag{5.164}$$

де $\check{\mathbf{b}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\check{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^{k_2+1})^*\mathbf{B}^{k_2}$ *і* $\hat{\mathbf{a}}_{i.}$ *–* i*-й рядок* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{k_1}(\mathbf{A}^{k_1+1})^*$.

Доведення. Відповідно до (5.155) та застосувавши визначникові зображення (3.12) для правої $\mathbf{A}^{\oplus} = (a_{ij}^{\oplus,r})$ та (3.13) для лівої $\mathbf{B}_{\oplus} = (b_{ij}^{\oplus,l})$ серцевинних-EP обернених, відповідно, одержимо

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}^{\oplus,r} c_{kl} b_{lj}^{\oplus,l} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,m}\{k\}} \mathrm{rdet}_k \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right)_{k.}(\hat{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha} c_{kl}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,m}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}$$

$$\times \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}\{l\}} \mathrm{cdet}_l \left(\left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^* \mathbf{B}^{k_2+1}\right)_{.l}(\check{\mathbf{b}}_{.\,j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}} \left|\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^* \mathbf{B}^{k_2+1}\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\check{\mathbf{b}}_{.\,j}$ – j-й стовпець матриці $\check{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^{k_2+1})^*\mathbf{B}^{k_2}$ і $\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}$ – i-й рядок $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{k_1}(\mathbf{A}^{k_1+1})^*$.

Якщо побудуємо матриці $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ik})$ та $\mathbf{\Psi} = (\psi_{lj})$ за умовами (5.163) та (5.164), відповідно, тоді, поклавши $\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{\Psi}$, одержимо (5.162).

$\square$

В окремих випадках, коли $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ чи $\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$, одержимо наступні наслідки.

Наслідок 5.13. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = k_1$ *і* $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{k_1} = s$. *Єдиний розв'язок* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *задачі* (5.153), *що задається формулою* (5.158), *покомпонетно можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{s,m}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\widetilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}) = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}$. *Тут матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{il})$ *така, що*

$$\phi_{il} = \sum_{\alpha \in I_{s,m}\{l\}} \mathrm{rdet}_l \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right)_{l.}(\hat{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}$ – i*-й рядок* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{k_1}(\mathbf{A}^{k_1+1})^*$.

Наслідок 5.14. *Нехай* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\mathrm{Ind}\,\mathbf{B} = k_2$ *і* $\mathrm{rank}\,\mathbf{B}^{k_2} = s$. *Єдиний розв'язок* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *задачі* (5.154), *що задається умовою* (5.159), *покомпонентно можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\sum\limits_{\beta \in J_{s,n}} \left|\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^* \mathbf{B}^{k_2+1}\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\widetilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}) = \mathbf{C}\mathbf{\Psi}$. *Тут матриця* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{lj})$ *така, що*

$$\psi_{lj} = \sum_{\beta \in J_{s,n}\{l\}} \mathrm{cdet}_l \left(\left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^* \mathbf{B}^{k_2+1} \right)_{.l} (\check{\mathbf{b}}_{.j}) \right)_\beta^\beta,$$

де $\check{\mathbf{b}}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\check{\mathbf{B}} = \left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^* \mathbf{B}^{k_2}$.

Відмітимо, що у комплексному випадку одержимо наступний наслідок.

Наслідок 5.15. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *з* $k_1 = \mathrm{Ind}\,\mathbf{A}$, $k_2 = \mathrm{Ind}\,\mathbf{B}$, $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}^{k_1} = r_1$ *і* $\mathrm{rank}\,\mathbf{B}^{k_2} = r_2$.

(i) *Єдиний розв'язок* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *з умови* (5.155) *задається як*

$$x_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,m}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1} \left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}} \left|\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^* \mathbf{B}^{k_2+1}\right|_\beta^\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}) = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{\Psi}$. *Тут матриці* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ik})$ *та* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{lj})$ *такі, що*

$$\phi_{ik} = \sum_{\alpha \in I_{r_1,m}\{k\}} \left| \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1} \left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^* \right)_{k.} (\hat{\mathbf{a}}_{i.}) \right) \right|_\alpha^\alpha, \tag{5.165}$$

$$\psi_{lj} = \sum_{\beta \in J_{r_2,n}\{l\}} \left| \left(\left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^* \mathbf{B}^{k_2+1} \right)_{.l} (\check{\mathbf{b}}_{.j}) \right) \right|_\beta^\beta, \tag{5.166}$$

де $\check{\mathbf{b}}_{.j}$ – j*-й стовпець матриці* $\check{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^{k_2+1})^*\mathbf{B}^{k_2}$ *і* $\hat{\mathbf{a}}_{i.}$ – i*-й рядок* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{k_1}(\mathbf{A}^{k_1+1})^*$.

(ii) *Єдиний розв'язок* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *з умови* (5.158) *покомпонентно можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,m}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1} \left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha},$$

де $\widetilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}) = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}$ *і матриця* $\mathbf{\Phi}$ *визначається умовою* (5.165).

(iii) *Єдиний розв'язок* $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *з умови* (5.159) *покомпонентно можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}} \left|\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)^* \mathbf{B}^{k_2+1}\right|_\beta^\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}) = \mathbf{C}\mathbf{\Psi}$, *а матриця* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{ij})$ *визначається умовою* (5.166).

5.4.3. Приклад правила Крамера задачі кватерніонно-матричної мінімізації. Розглянемо IUQ-матричну задачу (5.152) із заданими матрицями

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & -\mathbf{j} & 0 & \mathbf{i} \\ -1-\mathbf{j} & \mathbf{i}+\mathbf{k} & \mathbf{j} & 1+\mathbf{j} \\ \mathbf{k} & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{i}+\mathbf{k} & 1-\mathbf{j} & \mathbf{i} & \mathbf{i}-\mathbf{k} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & -\mathbf{j} \\ 0 & \mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 0 & \mathbf{j} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{j} & 0 \\ 1 & \mathbf{k} & \mathbf{i} \\ 0 & -\mathbf{i} & \mathbf{k} \end{bmatrix}. \quad (5.167)$$

За безпосереднім обчисленням, маємо

$$\mathbf{A}^3(\mathbf{A}^3)^* = \begin{bmatrix} 3 & 6\mathbf{i}+4\mathbf{k} & -4-3\mathbf{j} & -4-6\mathbf{j} \\ -6\mathbf{i}-4\mathbf{k} & 19 & 4\mathbf{i}+13\mathbf{k} & 19\mathbf{k} \\ -4+3\mathbf{j} & -4\mathbf{i}-13\mathbf{k} & 10 & 13+4\mathbf{j} \\ -4+6\mathbf{j} & -19\mathbf{k} & 13-4\mathbf{j} & 19 \end{bmatrix},$$

$$\left(\mathbf{B}^2\right)^*\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2\mathbf{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -2\mathbf{k} & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = 3$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^3 = \operatorname{rank}\mathbf{A}^2 = 2$, $\operatorname{rank}\mathbf{B}^2 = \operatorname{rank}\mathbf{B} = 2$, та $k_1 = \operatorname{Ind}\mathbf{A} = 2$, $k_2 = \operatorname{Ind}\mathbf{B} = 1$. Так як,

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^2(\mathbf{A}^3)^* = \begin{bmatrix} 3\mathbf{k} & -4+6\mathbf{j} & 3\mathbf{i}-4\mathbf{k} & 6\mathbf{i}-4\mathbf{k} \\ 3+4\mathbf{j} & 13\mathbf{i}-4\mathbf{k} & -10\mathbf{j} & 4-13\mathbf{j} \\ \mathbf{i}-3\mathbf{k} & 2-9\mathbf{j} & -6\mathbf{i}+3\mathbf{k} & -9\mathbf{i}+2\mathbf{k} \\ 4\mathbf{i}-3\mathbf{k} & -4-13\mathbf{j} & -10\mathbf{i} & -13\mathbf{i}-4\mathbf{k} \end{bmatrix},$$

то за формулою (5.163)

$$\phi_{11} = \sum_{\alpha\in I_{2,4}\{1\}} \operatorname{rdet}_1\left(\left(\mathbf{A}^3\left(\mathbf{A}^3\right)^*\right)_{1.}(\hat{\mathbf{a}}_{1.})\right)_\alpha^\alpha = \operatorname{rdet}_1\begin{bmatrix} 3\mathbf{k} & -4+6\mathbf{j} \\ -6\mathbf{i}-4\mathbf{k} & 19 \end{bmatrix}$$
$$+\operatorname{rdet}_1\begin{bmatrix} 3\mathbf{k} & 3\mathbf{i}-4\mathbf{k} \\ -4+3\mathbf{j} & 10 \end{bmatrix} + \operatorname{rdet}_1\begin{bmatrix} 3\mathbf{k} & 6\mathbf{i}-4\mathbf{k} \\ -4+6\mathbf{j} & 19 \end{bmatrix} = 15\mathbf{k}.$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 15\mathbf{k} & 5\mathbf{j} & -10\mathbf{i} & 5\mathbf{i} \\ -10 & 5\mathbf{i} & -15\mathbf{j} & -5\mathbf{j} \\ -15\mathbf{i}+10\mathbf{k} & 5-5\mathbf{j} & -15\mathbf{i}-10\mathbf{k} & -5\mathbf{i}+5\mathbf{k} \\ 10\mathbf{k} & -5\mathbf{j} & -15\mathbf{i} & -5\mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

Подібним чином, з того, що

$$\check{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^2)^*\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2\mathbf{i} & 0 \\ \mathbf{i}-\mathbf{k} & 0 & 1-\mathbf{j} \\ 0 & 2\mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}.$$

за формулою (5.164) знайдемо

$$\psi_{11} = \sum_{\beta \in J_{2,3}\{1\}} \mathrm{cdet}_1 \left(\left(\left(\mathbf{B}^2\right)^* \mathbf{B}^2\right)_{.l} (\check{\mathbf{b}}_{.1}) \right)_\beta^\beta = \mathrm{cdet}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{i}-\mathbf{k} & 2 \end{bmatrix} + \mathrm{rdet}_1 \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbf{k} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0,$$

