НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КИРЧЕЙ Іван Ігорович І.Кирчей

УДК 512.643

УЗАГАЛЬНЕНІ ОБЕРНЕНІ МАТРИЦІ НАД ТІЛОМ КВАТЕРНІОНІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.06 — алгебра і теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
ГРИГОРЧУК Ростислав Іванович,
Техаського університету (Texas A&M University), заслужений професор.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
КУРДАЧЕНКО Леонід Андрійович,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, завідувач кафедри геометрії і алгебри;

доктор фізико-математичних наук, професор
БОНДАРЕНКО Віталій Михайлович,
Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЖУЧОК Анатолій Володимирович,
Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри алгебри та системного аналізу.

Захист відбудеться «6» травня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики за адресою: 01004 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики.

Автореферат розісланий «31» березня 2021 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради **Сорока Ю. Ю.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено вивченню узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів і, в першу чергу, побудові їх визначникових зображень, а також застосуванню отриманих визначникових зображень до покомпонентного розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

З часу побудови В.Р. Гамільтоном у 1843 році некомутативної чотиривимірної алгебри кватерніонів до сьогодення, кватерніони стали об'єктом вивчення багатьох частин математики, зокрема алгебри, геометричної алгебри і топології, аналізу та інших, а також вони знаходять застосування у багатьох прикладних галузях, таких як обробка сигналів та кольорових зображень, теорія управління, квантова механіка та механіка обертання, інформатика, тощо.

Хронологія робіт, в яких вводяться та вивчаються визначники матриць із некомутуючими елементами, їх ще називають некомутативними визначниками, розпочинаються ще від роботи А. Келі 1845 року, але продовжується й досі. Найбільш відомі некомутативні визначники Ж. Дьйодонне (1943 р.) і Е. Стаді (1920 р.) були означені шляхом перетворення кватерніонової матриці в еквівалентну їй комплексну або дійсну матрицю, але при цьому можливість їх використання для визначникового зображення кватерніонової оберненої чи узагальненої оберненої матриці була втрачена. Хоча деякі інші, раніше введені, визначники кватерніонових матриць приймають своє значення у тілі кватерніонів, але вони є важкими для використання.

У дисертаційній роботі використовуються стовпцеві і рядкові некомутативні визначники, теорія яких була досліджена здобувачем у кандидатській дисертації, де, зокрема, було отримане визначникове зображення оберненої матриці. У подальших дослідженнях, які представлені у дисертації, розвиток теорії стовпцевих і рядкових визначників продовжується до вивчення узагальнених обернених кватерніонових матриць.

Узагальнену обернену (або псевдообернену) матрицю незалежно один від одного описали Е.Г. Мур у 1920 році, А. Б'єхаммар у 1951 році та Р. Пенроуз у 1955 році. На основі сингулярного розкладу матриці Р. Пенроуз виписав рівняння, як необхідні та достатні умови для визначення такої узагальненої оберненої матриці, єдиної для довільної матриці. Прямими методами знаходження матриці Мура-Пенроуза є її сингулярний розклад та визначникове зображення. Але на відміну від оберненої матриці, яка має однозначне визначникове зображення через алгебричні доповнення елементів матриці, для узагальнених обернених матриць навіть над полем дійсних чи комплексних чисел, зокрема матриці Мура-Пенроуза, внаслідок пошуку їх більш застосовних явних виразів були побудовані різні визначникові зображення.