а також всі елементи матриці $\mathbf{\Psi}$. Тоді

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & -4\mathbf{i} & 0 \\ 4\mathbf{i}-4\mathbf{k} & 0 & 4-4\mathbf{j} \\ 0 & 4\mathbf{j} & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} -40\mathbf{i}-40\mathbf{k} & -40+40\mathbf{j} & 40+40\mathbf{j} \\ 60-60\mathbf{j} & -60\mathbf{i}-60\mathbf{k} & -60\mathbf{i}+60\mathbf{k} \\ -20\mathbf{i}-100\mathbf{k} & -20+100\mathbf{j} & 100+20\mathbf{j} \\ -60\mathbf{i}-60\mathbf{k} & -60+60\mathbf{j} & 60+60\mathbf{j} \end{bmatrix},$$

$$\sum_{\alpha \in I_{2,4}} \left| \mathbf{A}^3 \left(\mathbf{A}^3\right)^* \right|_\alpha^\alpha = 25, \quad \sum_{\beta \in J_{2,3}} \left| \left(\mathbf{B}^2\right)^* \mathbf{B}^2 \right|_\beta^\beta = 8,$$

то за формулою (5.162),

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.2\mathbf{i}-0.2\mathbf{k} & -0.2+0.2\mathbf{j} & 0.2+0.2\mathbf{j} \\ 0.3-0.3\mathbf{j} & -0.3\mathbf{i}-0.3\mathbf{k} & -0.3\mathbf{i}+0.3\mathbf{k} \\ -0.1\mathbf{i}-0.5\mathbf{k} & -0.1+0.5\mathbf{j} & 0.5+0.1\mathbf{j} \\ -0.3\mathbf{i}-0.3\mathbf{k} & -0.3+0.3\mathbf{j} & 0.3+0.3\mathbf{j} \end{bmatrix}$$

є єдиним розв'язком IUQ-матричної задачі (5.152) з матрицями, що задаються умовою (5.167).

5.4.4. Висновки. У цьому розділі розглядаються узагальнені обернені розв'язки з використанням узагальненої оберненої матриці Дразіна, зважених узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна, серцевинної оберненої і її узагальнень дають розв'язки матричних рівнянь з різного роду обмеженнями. Використовуючи визначникові зображення узагальнених обернених матриць Дразіна, зважених Мура-Пенроуза і Дразіна, які були отримані у 2 розділі, серцевинної оберненої та її узагальнень, що розлядалися у розділі3, отримано наступні результати.

1. Побудовані визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з обмеженнями, а також розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь.
2. Побудовані аналоги правила Крамера для Мура-Пенроуза зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями, а також його часткових випадків.
3. Побудовані розв'язки деяких задач кватернінно-матричної мінімізації та отримано правило Крамера для їх знаходження.

Результати цього розділу опубліковані у роботах [107–110, 112, 115, 116, 119, 126, 131, 137, 138, 140]

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів і, в першу чергу, побудові їх визначникових зображень, а також застосуванню отриманих визначникових зображень до розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Основні результати дисертації наступні:

1. Отримано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених для матриць над тілом кватерніонів, використовуючи раніше введені здобувачем стовпцеві і рядкові некомутативні визначники. Досліджені нові властивості стовпцевих і рядкових визначників, тим самим внесено значний вклад в розвиток їх теорії.
2. Доведено нові теореми в теорії матриць над тілом кватерніонів, такі як теорема про зважений сингулярний розклад матриці, про граничне зображення зваженої матриці Мура-Пенроуза, теорему про загальну алгебричну структуру зваженої матриці Дразіна.
3. Розроблено новий гранично-ранговий метод, який застосовується для побудови визначникового зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза матриць. Для кватерніонових узагальненої оберненої матриці Дразіна, зважених узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна цей метод застосовується в особливих випадках, пов'язаних з ермітовістю відповідних матриць.
4. За допомогою гранично-ранговий методу отримані нові визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених.
5. Поняття та властивості серцевинної оберненої матриці та її узагальнень розширено до кватерніонових матриць. Доведені теореми про характери-

зацію лівої W-зваженої EP-серцевинної оберненої матриці, зваженої MPD-оберненої матриці.

6. Побудовані визначникові зображення кватерніонових правої та лівої серцевинних обернених, правої та лівої EP-серцевинних обернених, DMP- та MPD-обернених, CMP-оберненої, зважених правої та лівої EP-обернених, зважених DMP- та MPD-обернених і зваженої CMP-оберненої.
7. Новизна отриманих визначникових зображень серцевинної оберненої матриці та її узагальнень зберігається і у випадку їх побудови для комплексних матриць.
8. Побудовані аналоги правила Крамера для кватерніонових двостороннього матричного рівняння, узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливих випадків з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю. Отримане правило Крамера зберігає свою новизну як прямого методу знаходження розв'язку комплексного узагальненого матричного рівняння Сильвестра.
9. Одержані визначникові зображення загального розв'язку системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь та усіх його часткових випадків, а також загального, ермітового, η-(косо-)ермітового розв'язків системи з, відповідно, $*$-ермітовістю чи η-ермітовістю.
10. Одержані визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з обмеженнями, а також розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь.
11. Одержані визначникові зображення Мура-Пенроуза зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями, а також його часткових випадків.
12. Одержані визначникові зображення Дразіна зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння та його часткових випадків з відповідними обмеженнями.

13. Одержано розв'язки деяких задач кватернінно-матричної мінімізації та побудовано правило Крамера для їх знаходження.

Отримані результати є внеском у теорію некомутативних визначників, зокрема у теорію стовпцевих і рядкових визначників, у теорію матриць над тілом кватерніонів, у теорію узагальнених обернених матриць та їх застосувань. Результати роботи можуть бути використанні в теорії матричних рівнянь типу Сильвестра та їх систем, як над тілом кватерніонів, так і над полем комплексних (дійсних) чисел, в теорії диференціальних матричних рівнянь, в задачах з матричних наближень та апроксимації.

Список використаних джерел

[1] Adler, S.L.: Quaternionic quantum mechanics and quantum fields, Oxford University Press, New York, 1995.

[2] Anderson, Jr. W.N., Duffin, R.J., Trapp, G.E.: Matrix operations induced by network connections. SIAM Journal on Control **13**(2), 446–461 (1975)

[3] Aslaksen, H.: Quaternionic determinants. Math. Intellig. **18**(3), 57–65 (1996)

[4] Baker, A.: Right eigenvalues for quaternionic matrices: a topological ap- proach. Linear Algebra Appl. **286**, 303-309 (1999).

[5] Baksalary, J.K., Kala, R.: The matrix equation AX-YB=C, Linear Algebra Appl. **25**, 41-43 (1979).

[6] Baksalary, J.K., Kala, R.: The matrix equation AXB + CYD = E. Linear Algebra Appl. **30**, 141–147 (1980)

[7] Baksalary, O.M., Trenkler, G.: Core inverse of matrices. Linear Multilinear Algebra 58(6), 681–697 (2010)

[8] Bapat, R.B., Bhaskara, K.P.S., Manjunatha Prasad, K.: Generalized inverses over integral domains. Linear Algebra Appl. **140**, 181–196 (1990)

[9] Barnett, S.: Matrices in Control Theory. Van Nostrand Reinhold, London (1971)

[10] Ben-Israel, A.: Generalized inverses of marices: a perspective of the work of Penrose. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **100**, 401–425 (1986)

[11] Ben-Israel, A., Greville, T. N. E.: Generalized inverses: Theory and Applications, second ed. Springer, New York (2003)

[12] Ben-Israel, A.: A Cramer rule for least-norm solutions of consistent linear equations Linear Algebra Appl. **43**, 223–226 (1982)

[13] Bender, D.J.: Lyapunov-like equations and reachability/observability Gramians for descriptor systems. IEEE Trans. Automat. Control **32**(4), 343–348 (1987)

[14] Bihan, N.L., Mars, J.: Singular value decomposition of quaternion matrices: A new tool for vector-sensor signal processing, Signal Processing **84**(7), 1177-1199 (2004)

[15] Bjerhammar, A.: Application of calculus of matrices to method of least squares; with special references to geodetic calculations. Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm. **49**, 1-86 (1951).

[16] Bjerhammer, A.: Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations. Bull. Geodesique 52, 188–220 (1951)

[17] Bott, R., Duffin, R. J.: On the algebra of networks. Trans. Amer. Math. Soc. **74**, 99–109 (1953)

[18] Brenner, J.L.: Matrices of quaternions. Pac. J. Math. **1**, 329-335 (1951).

[19] Bu, C., Zhang, K., Zhao, J.: Representation of the Drazin inverse on solution of a class singular differential equations. Linear Multilinear Algebra **59**, 863-877 (2011)

[20] Buxton, J.N., Churchouse, R.F., Tayler, A.B.: Matrices Methods and Applications. Clarendon Press, Oxford (1990)

[21] Cai, Z.F., Kou, K.I.: Laplace transform: a new approach in solving linear quaternion differential equations, Math. Meth. Appl. Sci. (2017).

[22] Campbell, S.L., Meyer, C.D.: Generalized inverse of linear transformations, Corrected reprint of the 1979 original. Dover Publications, Inc., New York (1991)

[23] Campbell, S.L., Control problem structure and the numerical solution of linear singular systems. Math. Control Signals Syst. **1**(1), 73–87 (1988)

[24] Campbell, S.L., Meyer Jr, C.D., Rose, N.J.: Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, SIAM J. Appl. Math. **31**, 411–425 (1976)

[25] Campos, J., Mawhin, J.: Periodic solutions of quaternionic-values ordinary differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. **185**, S109-S127 (2006)

[26] Cao, W.: Solvability of a quaternion matrix equation. Appl. Math. J. Chinese Univ. Set. B **17**(4), 490-498 (2002)

[27] Chang, X.W., Wang, J.S.: The symmetric solution of the matrix equations $AX + XA = C$, $AXA^T + BYB^T = C$ and $(A^TXA, B^TXB) = (C, D)$. Linear Algebra Appl. **179**, 171-189 (1993)

[28] Chen, C., Schonfeld, D.: Pose estimation from multiple cameras based on Sylvester's equation. Comput. Vis. Image Underst. **114**, 652–666 (2010)

[29] Chen, L.: Definition of determinant and Cramer solutions over quaternion field. Acta Math. Sinica (N.S.) **7**, 171–180 (1991)

[30] Chen, L.: Inverse matrix and properties of double determinant over quaternion field. Sci. China, Ser. A **34**, 528–540 (1991)

[31] Chen, Y.: A Cramer rule for solution of the general restricted linear equation. Linear Multilinear Algebra **34**, 177–186 (1993)

[32] Cheng, W., Feng, L., Yu, S.: Simultaneous real diagonalization of rectangular quaternionic matrix pairs and its algorithm. Comput. Math. Appl. **56**, 1538–1544 (2008)

[33] Chipman, J.S.: Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices. Symposium Proceedings: Texas Technological College. Mathematics Series **4**, 114–176 (1968)

[34] Cline, R.E., Greville, T.N.E.: A Drazin inverse for rectangular matrices. Linear Algebra Appl. **29**, 53-62 1980.

[35] Cockle, J.: On systems of algebra involving more than one imaginary. Phil. Mag. **35**, 434-435 (1849).

[36] Cohen, N., De Leo, S.: The quaternionic determinant. Elec. J. Lin. Alg. 2000, Vol.7, pp. 100–111.

[37] Dai, H.: On the symmetric solution of linear matrix equation, Linear Algebra Appl. **131**, 1–7 (1990).

[38] H. Dai, P. Lancaster, Linear matrix equations from an inverse problem of vibration theory, Linear Algebra. Appl. 246 (1996) 31–47.

[39] Dajić, A., Koliha, J.J.: The weighted g-Drazin inverse for operators. J. Aust. Math. Soc. 82, 163–181 (2007)

[40] Deng, C., Yu A.: Relationships between DMP relation and some partial orders. Appl. Math. Comput. **266**, 41–53 (2015)

[41] De Leo, S., Rodrigues, W. A.: Quantum Mechanics: From complex to complexified quaternions. Int. J. Theor. Phys. **36**, 2725-2757 (1997)

[42] Dieudonne, J., Les determinantes sur un corps non-commutatif. Bull. Soc. Math. France **71**, 27—45 (1943)

[43] Dixon, G.M.: Division Algebras: Octonions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics. Kluwer Academic Publishers, Boston (1994)

[44] Djordjević, D.S.: Explicit solution of the operator equation $A^*X + X^*A = B$. J. Comput. Appl. Math. **200**, 701-704 (2007)

[45] Dmytryshyn, A., Kagstrom, B.: Coupled Sylvester-type matrix equations and block diagonalization. SIAM J. Matrix Anal. Appl. **36**(2), 580-593 (2015)

[46] Doty, K.L., Melchiorri, C., Bonivento, C.: A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics. Int. J. Robotics Res. **12**(1), 1–19 (1993)

[47] Dray, T., Manogue, C. A.: The octonionic eigenvalue problem. Adv. Appl. Clifford Alg. **8**(2), 341–364 (1998)

[48] Drazin, M.P.: Pseudoinverse in associative rings and semigroups. Am. Math. Monthly **65**, 506-514 (1958)

[49] Dyson, F.J.: Quaternion determinants. Helvetica Phys. Acta **45**, 289–302 (1972)

[50] Fan, J.: Determinants and multiplicative functionals on quaternion matrices. Lin. Alg. Appl. **369**, 193–201 (2003)

[51] Farenick, D.R., Pidkowich, B.A.F.: The spectral theorem in quaternions. Linear Algebra Appl. **371**, 75-102 (2003)

[52] Farid, F.O., Wang, Q.W., Zhang, F.: On the eigenvalues of quaternion matrices. Linear Multilinear Algebra **59**(4), 451-473 (2011)

[53] Ferreyra, D.E., Levis, F.E., Thome, N.: Revisiting the core EP inverse and its extension to rectangular matrices. Quaest. Math. **41**, 265-281 (2018)

[54] Fredholm, I.: Sur une classe d'equations fonctionnelles. Acta. Math. **27**, 365–390 (1903)

[55] Finkelstein, D., Jauch, J.M., Speiser, D.: Notes on quaternion quantum mechanics. In: Logico-algebraic approach to quantum mechanics, pp, 367–421. Reidel, Dordrecht (1979)

[56] Futorny, V., Klymchuk, T., Sergeichuk, V.V.: Roth's solvability criteria for the matrix equations $AX - \widehat{X}B = C$ and $X - A\widehat{X}B = C$ over the skew field of quaternions with an involutive automorphism $q \to \widehat{q}$. Linear algebra Appl. **510**, 246-258 (2016)

[57] Gabriel, R.,: Das verallgemeinerte inverse eineer matrix, deren elemente einem beliebigen Körper angehören. Journal für die Reine Angewandte Mathematik **234**, 107–122 (1967)

[58] Gajić, Z., Quresh, M.T.J.: Lyapunov matrix equation in system stability and control. Mathematics in Science and Engineering, vol. 195. Academic Press, San Diego (1995)

[59] Gao, Y., Chen, J.: Pseudo core inverses in rings with involution. Commun. Algebra **46**(1), 38–50 (2018)

[60] Gao, Y., Chen, J., Patricio, P.: Continuity of the core-EP inverse and its applications. Linear Multilinear Algebra (2019). doi:10.1080/03081087.2019.1608899.

[61] Gao, Y., Chen, J., Patricio, P.: Representations and properties of the W-weighted core-EP inverse. Linear Multilinear Algebra (2018). doi: 10.1080/03081087.2018.1535573

[62] Gross, J.: Nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $AXA^* = B$-revisited. Linear Algebra Appl. **321**, 123-129 (2000)

[63] Gu, C., Wang, G.: Condensed Cramer rule for solving restricted matrix equations, Appl. Math. Comput. **183**, 301–306 (2006)

[64] Hamilton, W.R.: Lectures on Quaternions. Hodges and Smith, Dublin (1853)

[65] Handson, A., Hui, H.: Quaternion frame approach to streamline visualization. IEEE Tran. Vis. Comput. Grap. **1**, 164-172 (1995)

[66] Hartwig, R.E., Levine, J.: Applications of Drazin inverse to the Hill cryptographic systems, Part III. Cryptologia **5**, 67-77 (1981)

[67] Hartwig, R.E., Hall. F.: Applications of the Drazin inverse to Cesaro-Neumann iterations, pp. 145-195. In: Campbell, S.L.(d.), Recent Applications of Generalized Inverses, **66**. Pitman, London (1982)

[68] Hartwig, R.E., Wang, G., Wei, Y.M.: Some additive results on Drazin inverse. Appl. Math. Comput. **322**, 207-217 (2001)

[69] He, Z.H., Wang, Q.W.: A real quaternion matrix equation with applications. Linear Multilinear Algebra **61**(6), 725–740 (2013)

[70] He Z.H., Wang Q.W.: The η-bihermitian solution to a system of real quaternion matrix equations. Linear Multilinear Algebra. **62**(11), 1509-1528 (2014)

[71] He, Z.H., Wang, Q.W. Zhang, Y.: Simultaneous decomposition of quaternion matrices involving η-Hermicity with applications. Appl. Math. Comput. **298**, 13-35 (2017)

[72] Henk Don, F.J.: On the symmetric solutions of a linear matrix equation, Linear Algebra Appl. **93**, 1-7 (1987)

[73] Hilbert, D.: Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, In: Pietsch, A. (ed) Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Teubner-Archiv zur Mathematik, vol 11. Vieweg, Teubner Verlag (1989)

[74] Hodeges, J.H.: Some matrix equations over a finite field. Ann. Mat. Pura Appl. **44**(1), 245–250 (1957)

[75] Horn, R.A., Johnson, C.R.: Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge etc. (1985)

[76] Horn, R.A., Zhang, F.: A generalization of the complex Autonne-Takagi factorization to quaternion matrices. Linear Multilinear Algebra **60**(11-12), 1239-1244 (2012)

[77] Huang, J.P., Lu, Y.S., Xu, K.J.: On cyclic matrix solution of unified algebraic Lyapunov equation and its optimal approximation over quaternion field. J. Southwest China Normal Univ (Nat Sci Ed) **41**, 1-5 (2016)

[78] Huang, L., So, W.: On left eigenvalues of a quaternionic matrix. Linear Algebra Appl. **323**, 105-116 (2001)

[79] Hurwitz, W.A.: On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation. Trans. Am. Math. Soc. **13**, 405–418 (1912)

[80] Jaimoukha, I.M., Kasenally, E.M.: Krylov subspace methods for solving large Lyapunov equations. SIAM J. Numer. Anal. **31**, 227–251 (1994)

[81] Ji, J.: Explicit expressions of the generalized inverses and condensed Cramer rule. Linear Algebra Appl. **404**, 183-192 (2005)

[82] Ji, J., Wei, Y.: The core-EP, weighted core-EP inverse of matrices and constrained systems of linear equations. Commun. Math. Res. (2020). doi:10.4208/cmr.2020-0028

[83] Jia, Z.G., Ng, M.K., Song, G.J.: Robust quaternion matrix completion with applications to image inpainting. Numer. Linear Algebra Appl. **26**(4):e2245 (2019)

[84] Jiang, T.: An algorithm for quaternionic linear equations in quaternionic quantum theory. J. Math. Phys. **45**:4218 (2004)

[85] Jiang, T.: An algorithm for eigenvalues and eigenvectors of quaternion matrices in quaternionic quantum mechanics. J. Math. Phys. **45**:3334 (2004)

[86] Jiang, T.: Cramer rule for quaternionic linear equations in quaternionic quantum theory, Rep. Math. Phys. **57**(3), 463-467 (2006)