У подальших дослідженнях К.М. Прасад і Р.Б. Бапат у 1992 році впровадили поняття зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. Означення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза будують, виходячи зі зваженого сингулярного розкладу матриць. Визначникові зображення комплексної зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза були отримані П.С. Станіміровічем і М. Станковічем у 1994 р. через повнорангову факторизацію, Х. Лю, Ю. Ю та ін. у 2009 р. методом обчислення визначників та Х. Лю, Г. Жу та ін. у 2012 р. через граничне зображення, використовуючи метод вперше запропонований здобувачем. У 1958 році М.П. Дразін дав означення нової узагальненої оберненої матриці для комплексної квадратної матриці, використовуючи її індекс. У випадку, коли індекс матриці дорівнює одиниці, така обернена називається груповою. П.С. Станіміровіч і Д.С. Джорджевіч у 2000 році отримали повнорангове, а на його основі, і визначникове зображення комплексної узагальненої оберненої матриці Дразіна. У 1980 році Р.Е. Клайн і Т.Н.Е. Гревілл розширили поняття узагальненої оберненої комплексної матриці Дразіна з квадратних матриць до прямокутних. Визначникові зображення комплексної W-зваженої матриці Дразіна, будуються через повноранговий розклад та через граничне зображення.

У дисертаційній роботі визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених для матриць над тілом кватерніонів отримані вперше. Як наслідок, на основі розробленого здобувачем гранично-рангового методу, побудовані нові, більш аплікабельні визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць.

Відмітимо, що в останні двадцять років, інтерес математиків розширився з вивчення комплексних узагальнених обернених матриць до кватерніонових. Але побудову визначникових зображень кватерніонових узагальнених обернених матриць вдається досягнути тільки засобом рядково-стовпцевих визначників. Вперше це було зроблено у роботах здобувача, представлених до дисертації. Але й інші математики почали застосовувати апарат рядкових і стовпцевих визначників для дослідження кватерніонових узагальнених обернених.

Уведення О.М. Баксаларі та Г. Тренклерем у 2010 році поняття серцевинної оберненої для комплексних матриць викликало сплеск нової активності у розвитку теорії узагальнених обернених матриць. У наступні роки, були введені та досліджені такі її узагальнення, як EP-серцевинна обернена – К.М. Прасадом і К.С. Мохана у 2014 р., *DMP*-обернена – С.Б. Малік і Н. Томе у 2014 р., *CMP*-обернена – М. Мехдіпур і А. Салемі у 2017 р., та їх зважені, тощо. Досліджувалися зображення, властивості та застосування цих нових узагальнених обернених не тільки для комплексних матриць, але і для операторів у ґільбертовому просторі чи елементів кільця. Були отримані, зокрема, визначникові зображення комплексних серцевинної оберненої і *EP*-серцевинної оберненої.

Дослідження кватерніонових серцевинної оберненої та її узагальнень вперше були започатковані у роботах здобувача. Отримані їх нові представлення, зокрема визначникові зображення для матриць над тілом кватерніонів. За допомогою запропонованого підходу вдалося побудувати нові, більш застосовні визначникові зображення і для матриць над полем комплексних чисел.

Узагальнені обернені матриці є важливими інструментами розв'язку матричних рівнянь. У 1979 році Дж.К. Баксаларі та Р. Кала встановили необхідну та достатню умову сумісності двостороннього узагальненого матричного рівняння Сильвестра над полем комплексних чисел та подали його розв'язок у термінах узагальнених обернених матриць. За останні двадцять років інтерес до матричних рівнянь типу Сильвестра розширився і на рівняння над алгеброю кватерніонів. Зокрема, К.В. Ванг та ін. у 2009 році виразили у термінах узагальнених обернених матриць розв'язок кватерніонового узагальненого матричного рівняння Сильвестра.