[87] Jiang, T., Chen, L.: Algebraic algorithms for least squares problem in quaternionic quantum theory. Comput. Phys. Commun. **176**, 481–485 (2007)

[88] Jiang, T., Wei, M.S.: On solutions of the matrix equations $X - AXB = C$ and $X - A\overline{X}B = C$. Linear Algebra Appl. **367**, 225-233 (2003)

[89] Jiang, T., Wei, M.S.: On a solution of the quaternion matrix equation $X - A\widetilde{X}B = C$ and its application. Acta Mathematica Sinica **21**(3), 483-490 (2005)

[90] Jiang, T., Zhang, Z., Jiang, Z.: A new algebraic technique for quaternion constrained least squares problems. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**:14 (2018)

[91] Galba, E.F.: Weighted singular decomposition and weighted pseudoinversion of matrices. Ukr. Math. J. **48**(10), 1618-1622 (1996)

[92] Gasull, A., Llibre, J., Zhang, X.: One-dimensional quaternion homogeneous polynomial differential equations. J. Math. Phys. **50**(8):082705 (2009)

[93] Gibbon, J.D., Holm, D.D., Kerr, R.M., Roulstone, I.: Quaternions and particle dynamics in the Euler fluid equations. Nonlinearity **19**, 1969-1983 (2006)

[94] Gupta, S.: Linear quaternion equations with application to spacecraft attitude propagation. IEEE Aerospace conference proceedings **1**, 69-76 (1998)

[95] G̈urlebeck, K., Sprössig, W.: Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers. Wiley (1997)

[96] Khan, I.A., Wang, Q.W.: The Drazin inverses in an arbitrary semiring. Linear Multilinear Algebra **59**(9), 1019-1029 (2011)

[97] Khatri, C.G., Mitra, S.K.: Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations. SIAM J. Appl. Math. **31**(4), 579-585 (1976)

[98] Ke, Y., Wang, L., Chen, J.: The core inverse of a product and 2×2 matrices. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **42**, 51-66 (2019)

[99] Kleyn, A., Kyrchei, I.I.: Relation of row-column determinants with quasi-determinants of matrices over a quaternion algebra. In: Kyrchei, I.I.(ed.) Advances in Linear Algebra Research, pp. 299-324. Nova Sci. Publ., New York (2015)

[100] Kou, K.I., Xia, Y.H.: Linear quaternion differential equations: basic theory and fundamental results. Stud Appl Math. **141**(1), 3-45 (2018)

[101] Kyrchei, I.I.: Analogs of the adjoint matrix for generalized inverses and correspon-ding Cramer rules. Linear Multilinear Algebra **56**(4), 453-469 (2008)

[102] Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for some quaternion matrix equations. Appl. Math. Comput. **217**(5), 2024-2030 (2010).

[103] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules. Linear Multilinear Algebra **59**(4), 413-431 (2011)

[104] Kyrchei, I.I.: The theory of the column and row determinants in a quaternion linear algebra. In: Baswell, A.R.(ed.) Advances in Mathematics Research **15**, pp. 301-359. Nova Sci. Publ., New York (2012)

[105] Kyrchei, I.I.: Analogs of Cramer's rule for the minimum norm least squares solutions of some matrix equations. Appl. Math. Comput. **218**, 6375-6384 (2012)

[106] Kyrchei, I.I.: Explicit representation formulas for the minimum norm least squares solutions of some quaternion matrix equations. Linear Algebra Appl. **438**(1), 136-152 (2013)

[107] Kyrchei, I.I.: Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solutions of some matrix and differential matrix equations. Appl. Math. Comput. **219**, 7632-7644 (2013)

[108] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin inverse over the quater-nion skew field with applications to some matrix equations. Appl. Math. Comput. **238**, 193–207 (2014)

[109] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field. Appl. Math. Comput. **264**(1), 453-465 (2015)

[110] Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for generalized inverse solutions. In: Kyrchei, I.I.(ed.) Advances in Linear Algebra Research, pp. 79-132. Nova Sci. Publ., New York (2015)

[111] Kyrchei, I.I.: The column and row immanants of matrices over a split quaternion algebra. Adv. Appl. Clifford Algebras **25**(3), 611-619 (2015)

[112] Kyrchei, I.I.: Explicit determinantal representation formulas of W-weighted Dra-zin inverse solutions of some matrix equations over the quaternion skew field. Math. Probl. Eng. **2016**:8673809 (2016)

[113] Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for some Hermitian coquaternionic matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **27**(3), 2509–2529 (2017)

[114] Kyrchei, I.I.: Weighted singular value decomposition and determinantal representations of the quaternion weighted Moore–Penrose inverse. Appl. Math. Comput. **309**, 1-16 (2017)

[115] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin and W-weighted Drazin inverses over the quaternion skew field with applications. In: Griffin, S.(ed.) Quaternions: Theory and Applications, pp.201-275. Nova Sci. Publ., New York (2017)

[116] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the quaternion weighted Moore-Penrose inverse and its applications, In: Baswell, A.R.(ed.) Advances in Mathema-tics Research **23**, pp. 35-96. Nova Sci. Publ., New York (2017)

[117] Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for the system of two-sided matrix equations and of its special cases. In: Yasser, H.A.(ed.) Matrix Theory-Applications and Theorems, pp. 3-20. IntechOpen, London (2018)

[118] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions and Hermitian solutions to some system of two-sided quaternion matrix equations. J. Math. **2018**:6294672 (2018)

[119] Kyrchei, I.I.: Explicit determinantal representation formulas for the solution of the two-sided restricted quaternionic matrix equation. J. Appl. Math. Comput. **58**(1-2), 335-365 (2018)

[120] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions to systems of quaternion matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**(1):23 (2018)

[121] Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for Sylvester quaternion matrix equation and its special cases. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**(5):90 (2018)

[122] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of general and (skew-)Hermitian solutions to the generalized Sylvester-type quaternion matrix equation. Abstr. Appl. Anal. **2019**:5926832 (2019)

[123] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions to systems of two-sided quaternion matrix equations. Linear Multilinear Algebra (2019). doi:10.1080/03081087.2019.1614517

[124] Kyrchei, I.I.: Cramer's Rules of η-(skew-)Hermitian solutions to the quaternion Sylvester-type matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**(3):56 (2019)

[125] Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for the system of quaternion matrix equations with η-Hermicity. 4open **2**:24 (2019)

[126] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the core inverse and its generalizations with applications, J. Math. **2019**:1631979 (2019)

[127] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the quaternion core inverse and its generalizations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**(5):104 (2019).

[128] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the weighted core-EP, DMP, MPD, and CMP inverses. J. Math. **2020**:9816038 (2020)

[129] Kyrchei, I.I.: Weighted quaternion core-EP, DMP, MPD, and CMP inverses and their determinantal representations. RACSAM **114**:198 (2020)

[130] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the core inverse and its generalizations, In: Functional Calculus. IntechOpen, London (2019). doi:10.5772/intechopen.89341

[131] Kyrchei, I.I., Mosic, D., Stanimirovic, P.S.: Solvability of new constrained quater-nion matrix approximation problems based on core-EP inverses, Adv. Appl. Clifford Algebras **31**:3 (2021).

[132] Kyrchei, I.I.: Determinantal representation of the inverse matrix over the quaternion skew field. Abstracts of 5th International Algebraic Conference in Ukraine (2005, June 20-27, Odessa, Ukraine), P.120-121.

[133] Kyrchei, I.I.: Determinantal representation of the Moore-Penrose inverse matrix over quaternion skew field. Abstracts of 6th International Algebraic Conference in Ukraine (2007, July 01-07, Kamyanets-Podilsky, Ukraine), P.120-121.

[134] Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for some two-sided quaternionic matrix equations. Abstracts of 7th International Algebraic Conference in Ukraine (2009, August 18-23, Kharkiv, Ukraine), P.82-83.

[135] Kyrchei, I.I.: Explicit representation formulas for the least squares solutions of the quaternion matrix equation AXB=D. Abstracts of the 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 60th anniversary of Prof. V. M. Usenko (2011, July 5-12, Lugansk, Ukraine), P.171.

[136] Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin inverse matrix over a quaternion skew field. Abstracts of International Conference on Algebra (ICA) dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov (2012, August 20-26, Kyiv, Ukraine), P.78.

[137] Kyrchei, I.I.: Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solution of the quaternion matrix equation AXB=D. Abstracts of the 9 th International Algebraic Conference in Ukraine (2013, July 8-13, Lviv, Ukraine), P.108.

[138] Kyrchei, I.I.: Determinantal representation of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field. Abstracts of X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (2015, August 20-27, Odessa, Ukraine), P.60.

[139] Kyrchei, I.I.: Analogues of the adjugate matrix for the weighted Moore-Penrose inverse. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2015, 25-28 серпня, Дрогобич, Україна), С.92.

[140] Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for two-sided restricted quaternionic matrix equation. Abstracts of 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko (2017, July 03-07, Kyiv, Ukraine), P.74.

[141] Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for Sylvester-type quaternion matrix equations. Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the

215th anniversary of V. Bunyakovsky (2019, July 02–06, Vinnytsia, Ukraine), P.63.

[142] Kyrchei, I.I.: Quaternion core inverse and its generalizations. Abstracts of XI International Skorobohatko Mathematical Conference (2020, October 26-30, Lviv, Ukraine), P.58.