У дисертаційній роботі вперше одержано визначникове зображення розв'язку двостороннього кватерніонового матричного рівняння, а на його основі розв'язку узагальненого кватерніонового матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливих випадків рівняння Сильвестра з *-ермітовістю і η-ермітовістю. Також отримані аналоги правила Крамера для системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь, усіх її часткових випадків, та особливих випадків для рівнянь з *-ермітовістю і η-ермітовістю. Здобувачем також побудовані правила Крамера для узагальнених обернених розв'язків Дразіна, зважених узагальнених обернених розв'язків Мура-Пенроуза та Дразіна для двостороннього кватерніонового матричного рівняння з відповідними для кожного випадку обмеженнями. Одержано визначникове зображення розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь. Як застосування визначникових зображень кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень, отримано визначникові зображення розв'язку деяких задач кватерніонно-матричної мінімізації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась в рамках виконання держбюджетних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: “Алгебро-геометричні методи дослідження інваріантних структур на многовидах та релятивістських рівнянь математичної та теоретичної фізики” (номер державної реєстрації 01102U004819), “Розвиток методів дослідження структур на многовидах, асоційованих з групами, алгебрами і графами та розвиток геометричного аналізу стосовно релятивістських полів і часток” (номер державної реєстрації 01102U004819).

Мета і завдання дослідження. Основною тематикою дослідження є вивчення узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів та їх застосувань до розв’язку кватерніонових матричних та деяких диференціальних матричних рівнянь.

Метою дисертаційної роботи є побудова визначникових зображень кватерніонових узагальнених обернених матриць засобом стовпцево-рядкових некомутативних визначників та індукованих ними визначникових зображень узагальнено-обернених розв’язків кватерніонових матричних рівнянь та їх систем.

Об’єктом дослідження є узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів, кватерніонові матричні та диференціальні матричні рівняння та їх системи.

Предметом дослідження є алгебраїчні властивості стовпцевих і рядкових некомутативних визначників кватерніонових матриць, алгебра матриць над тілом кватерніонів.

Методи дослідження дисертаційної роботи є методи теорії некомутативних кілець та алгебр, теорії матриць над тілом.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Отримано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених для матриць над тілом кватерніонів, використовуючи раніше введені здобувачем стовпцеві і рядкові некомутативні визначники. Встановлені нові властивості стовпцевих і рядкових визначників, тим самим внесено значний вклад в розвиток їх теорії.
2. Доведено нові теореми з теорії матриць над тілом кватерніонів, зокрема, теореми про зважений сингулярний розклад матриці, про граничне зображення зваженої матриці Мура-Пенроуза, про загальну алгебричну структуру зваженої матриці Дразіна, тощо.
3. Розроблено новий гранично-ранговий метод, який застосовується для побудови визначникового зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. Для кватерніонових узагальненої оберненої матриці Дразіна, зважених узагальнених обер-

нених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна цей метод застосовується в особливих випадках, пов'язаних з ермітовістю відповідних матриць.

4. За допомогою гранично-рангового методу отримані нові визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених.
5. Поняття та властивості серцевинної оберненої матриці та її узагальнень розширено до кватерніонових матриць. Зокрема, доведено теореми про характеризацію лівої W-зваженої EP-серцевинної оберненої матриці, зваженої MPD-оберненої матриці, тощо.
6. Побудовані визначникові зображення кватерніонових правої та лівої серцевинних обернених, правої та лівої EP-серцевинних обернених, DMP- та MPD-обернених, CMP-оберненої, зважених правої та лівої EP-обернених, зважених DMP- та MPD-обернених і зваженої CMP-оберненої.
7. Новизна отриманих визначникових зображень серцевинної оберненої матриці та її узагальнень зберігається і у випадку їх побудови для комплексних матриць.
8. Побудовані аналоги правила Крамера для кватерніонових двостороннього матричного рівняння, узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливих випадків з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю. Отримані правила Крамера зберігають свою новизну як прямого методу знаходження розв'язку комплексного узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливого випадку з $*$-ермітовістю.
9. Одержані визначникові зображення загального розв'язку системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь та усіх його часткових випадків, а також загального, ермітового, η-(косо-)ермітового розв'язків системи з, відповідно, $*$-ермітовістю чи η-ермітовістю.
10. Отримані визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з обмеженнями, а також розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь.
11. Побудовані визначникові зображення зваженого Мура-Пенроуза оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями, а також його часткових випадків.
12. Одержані визначникові зображення Дразіна зваженого оберненого

розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями та його часткових випадків.