[143] Lasky T.A., Ravani B., Sensor-based path planning and motion control for a robotic system for roadway crack sealing. IEEE Trans. Control Syst. Technol. **8**, 609–622 (2000)

[144] Lancaster, P., Tismenitsky, M.: Theory of matrices, Acad. Press., New York (1969)

[145] Lenarčić, J., Husty, M.: Latest Advances in Robot Kinematic. Springer (2012)

[146] Leo, S., Ducati, G.: Delay time in quaternionic quantum mechanics. J. Math. Phys. **53**(2):022102 (2012)

[147] Leo, S., Ducati, G.: Solving simple quaternionic differential equations. J. Math. Phys. **44**(5), 2224-2233 (2003)

[148] Lewis, D.W.: Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton's quaternions. Irish Math. Soc. Bulletin **57**, 41-64 (2006)

[149] Li, G., Guo, D.: One-way property proof in public key cryptography based on OHNN. Proc.Eng. **15**, 1812–1816 (2011)

[150] Li, Y., Gao, Y., Guo, W.: A Hermitian least squares solution of the matrix equation AXB = C subject to inequality restrictions. Comput. Math. Appl. **64**, 1752-1760 (2012)

[151] Li, X., Wei, Y.: Iterative methods for the Drazin inverse of a matrix with a complex spectrum. Appl. Math. Comput. **147**(3), 855-862 (2004)

[152] Liao, A.P., Bai, Z.Z.: Least-squares solution of $AXB = D$ over symmetric positive semidefinite matrices. J. Comput. Math. **21**(2), 175–182 (2003)

[153] Ling, S., Wei, M., Jia, Z.: Perturbation analysis for the matrix least squares problem $AXB = C$. J. Comput. Appl. Math. **273**, 150–159 (2015)

[154] Liping, H.: The matrix equation $AXB+GXD=E$ over the quaternion field. Linear Algebra Appl. **234**, 197–208 (1996)

[155] Liu, X.: The η-anti-Hermitian solution to some classic matrix equations. Appl. Math. Comput. **320**, 264–270 (2018)

[156] Liu, X., Cai, N.: High-order iterative methods for the DMP inverse. J. Math. **2018**:8175935 (2018)

[157] Liu, X., Song, G.J., Zhang, Y.: Determinantal representations of the solutions to systems of generalized Sylvester equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **30**:12 (2020)

[158] Liu, X., Yu, Y., Wang, H.: Determinantal representation of weighted generalized inverses. Appl. Math. Comput. **208**(2), 556-563 (2009)

[159] Liu, X., Zhu, G., Zhou, G., Yu, Y.: An analog of the adjugate matrix for the outer inverse $A^{(2)}_{T,S}$. Math. Probl. Eng. **2012**:591256 (2012)

[160] Liu, Y.H.: Ranks of least squares solutions of the matrix equation $AXB=C$. Comput. Math. Appl. **55**, 1270–127-(2008)

[161] Loan, C.F.V.: Generalizing the singular value decomposition. SIAM J. Numer. Anal. **13**, 76-83 (1976)

[162] Ma, H.: Optimal perturbation bounds for the core inverse. Appl. Math. Comput. **336**, 176-181 (2018)

[163] Ma, H.: A characterization and perturbation bounds for the weighted core-EP inverse. Quaest. Math. **43**(7), 1–11 (2020)

[164] Ma, H., Gao, X., Stanimirovic, P.S.: Characterizations, iterative method, sign pattern and perturbation analysis for the DMP inverse with its applications. Appl. Math. Comput. (2020). doi:10.1016/j.amc.2020.125196

[165] Ma, H., Li, T.: Characterizations and representations of the core inverse and its applications. Linear Multilinear Algebra (2019). doi:10.1080/03081087.2019.1588847

[166] Ma, H., Stanimirovic, P.S.: Characterizations, approximation and perturbations of the core-EP inverse, Appl. Math. Comput. **359**, 404–417 (2019)

[167] MacDuffee, C.C.: The Theory of Matrices, Chelsea, New York (1956)

[168] Macías-Virgós, E., Pereira-Sáez, M.J.: A topological approach to left eigenvalues of quaternionic matrices. Linear Multilinear Algebra **62**(2), 139-158 (2014)

[169] Maciejewski, A.A., Klein, C.A.: Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments. Int. J. Robot. Res. **4**(3), 109–117 (1985)

[170] Malik, S.B., Rueda, L., Thome, N.: Further properties on the core partial order and other matrix partial orders. Linear Multilinear Algebra **62**, 1629-1648 (2014)

[171] Malik, S.B., Thome, N.: On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index, Appl. Math. Comput. **226**, 575–580 (2014)

[172] Mansour, A.: Solvability of $AXB+CXD=E$ in the operators algebra B(H). Lobachevskii J. Math. **31**(3), 257-261 (2010)

[173] Mehdipour, M., Salemi, A.: On a new generalized inverse of matrices. Linear Multilinear Algebra **66**(5), 1046-1053 (2018)

[174] Meng, L.: The DMP inverse for rectangular matrices. Filomat **31**(19), 6015-6019 (2017)

[175] Meyer Jr., C.D.: Limits and the index of a square matrix. SIAM J. Appl. Math. **26**(3), 506-515 (1974)

[176] M. Miladinović, S. Miljković, P. S. Stanimirović, Minimal properties of the Drazin–inverse solution of a matrix equation. Filomat **28**(2), 383-395 (2014)

[177] S. Miljković, M. Miladinović, P. S. Stanimirović, Gradient methods for computing the Drazin-inverse solution. J. Appl. Math. Comput. **253**, 255–263 (2013)

[178] Mitra, S.K.: A pair of simultaneous linear matrix $A_1XB_1=C_1$ and $A_2XB_2=C_2$. Math Proc Cambridge Philos Soe. **74**, 213-216 (1973)

[179] Mitra, S.K., Bhimasankaram, P., Malik, S.B.: Matrix partial orders, shorted operators and applications. World Scientific Publishing Company, Singapore (2010)

[180] Mosić, D.: Weighted binary relations for operators on Banach spaces. Aequat. Math. **90**(4), 787–798 (2016)

[181] Mosić, D.: Weighted core–EP inverse of an operator between hilbert spaces. Linear Multilinear Algebra **67**(2), 278–298 (2019)

[182] Mosić, D.: The CMP inverse for rectangular matrices. Aequationes Math. **92**, 649-659 (2018)

[183] Mosić, D., Djordjević, D.S.: Additive results for the Wg-Drazin inverse. Linear Algebra Appl. **432**, 2847–2860 (2010))

[184] Mosić, D., Djordjević, D.S.: The gDMP inverse of Hilbert space operators. J. Spectr. Theor. **8**(2), 555-573 (2018)

[185] Mosić, D., Kyrchei, I.I., Stanimirovic, P.S.: Representations and properties for the MPCEP inverse. J. Appl. Math. Comput. (2021). doi:10.1007/s12190-020-01481-x

[186] Moore, E.H.: On the determinant of an Hermitian matrix of quaternionic elements. Bull. Amer. Math. Soc. **28**, 161-162 (1922)

[187] Moore, E.H.: On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract). Bull. Am. Math. Soc. **26**, 394–395 (1920)

[188] Moore, E.H.: General Analysis. American Philosophical Society, Philadelphia (1935)

[189] Murray, F.J., von Neumann, J.: On rings of operators. Ann. Math. **37**, 116–229 (1936)

[190] Navarra, A, Odell, P.L, Young, D.M.: A representation of the general common solution to the matrix equations $A_1XB_1 = C_1$ and $A_2XB_2 = C_2$ with applications. Comput Math Appl. **41**, 929–935 (2001)

[191] Nikuiea, M., Mirnia, M.K., Mahmoudi, Y.: Some results about the index of matrix and Drazin inverse. Math. Sci. **4**, 283–294 (2010)

[192] Penrose, R.: A generalized inverse for matrices. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **51**(3), 406-413 (1955)

[193] Piao, F., Zhang, Q., Wang, Z.: The solution to matrix equation $AX + X^T C = B$. J. Frankl. Inst. **344**, 1056–1062 (2007)

[194] Prasad, K.M., Bapat, R.B.: A note of the khatri inverse. Sankhya Indian J. Stat. **54**, 291–295 (1992)

[195] Prasad, K.M., Mohana, K.S.: Core-EP inverse. Linear Multilinear Algebra **62**(3), 792-802 (2014)

[196] Prasad, K.M., M.D. Raj, Bordering method to compute core-EP inverse. Spec. Matr. **6** (2018), 193–200.

[197] Prasad, K.M., Raj, M.D., Vinay, M.: Iterative method to find core-EP inverse. Bull. Kerala Math. Assoc. **16**(1), 139–152 (2018)

[198] Radhakrishin, C.R.: Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics. Research papers in Statistics. Festschrift for J. Neyman. Wiley, New York (1966)

[199] Rakic, D.S., Dincic, N.C., Djordjevic, D.S.: Core inverse and core partial order of Hilbert space operators. Appl. Math. Comput. **244**, 283-302 (2014)

[200] Rakočević, V., Wei, Y.: A weighted Drazin inverse and applications. Linear Algebra Appl. **350**, 25–39 (2002)

[201] Rehman, A., Kyrchei, I.I., Ali, I., Akram, M., Shakoor, A.: Explicit formulas and determinantal representation for η-skew-Hermitian solution to a system of quaternion matrix equations. Filomat **34**(8), 2601-2627 (2020)

[202] Rehman, A., Kyrchei, I.I., Ali, I., Akram, M., Shakoor, A.: The general solution of quaternion matrix equation having η-skew-hermicity and its Cramer's rule. Math. Probl. Eng. **2019**:7939238 (2019)

[203] Rehman, A., Kyrchei, I.I., Ali, I., Akram, M., Shakoor, A.: Least-norm of the general solution to some system of quaternion matrix equations and its determinantal representations. Abstr. Appl. Anal. **2019**:9072690 (2019)

[204] Robinson, S.M.: A short proof of Cramer's rule. Math. Mag. **43**, 94–95 (1970)

[205] Rodman, L.: Topics in Quaternion Linear Algebra. Princeton University Press (2014)

[206] Roubtsov, V.N., Roulstone, I.: Holomorphic structures in hydrodynamical models of nearly geostrophic flow. Proc. R. Soc. London, Ser. A **457**, 1519-1531 (2001)

[207] Rösch, N.: Time-reversal symmetry, Kramer's degeneracy and the algebraic eigenvalue problem. Chem. Physics **80**(1–2), 1–5 (1983)

[208] Sahoo, J.K., Behera, R., Stanimirović, P.S., Katsikis, V.N., Ma, H.: Core and core-EP inverses of tensors. Comp. Appl. Math. **39**:9 (2020)