13. Як застосування визначникових зображень кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень, одержано розв'язки деяких задач кватерніонно-матричної мінімізації та побудовані правила Крамера для їх знаходження.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію некомутативних визначників, зокрема у теорію стовпцевих і рядкових визначників, у теорію матриць над тілом кватерніонів, у теорію узагальнених обернених матриць та їх застосувань. Результати роботи можуть бути використанні в теорії матричних рівнянь типу Сильвестра та їх систем, як над тілом кватерніонів, так і над полем комплексних (дійсних) чисел, в теорії диференціальних матричних рівнянь, в задачах з матричних наближень та апроксимації.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержані здобувачем самостійно. У статтях, що опубліковано у співавторстві [1,3,26], до дисертації увійшли результати, що отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати, наведені у дисертаційній роботі, доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях, семінарах, школах:

— Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Львів, Україна, 26-30 жовтня 2020 р.

— XII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 215-й річниці з дня народження В. Буняковського, м.Вінниця, Україна, 02–06 липня, 2019 р.

— XI Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні присвячена 75-річчю В. В. Кириченка, м.Київ, Україна, 3-7 липня 2017 р.

— Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 25-28 серпня 2015 р.

— X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-й річниці з дня народження Ю. А. Дрозда, м.Одеса, Україна, 20-27 серпня, 2015 р.

— IX Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Львів, Україна, 8-13 липня, 2013 р.

— Міжнародна конференція з алгебри, присвячена 100-й річниці С.М. Чернікова, м.Київ, Україна, 23-27 червня, 2012 р.

— Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 19-23 жовтня 2011 р.
— VIII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Луганськ, Україна, 5-12 липня, 2011 р.
— VII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, м. Харків, Україна, 18-23 серпня, 2009 р.
— XIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, м.Київ, Україна, 13-15 травня, 2010 р.
— XII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, м.Київ, Україна, 15-17 травня, 2008 р.
— Міжнародний симпозіум "Питання оптимізації обчислень"(ПОО-XXXIII), м. Ялта, Україна, 23–28 вересня, 2007 р.
— Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька, м. Дрогобич, Україна, 24-28 жовтня 2007 р.
— Науковий семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 20 грудня, 2016 р.
— Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН Україна, 15 січня, 2019 р.
— Науковий семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 4 лютого, 2021 р.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 37 наукових роботах (див. список публікацій здобувача), внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, 30 з них [1-4,6-10,13-16,18-34] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних науково-метричних баз Scopus та\або Web of Science. Частково вони також висвітлені у матеріалах 14 міжнародних конференцій.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, анотації, 5 розділів, розбитих на підрозділи і пункти, висновків, списку використаних джерел із 318 найменувань та додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 444 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** дисертації обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, визначено мету і завдання, об'єкт, предмет і методи дослідження, вказано наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, апробацію матеріалів дисертації, описано структуру, обсяг та її основний зміст.

У **першому розділі** дисертаційної роботи викладено огляд літератури за темою дослідження, підґрунтя окреслених напрямків дослідження та вказано місце отриманих результатів у загальній теорії окреслених напрямків. У першому підрозділі розглядаються елементи лінійної алгебри та теорії матриць над тілом кватерніонів, які будуть необхідні для викладення основного матеріалу. Зокрема, розглядаються властивості стовпцевих і рядкових некомутативних визначників, теорія яких була досліджена здобувачем у кандидатській дисертації[1], і які застосовуються для побудови визначникових зображень узагальнених обернених кватерніонових матриць.

Нехай $\mathbb{H}^{n\times n}$ – множина $n\times n$-матриць над тілом кватерніонів

$$\mathbb{H}=\{a_0+a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}\mid \mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{ijk}=-1,a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\},$$

а $\mathbb{H}^{n\times n}_r$ позначає її підмножину матриць рангу r.

Нехай S_n – симетрична група на множині $I_n=\{1,\ldots,n\}$.

Означення 1.6. *Рядковий визначник по i-му рядку* матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ для довільного $i\in I_n$ будемо визначати, поклавши

$$\mathrm{rdet}_i\mathbf{A}=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{n-r}\left(a_{i\,i_{k_1}}a_{i_{k_1}i_{k_1+1}}\ldots a_{i_{k_1+l_1}i}\right)\ldots\left(a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}\right),$$
$$\sigma=\left(i\,i_{k_1}i_{k_1+1}\ldots i_{k_1+l_1}\right)\left(i_{k_2}i_{k_2+1}\ldots i_{k_2+l_2}\right)\ldots\left(i_{k_r}i_{k_r+1}\ldots i_{k_r+l_r}\right),$$

де σ є перестановкою впорядкованою зліва. Це означає, що перший цикл зліва починається індексом i, інші цикли розпочинаються зліва з мінімального з усіх індексів, які містяться в ньому,

$$i_{k_t}<i_{k_t+s}\quad\text{для всіх}\quad t=2,\ldots,r,\quad s=1,\ldots,l_t,$$

а порядок неперервних циклів (крім першого) обумовлений строгим зростанням зліва направо їх перших елементів, $i_{k_2}<i_{k_3}<\cdots<i_{k_r}$.

Означення 1.7. *Стовпцевий визначник по j-му стовпцю* матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ для довільного $j\in I_n$ будемо означати, поклавши

$$\mathrm{cdet}_j\mathbf{A}=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{n-r}(a_{j_{k_r}j_{k_r+l_r}}\ldots a_{j_{k_r+1}j_{k_r}})\ldots(a_{j\,j_{k_1+l_1}}\ldots a_{j_{k_1+1}j_{k_1}}a_{j_{k_1}j}),$$

---

[1] Кирчей, І.І.: Теорія стовпцевих і рядкових визначників та обернена матриця над тілом з інволюцією. Дисертація на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук за спец. 01.01.06 - алгебра і теорія чисел. КНУ ім. Т. Шевченка, (2008)

$$\tau = (j_{k_r+l_r}\dots j_{k_r+1}j_{k_r})\dots(j_{k_2+l_2}\dots j_{k_2+1}j_{k_2})\ (j_{k_1+l_1}\dots j_{k_1+1}j_{k_1}j)\,,$$

де τ є право-впорядкована перестановка. Це означає, що перший цикл справа починається індексом j, інші цикли розпочинаються справа з мінімального з усіх цілих чисел, які містяться в ньому,

$$j_{k_t} < j_{k_t+s} \quad \text{для всіх} \quad t = 2,\dots,r, \ \ s = 1,\dots,l_t,$$

а порядок неперервних циклів (крім першого) обумовлений строгим зростанням справа наліво їх перших елементів, $j_{k_2} < j_{k_3} < \dots < j_{k_r}$.

У загальному, стовпцеві та рядкові визначники довільної квадратної кватерніонової матриці не є рівними між собою, але коли $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ – ермітова, то

$$\mathrm{rdet}_1\mathbf{A} = \dots = \mathrm{rdet}_n\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_1\mathbf{A} = \dots = \mathrm{cdet}_n\mathbf{A} \in \mathbb{R}.$$

На основі чого вводиться поняття визначника ермітової матриці, $\det\mathbf{A} := \mathrm{rdet}_i\,\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_i\,\mathbf{A}$ для довільного $i = 1,\dots,n$.

У другому підрозділі першого розділу розглядаються деякі раніше отримані факти з теорії узагальнених обернених матриць та їх застосувань.

Виклад основних результатів дисертації починається з **другого розділу**, у якому у рамках теорії стовпцево-рядкових некомутативних визначників одержано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$. У першому підрозділі введено поняття узагальненої оберненої матриці Мура- Пенроуза на основі сингулярного розкладу кватерніонової матриці.