[209] Sahoo, J.K., Behera, R.: Reverse-order law for core inverse of tensors. Comp. Appl. Math. **39**:97 (2020)

[210] Sergienko, I.V., Galba, E.F., Deineka, V.S.: Limiting representations of weighted pseudoinverse matrices with positive definite weights. Probl. Regul. Cybern. Syst. Anal. **39**(6), 816–830 (2003)

[211] Shahzad, A., Jones, B.L., Kerrigan, E.C., Constantinides, G.A.: An efficient algorithm for the solution of a coupled Sylvester equation appearing in descriptor systems. Automatica **47**, 244–248 (2011)

[212] Sheng X., Chen G.: Full-rank representation of generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$ and its applications. Comput. Math. Appl. **54**, 1422–1430 (2007)

[213] Sheng, X., Chen, G.: An oblique projection iterative method to compute Drazin inverse and group inverse. Appl. Math. Comput. **211**(2), 417-421 (2009)

[214] Sidi, A.: A unified approach to Krylov subspace methods for the Drazin-inverse solution of singular nonsymmetric linear systems. Linear Algebra Appl. **298**. 99-113 (1999)

[215] Sidi, A.: A BI-CG type iterative method for Drazin-inverse solution of singular inconsistent nonsymetric linear systems of arbitrary index. Electron. J. Linear Algebra **335**, 72–94 (2000)

[216] Sidi, A.: DGMRES: a GMRES-type algorithm for Drazin-inverse solution of singular nonsymmetric linear systems. Linear Algebra Appl. **335**, 189–204 (2001)

[217] Siegel, C.L.: Uber die analytische Theorie der quadratischen Formen III. Ann. Math. **38**, 212-291 (1937)

[218] Siegel, C.L.: Equivalence of quadratic forms. Am. J. Math. **63**, 658-680 (1941)

[219] Simoncini, V.: A new iterative method for solving large-scale Lyapunov matrix equations. SIAM J. Sci. Comp. **29**, 1268-1288 (2007)

[220] So, W.: Quaternionic left eigenvalue problem. South. As. Bull. Math. **29**, 555-565 (2005)

[221] Song, C., Chen, G., Liu, Q.: Explicit solutions to the quaternion matrix equations $X - AXC = F$ and $X - A\overline{X}C = F$. Int. J. Comput. Math. **89**, 890–900 (2012)

[222] Song, G.J., Q. Wang, H. Chang, Cramer rule for the unique solution of restricted matrix equations over the quaternion skew field, Comput Math. Appl. **61**, 1576-1589 (2011)

[223] Song, G.J., Wang, Q.: Condensed Cramer rule for some restricted quaternion linear equations, Appl. Math. Comput. **218**, 3110–3121 (2011)

[224] Song, G.J.: Determinantal representation of the generalized inverses over the quaternion skew field with applications. Appl. Math. Comput. **219**, 656–667 (2012)

[225] Song, G.J.:Determinantal representations of the generalized inverses $A^{(2)}_{T,S}$ over the quaternion skew field with applications. J. Appl. Math. Comput. **39**, 201-220 (2012)

[226] Song, G.J.: Characterization of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field with applications. Electron. J. Linear Algebra **26**, 1–14 (2013)

[227] Song, G.J., Chang, H., Wu, Z.: Cramer's rules for various solutions to some restricted quaternionic linear systems. J. Appl. Math. Comput. **48**, 83-109 (2015)

[228] Song, G.J., Dong, S.Z.: New results on condensed Cramer's rule for the general solution to some restricted quaternion matrix equations. J. Appl. Math. Comput. **53**, 321–341(2017)

[229] Song, G.J., Wang, Q.W., Yu, S.W.: Condensed Cramer rule for some restricted quaternion linear equations. Appl. Math. Comput. **336**, 490-499 (2018)

[230] Song, G.J., Yu, S.W.: Cramer's rule for the general solution to a restricted system of quaternion matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**:91 (2019)

[231] Stanimirović, P.S., Djordjević, D.S.: Full-rank and determinantal representation of the Drazin inverse. Linear Algebra Appl. **311**, 131-151 (2000)

[232] Stanimirović, P.S.: General determinantal representation of pseudoinverses of matrices.Mat. Vesnik **48**, 1–9 (1996)

[233] Stanimirović, P.S., Stankovic, M.: Determinantal representation of weighted Moore–Penrose inverse, Mat. Vesnik **46**, 41–50 (1994)

[234] Strašek, R.: Uniform primeness of the Jordan algebra of hermitian quaternion matrices. Linear Algebra Appl. 367, 235–242 (2003)

[235] Study, E.: Zur Theorie der linearen Gleichungen. Acta Math.**42**, 1-61 (1920)

[236] Stykel, T.: Stability and inertia theorems for generalized Lyapunov equations. Linear Algebra Appl. **355**(1-3), 297-314 (2002)

[237] Syrmos, V.L., Lewis, F.L.: Coupled and constrained Sylvester equations in system design. Circ. Syst. Signal Pr. **13**(6), 663-694 (1994)

[238] Syrmos, V.L., Lewis, F.L.: Output feedback eigenstructure assignment using two Sylvester equations. IEEE Trans. Automat. Contr. **38**, 495-499 (1993)

[239] Terán, F.D., Dopico, F.M.: The solution of the equation $XA + AX^T = 0$ and its application to the theory of orbits. Linear Algebra Appl. **434**, 44-67 (2011)

[240] Took, C.C., Mandic, D.P.: Augmented second-order statistics of quaternion random signals, Signal Process. **91**, 214-224 (2011)

[241] Took, C.C., Mandic, D.P.: Quaternion-valued stochastic gradient-based adaptive IIR filtering, IEEE Trans. Signal Process. **58**(7) 3895-3901 (2010)

[242] Took, C.C., Mandic, D.P., Zhang, F.: On the unitary diagonalisation of a special class of quaternion matrices. Appl. Math. Lett. **24**, 1806-1809 (2011)

[243] Udwadia, F., Schttle, A.: An alternative derivation of the quaternion equations of motion for rigid-body rotational dynamics. J. Appl. Mech. **77**(4):044505 (2010)

[244] Varga, A.: Robust pole assignment via Sylvester equation based state feedback parametrization: Computer-Aided Control System Design (CACSD). IEEE Int. Ultrason. Symp. **57**, 13-18 (2000)

[245] Verghese, G.C.: A Cramer rule for least-norm least-square-error solution of inconsistent linear equations. Linear Algebra Appl. **48**, 315–316 (1982)

[246] Wang G., Wei Y., Qiao S., Generalized inverses: theory and computations. Science Press, Beijing (2004)

[247] Wang, G.: A Cramer rule for finding the solution of a class of singular equations, Linear Algebra Appl. **116**, 27–34 (1989)

[248] Wang, G., Xu, Z.: Solving a kind of restricted matrix equations and Cramer rule. Appl. Math. Comput. **162**, 329-338 (2005)

[249] Wang, H.X.: Core-EP decomposition and its applications, Linear Algebra Appl. **508**, 289–300 (2016)

[250] Wang, H.X., Liu, X.J.: Characterizations of the core inverse and the core partial ordering, Linear Multilinear Algebra **63**, 1829–1836 (2015)

[251] Wang, H.X., Zhang, X.: The core inverse and constrained matrix approximation problem. Open Math. **18**, 653–661 (2020)

[252] Wang, Q.W.: A system of matrix equations and a linear matrix equation over arbitrary regular rings with identity. Linear Algebra Appl. **384**, 43-54 (2004)

[253] Wang, Q.W.: The general solution to a system of real quaternion matrix equations. Comput. Math. Appl. **49**, 665–675 (2005)

[254] Wang, Q.W., Jiang, J.: Extreme ranks of (skew-)hermitian solutions to a quaternion matrix equation. Electron. J. Linear Algebra **20**, 552-573 (2010)

[255] Wang, Q.W., Van der Woude, J.W., Chang, H.X.: A system of real quaternion matrix equations with applications. Linear Algebra Appl. **431**(1), 2291–2303 (2009)

[256] Wang, Q.W., Wu. Z.C, Lin, C.Y.: Extremal ranks of a quaternion matrix expression subject to consistent systems of quaternion matrix equations with applications. Appl. Math. Comp. **182**(2), 1755-1764 (2006)

[257] Wang, Q.W., Zhang, F.: The reflexive re-nonnegative definite solution to a quaternion matrix equation. Electron. J. Linear Algebra **17**, 88-101 (2008)

[258] Wei, Y.M.: Index splitting for the Drazin inverse and the singular linear systems, Applied Math. Comput. **95**, 115-124 (1998)

[259] Wei, Y.M.: A characterization and representation of the generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$ and its applications. Linear Algebra Appl. **280**, 87–96 (1998)

[260] Wei, Y.M.: Successive matrix squaring algorithm for computing the Drazin inverse. Appl. Math. Comput. **108**(2-3), 67-75 (2000)

[261] Wei, Y.M.: Integral representation of the W-weighted Drazin inverse. Appl Math Comput. **144**, 3–10 (2003)

[262] Wei, Y.M.: A characterization for the W-weighted Drazin inverse and a Cramer rule for the W-weighted Drazin inverse solution. Appl. Math. Comput. **125**, 303–310 (2002)

[263] Wei, Y.M., Woo, C.W., Lei, T.: A note on the perturbation of the W- weighted Drazin inverse. Appl Math Comput. **149**, 423–430 (2004)

[264] Wei, Y.M., Wu, H.B.: Convergence properties of Krylov subspace methods for singular linear systems with arbitrary index. J. Comput. Appl. Math. **114**, 305-318 (2000)

[265] Wei, Y.M., Wu, H.B.: Additional results on index splittings for Drazin inverse solutions of singular linear systems. Electron. J. Linear Algebra **8**, 83-93 (2001)

[266] Wei, Y.M., Wu, H.B.: The representation and approximation for the weighted Moore–Penrose inverse, Appl. Math. Comput. **121**, 17–28 (2001)

[267] Werner, H.J.: On extensions of Cramer's rule for solutions of restricted linear systems. Linear Multilinear Algebra **15**, 319–330 (1984)

[268] Wiegmann, N.A.: Some theorems on matrices with real quaternion elements. Canad. J. Math. **7**, 191-201 (1955)

[269] Wilczynski, P.: Quaternionic valued ordinary differential equations. The Riccati equation. J. Differential Equations **247**, 2163-2187 (2009)

[270] Wilczynski, P.: Planar nonautonomous polynomial equations. II. Coinciding sectors, J. Differential Equations **246**(7), 2762-2787 (2009)

[271] Wilczynski, P.: Quaternionic-valued ordinary differential equations II. Coinciding sectors. J. Differential Equations **252**, 4503-4528 (2012)

[272] Wood, R.M.W.: Quaternionic eigenvalues. Bull. Lond. Math. Soc. **17**, 137–138 (1985)

[273] Xu, G.P., Wei, M.S., Zheng, D.S.: On solutions of matrix equation $AXB + CYD = F$. Linear Algebra Appl. **279**, 93-109 (1998)

[274] Xu, S.Z., Chen, J.L., Mosic, D.: New characterizations of the CMP inverse of matrices. Linear Multilinear Algebra **68**(4), 790-804 (2020)

[275] Xu, S.Z., Chen, J.L., Zhang, X.X.: New characterizations for core and dual core inverses in rings with involution. Front. Math. China **12**, 231–246 (2017)

[276] Yu, A., Deng, C.: Characterizations of DMP inverse in a Hilbert space. Calcolo **53**(3), 331–341 (2016)

[277] Yuan, S., Liao, A.: Least squares solution of the quaternion matrix equation $X - A\widehat{X}B = C$ with the least norm, Linear Multilinear Algebra **59**(9), 985-998 (2011)

[278] Yuan, S., Liao, A., Yao, G.: The matrix nearness problem associated with the quaternion matrix equation $AXA^H + BYB^H = C$. J. Appl. Math. Comput. **37**, 133-144 (2011)

[279] Yuan, S.F., Wang, Q.W.: Two special kinds of least squares solutions for the quaternion matrix equation $AXB + CXD = E$. Electron. J. Linear Algebra **23**, 257–274 (2012)

[280] Yun, W., Jingpin, H., Jiaxin, L.: A hybrid structure solution of quaternion Lyapunov equation and its optimal approximation, Am. J. Math. **7**(1), 30-36 (2019)

[281] Al-Zhour, Z., Kiliçman, A., Abu Hassa, M.H.: New representations for weighted Drazin inverse of matrices. Int. Journal of Math. Analysis **1** , 697–708 (2007)

[282] Zou, H., Chen, J.L., Patricio, P.: Reverse order law for the core inverse in rings. Mediterr. J. Math. **15**:145 (2018).

[283] Zhang, F.: Quaternions and matrices of quaternions. Linear Algebra Appl. **251**, 21-57 (1997)

[284] Zhang, H.: Rank equalities for Moore-Penrose inverse and drazin inverse over quaternion. Ann. Funct. Anal. **3**(2), 115-127 (2012)

[285] Zhang, L.: A characterization of the Drazin inverse. Linear Algebra Appl. **335**, 183-188 (2001)

[286] Zhang, N., Wei, Y.: On the convergence of general stationary iterative methods for range-Hermitian singular linear systems. Numer. Linear Algebra Appl. **17**, 139–154 (2010)

[287] Zhang, X.: Global structure of quaternion polynomial differential equations, Comm. Math. Phys. 303(2). 301-316 (2011)

[288] Zhang, X., Zhang, M.Y.: The rank-constrained Hermitian nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $AXA^* = B$. Linear Algebra Appl. **370**, 163-174 (2003)

[289] X. Zhang, The general common Hermitian nonnegative-definite solution to the matrix equation $AXA^* = BB^*$ and $CXC^* = DD^*$ with applications in statistics. J. Multivariate Anal. **93**: 257-266 (2005)

[290] Zhang, X.: The general Hermitian nonnegative-deffinite and positive-definite solutions to the matrix equation $GXG^*+HYH^* = C$. J. Appl. Math. Comput. **14**, 51-67 (2004)

[291] Zhang, Y.N., Jiang, D.C., Wang, J.: A recurrent neural network for solving Sylvester equation with time-varying coefficients. IEEE T. Neural. Networ. **13**(5), 1053-1063 (2002)

[292] Zhang, Y., Wang, R.H.: The exact solution of a system of quaternion matrix equations involving η-Hermicity. Appl. Math. Comput. **222**, 201–209 (2013)

[293] Zhou, B., Duan, G.R., Li, Z.Y.: A Stein matrix equation approach for computing coprime matrix fraction description. IET Control. Theory Appl. **3**(6), 691–700 (2009)

[294] Zhou, B., Duan, G.R., Li, Z.Y., Wang, Y.: Optimal pole assignment for discrete-time systems via Stein equations. IET Control. Theory Appl. **3**(8), 983–994 (2009)

[295] Zhou, M.M., Chen, J.L., Li, T.T., Wang, D.G.: Three limit representations of the core-EP inverse. Filomat **32**, 5887–5894 (2018)

[296] Zhou, J., Wei, Y.: A two-step algorithm for solving singular linear systems with index one. Appl. Math. Comput. **8**, 83–93 (2001)

[297] Zoladek, H.: Classification of diffeomorphisms of S4 induced by quaternionic Riccati equations with periodic coefficients, Topol. Methods Nonlinear Anal. **33**(2), 205-215 (2009)

[298] Zuo, K., Cvetkovic Ilic, D., Cheng, Y.: Different characterizations of DMP-inverse of matrices, Linear Multilinear Algebra (2020). doi: 10.1080/03081087.2020.1729084

[299] Гантмахер, Ф. Р.: Теория матриц. 5-е изд. — Москва (2004)

[300] Гельфанд, И. М., Ретах, В. С.: Детерминанты матриц над некоммута- тивными кольцами. Функциональный анализ и его приложения **25**(2), 13-35 (1991)

[301] Гельфанд И. М., Ретах В. С. Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов. Функциональный анализ и его приложения. **26**(4), 33-45 (1992) SIA

[302] Аткинсон, Ф.В.: Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах. Матем. сб. **28**(70), 3-14 1951

[303] Кирчей, І.І.: Теорія стовпцевих і рядкових визначників та обернена матриця над тілом з інволюцією. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, (2008)

[304] Кирчей І.І.: Зображення узагальненої оберненої Мура-Пенроуза через аналог приєднаної матриці. Мат. методи та фіз.-мех. поля **47**(4), 7-14 (2004)

[305] Кирчей, І.І. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений. Фундамент. и прикл. матем. **13**(4), 67-94 (2007)

[306] Кирчей, І.І. Визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза над тілом кватерніонів. Мат. методи та фіз.-мех. поля **53**(3), 36-45 (2010)

[307] Кирчей, І.І. Визначникові зображення розв'язку кватерніонового узагальненого матричного рівняння Сильвестра. Мат. методи та фіз.-мех. поля **60**(3), 97-106 (2017)

[308] Кирчей, І.І.: Узагальнена обернена матриця над тілом. Тези доп. Міжнародної конференції ім. В. Я. Скоробагатька (27 вересня – 01 жовтня 2004, Дрогобич, Україна), С.92.

[309] Кирчей, І.І.: Аналог правила Крамера для нормального розв'язку систем лінійних рівнянь. Матеріали міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII)"(2005, 23–28 вересня, Ялта, Україна), С.103-104.

[310] Кирчей, І.І.: Визначникове зображення узагальненої оберненої Мура - Пенроуза. Матеріали XI Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2006, 18-20 травня, Київ, Україна), С.452.

[311] Кирчей, І.І.: Визначникове зображення матриці Дразіна. Праці міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)"(2007, 23–28 вересня, Ялта, Україна), С.121-122.

[312] Кирчей, І.І.: Правило Крамера для системи узагальнених нормальних. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2007, 24-28 вересня, Дрогобич, Україна), С.126.

[313] Кирчей, І.І.: Правило Крамера для нормального розв'язку кватерніонових систем лінійних рівнянь. Матеріали XII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2008, 15-17 травня, Київ, Україна), С.646.

[314] Кирчей, І.І.: Правило Крамера для нормального розв'язку двостороннього матричного рівняння над тілом кватерніонів. Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2010, 13-15 травня, Київ, Україна), С.145.

[315] Кирчей, І.І.: Явна формула для нормального розв'язку деякого матричного рівняння над тілом кватерніонів. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2011, 19-23 вересня, Дрогобич, Україна), С.92.

[316] Ценг, И.И.: Обобщенные обратные для неограниченных операторов между унитарными пространствами. Докл. АН СССР **67**, 431–434 (1949а)

[317] Ценг, И.И.: Свойства и классификация обобщенных обратных для замкнутых операторов. Докл. АН СССР **67**, 607–610 (1949б)

[318] Ценг, И.И.: Виртуальные решения и обобщенные обратные, Успехи математических наук. **11**, 213–215 (1956)

Додаток

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати

1. Kyrchei, I.I., Mosic, D., Stanimirovic, P.S.: Solvability of new constrained quaternion matrix approximation problems based on core-EP inverses, Adv. Appl. Clifford Algebras **31**:3 (2021). doi:10.1007/s00006-020-01102-7
2. Kyrchei, I.I.: Weighted quaternion core-EP, DMP, MPD, and CMP inverses and their determinantal representations. RACSAM **114**:198 (2020).

   doi:10.1007/s13398-020-00930-3
3. Rehman, A., Kyrchei, I.I., Ali, I., Akram, M., Shakoor, A.: Explicit formulas and determinantal representation for η-skew-Hermitian solution to a system of quaternion matrix equations. Filomat **34**(8), 2601-2627 (2020).

   doi:10.2298/FIL2008601R
4. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the weighted core-EP, DMP, MPD, and CMP inverses. J. Math. **2020**:9816038 (2020).

   doi:10.1155/2020/9816038
5. Kyrchei, I.I.: Cramer's Rules for Sylvester-type matrix equations. In: Kyrchei,I.I. (ed.) Hot Topics in Linear Algebra, pp. 138-162. Nova Sci. Publ., New York (2020)
6. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions to systems of two-sided quaternion matrix equations. Linear Multilinear Algebra (2019).

   doi:10.1080/03081087.2019.1614517
7. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of general and (skew-)Hermitian solutions to the generalized Sylvester-type quaternion matrix equation. Abstr. Appl. Anal. **2019**:5926832 (2019). doi:10.1155/2019/5926832

8. Kyrchei, I.I.: Cramer's Rules of η-(skew-)Hermitian solutions to the quaternion Sylvester-type matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**(3):56 (2019). doi:10.1007/s00006-019-0972-1

9. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the core inverse and its generalizations with applications, J. Math. **2019**:1631979 (2019).

   doi:10.1155/2019/1631979

10. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the quaternion core inverse and its generalizations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**(5):104 (2019).

    doi:10.1007/s00006-019-1024-6

11. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the core inverse and its generalizations, In: Functional Calculus. IntechOpen, London (2019).

    doi:10.5772/intechopen.89341

12. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for the system of quaternion matrix equations with з-Hermicity. 4open **2**:24 (2019). doi:10.1051/fopen/2019021

13. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for Sylvester quaternion matrix equation and its special cases. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**(5):90 (2018). doi: 10.1007/s00006-018-0843-1

14. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions to systems of quaternion matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**(1):23 (2018).

    doi:10.1007/s00006-018-0843-1

15. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions and Hermitian solutions to some system of two-sided quaternion matrix equations. J. Math. **2018**:6294672 (2018). doi:10.1155/2018/6294672

16. Kyrchei, I.I.: Explicit determinantal representation formulas for the solution of the two-sided restricted quaternionic matrix equation. J. Appl. Math. Comput. **58**(1-2), 335-365 (2018). doi:10.1007/s12190-017-1148-6

17. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for the system of two-sided matrix equations and of its special cases. In: Yasser, H.A.(ed.) Matrix Theory-Applications and Theorems,

pp. 3-20. IntechOpen, London (2018)

18. Kyrchei, I.I.: Weighted singular value decomposition and determinantal representations of the quaternion weighted Moore–Penrose inverse. Appl. Math. Comput. **309**, 1-16 (2017). doi:10.1016/j.amc.2017.03.048
19. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for some Hermitian coquaternionic matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **27**(3), 2509–2529 (2017). doi:10.1007/s00006-016-0751-1
20. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the quaternion weighted Moore-Penrose inverse and its applications, In: Baswell, A.R.(ed.) Advances in Mathematics Research **23**, pp. 35-96. Nova Sci. Publ., New York (2017)
21. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin and W-weighted Drazin inverses over the quaternion skew field with applications. In: Griffin, S.(ed.) Quaternions: Theory and Applications, pp.201-275. Nova Sci. Publ., New York (2017)
22. Kyrchei, I.I.: Explicit determinantal representation formulas of W-weighted Drazin inverse solutions of some matrix equations over the quaternion skew field. Math. Probl. Eng. **2016**:8673809 (2016). doi:10.1155/2016/8673809
23. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field. Appl. Math. Comput. **264**(1), 453-465 (2015). doi:10.1016/j.amc.2015.04.125
24. Kyrchei, I.I.: The column and row immanants of matrices over a split quaternion algebra. Adv. Appl. Clifford Algebras **25**(3), 611-619 (2015). doi:10.1007/s00006-014-0517-6
25. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for generalized inverse solutions. In: Kyrchei, I.I. (ed.) Advances in Linear Algebra Research, pp. 79-132. Nova Sci. Publ., New York (2015).
26. Kleyn, A., Kyrchei, I.I.: Relation of row-column determinants with quasideterminants of matrices over a quaternion algebra. In: Kyrchei, I.I.(ed.) Advances in Linear Algebra Research, pp. 299-324. Nova Sci. Publ., New York (2015).

27. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin inverse over the quaternion skew field with applications to some matrix equations. Appl. Math. Comput. **238**, 193–207 (2014). doi:10.1016/j.amc.2014.03.125
28. Kyrchei, I.I.: Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solutions of some matrix and differential matrix equations. Appl. Math. Comput. **219**, 7632-7644 (2013). doi:10.1016/j.amc.2013.01.050
29. Kyrchei, I.I.: Explicit representation formulas for the minimum norm least squares solutions of some quaternion matrix equations. Linear Algebra Appl. **438**(1), 136-152 (2013). doi:10.1016/j.laa.2012.07.049
30. Kyrchei, I.I.: Analogs of Cramer's rule for the minimum norm least squares solutions of some matrix equations. Appl. Math. Comput. **218**, 6375-6384 (2012). doi:10.1016/j.amc.2011.12.004
31. Kyrchei, I.I.: The theory of the column and row determinants in a quaternion linear algebra. In: Baswell, A.R.(ed.) Advances in Mathematics Research **15**, pp. 301-359. Nova Sci. Publ., New York (2012)
32. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules. Linear Multilinear Algebra **59**(4), 413-431 (2011). doi:10.1080/03081081003586860
33. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for some quaternion matrix equations. Appl. Math. Comput. **217**(5), 2024-2030 (2010). doi:10.1016/j.amc.2010.07.003
34. Kyrchei, I.I.: Analogs of the adjoint matrix for generalized inverses and corresponding Cramer rules. Linear Multilinear Algebra **56**(4), 453-469 (2008). doi:10.1080/0308108070135285
35. Кирчей, І.І.: Визначникові зображення розв'язку кватерніонового узагальненого матричного рівняння Сильвестра. Мат. методи та фіз.-мех. поля **60**(3), 97-106 (2017)
36. Кирчей, І.І.: Визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза над тілом кватерніонів, Мат. методи та фіз.-мех. поля **53**(3), 36-46 (2010)

37. Кирчей, І.І.: Зображення узагальненої оберненої Мура-Пенроуза через аналог приєднаної матриці. Мат. методи та фіз.-мех. поля **47**(4), 6-11 (2004)

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Kyrchei, I.I.: Quaternion core inverse and its generalizations. Abstracts of XI International Skorobohatko Mathematical Conference (2020, October 26-30, Lviv, Ukraine), P.58.
2. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for Sylvester-type quaternion matrix equations. Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (2019, July 02–06, Vinnytsia, Ukraine), P.63.
3. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for two-sided restricted quaternionic matrix equation. Abstracts of 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko (2017, July 03-07, Kyiv, Ukraine), P.74.
4. Kyrchei, I.I.: Analogues of the adjugate matrix for the weighted Moore-Penrose inverse. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2015, 25-28 серпня, Дрогобич, Україна), С.92.
5. Kyrchei, I.I.: Determinantal representation of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field. Abstracts of X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (2015, August 20-27, Odessa, Ukraine), P.60.
6. Kyrchei, I.I.: Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solution of the quaternion matrix equation AXB=D. Abstracts of the 9th International Algebraic Conference in Ukraine (2013, July 8-13, Lviv, Ukraine), P.108.
7. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin inverse matrix over a quaternion skew field. Abstracts of International Conference on Algebra (ICA) dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov (2012, August 20-26, Kyiv, Ukraine), P.78.

8. Кирчей, І.І.: Явна формула для нормального розв'язку деякого матричного рівняння над тілом кватерніонів. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2011, 19-23 вересня, Дрогобич, Україна), С.92.

9. Kyrchei, I.I.: Explicit representation formulas for the least squares solutions of the quaternion matrix equation AXB=D. Abstracts of the 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 60th anniversary of Prof. V. M. Usenko (2011, July 5-12, Lugansk, Ukraine), P.171.

10. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для нормального розв'язку двостороннього матричного рівняння над тілом кватерніонів. Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2010, 13-15 травня, Київ, Україна), С.145.

11. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for some two-sided quaternionic matrix equations. Abstracts of 7th International Algebraic Conference in Ukraine (2009, August 18-23, Kharkiv, Ukraine), P.82-83.

12. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для нормального розв'язку кватерніонових систем лінійних рівнянь. Матеріали XII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2008, 15-17 травня, Київ, Україна), С.646.

13. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для системи узагальнених нормальних. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2007, 24-28 вересня, Дрогобич, Україна), С.126.

14. Кирчей, І.І.: Визначникове зображення матриці Дразіна. Праці міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)"(2007, 23–28 вересня, Ялта, Україна), С.121-122.

Апробація матеріалів дисертації.

Результати, наведені у даній дисертаційній роботі, доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях, семінарах, школах:

1. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Львів, Україна, 26-30 жовтня 2020 р.
2. XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 215-й річниці з дня народження В. Буняковського, м.Вінниця, Україна, 02–06 липня, 2019 р.
3. XI Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні присвячена 75-річчю В. В. Кириченка, м.Київ, Україна, 3-7 липня 2017 р.
4. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 25-28 серпня 2015 р.
5. X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-й річниці з дня народження Ю. А. Дрозда, м.Одеса, Україна, 20-27 серпня, 2015 р.
6. IX Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Львів, Україна, 8-13 липня, 2013 р.
7. Міжнародна конференція з алгебри, присвячена 100-й річниці С.М. Чернікова, м.Київ, Україна, 23-27 червня, 2012 р.
8. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 19-23 жовтня 2011 р.
9. VIII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Луганськ, Україна, 5-12 липня, 2011 р.
10. VII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Харків, Україна, 18-23 серпня, 2009 р.
11. XIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, м.Київ, Україна, 13-15 травня, 2010 р.
12. XII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, м.Київ, Україна, 15-17 травня, 2008 р.
13. Міжнародний симпозіум "Питання оптимізації обчислень"(ПОО-XXXIII), м. Ялта, Україна, 23–28 вересня, 2007 р.
14. Міжнародна конференція ім. В.Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 24-28 жовтня 2007 р.

15. Науковий семінар ім. В.Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 20 грудня, 2016р.
16. Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН Україна, 15 січня, 2019р.
17. Науковий семінар ім. В.Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 4 лютого, 2021р.