Нехай $\mathbf{A}^*$ - ермітово-спряжена матриця для $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. При цьому, матриця $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовою, якщо $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.

Означення 2.1. Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. Матриця $\mathbf{A}^\dagger$ називається її *узагальненою оберненою матрицею Мура-Пенроуза*, якщо вона задовольняє наступні рівняння

$$(1)\ \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A},\ \ (2)\ \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger,$$
$$(3)\ \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\right)^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger,\ \ (4)\ \left(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\right)^* = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}.$$

Будемо використовувати наступні стандартні позначення. Нехай $\alpha := \{\alpha_1,\dots,\alpha_k\} \subseteq \{1,\dots,m\}$ і $\beta := \{\beta_1,\dots,\beta_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}$ – підмножини стовпцевих і рядкових індексів з $1 \leqslant k \leqslant \min\{m,n\}$. Через $\mathbf{A}^\alpha_\beta$ позначимо підматрицю матриці $\mathbf{A}$ рядки і стовпці, якої індексуються множинами α і

β, відповідно. Тоді, $\mathbf{A}_{\alpha}^{\alpha}$ - її головна підматриця, рядки і стовпці якої індексуються множиною α. Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ - ермітова, тоді $|\mathbf{A}|_{\alpha}^{\alpha}$ - її головний мінор. Через $L_{k,n} := \{\, \alpha : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)\,,\ 1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \dots \leqslant \alpha_k \leqslant n\}$ позначимо множину строго зростаючих послідовностей k натуральних чисел вибраних з $\{1, \dots, n\}$ для всіх $1 \leqslant k \leqslant n$. Для фіксованих $i \in \alpha$ та $j \in \beta$, покладемо $I_{k,m}\{i\} := \{\alpha :\ \alpha \in L_{k,m}, i \in \alpha\}$, $J_{k,\,n}\{j\} := \{\beta :\ \beta \in L_{k,n}, j \in \beta\}$. Через $\mathbf{a}_{.j}$ та $\mathbf{a}_{i.}$ позначимо j-й стовпець та i-й рядок матриці $\mathbf{A}$. Покладемо $\mathbf{A}_{.j}\,(\mathbf{c})$ та $\mathbf{A}_{i.}\,(\mathbf{b})$ для матриць, які одержимо з $\mathbf{A}$ заміною її j-го стовпця вектор-стовпцем $\mathbf{c}$ і її i-го рядка вектор-рядком $\mathbf{b}$.

Доведені теорема про граничне зображення матриці Мура-Пенроуза, леми про ранги матриць та стовпцево-рядкові аналоги характеристичного многочлена, які формують метод (назвемо його гранично-ранговим), на основі якого маємо теорему про визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза.

Теорема 2.2. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, *тоді узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза* $\mathbf{A}^{\dagger} = \left(a_{ij}^{\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *має визначникові зображення*

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^*\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{a}_{i\,.}^*)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

де $\mathbf{a}_{i\,.}^*$ *та* $\mathbf{a}_{.j}^*$ *–* i*-й рядок та* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{A}^*$.

Побудовані визначникові зображення проективних матриць $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} =:$ $\mathbf{Q}_A$ і $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger} =: \mathbf{P}_A$, що є ортогональними проекторами, відповідно, на лівий рядковий та правий стовпцевий простори $\mathcal{R}_l(\mathbf{A})$ та $\mathcal{C}_r(\mathbf{A})$. Також отримані визначникові зображення матриць Мура-Пенроуза для деяких особливих матриць, а саме для ермітово-спряженої, η-ермітово-спряженої, де $\eta \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$- одна з кватерніонових уявних одиниць. Покладемо $\mathbf{A}^{\eta*} = -\eta\mathbf{A}^*\eta$.

Лема 2.13. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$ *і* $\mathbf{A}^{\eta*} = \left(a_{ij}^{\eta*}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *є її* η*-ермітово-спряжена матриця. Тоді матриця Мура-Пенроуза* $(\mathbf{A}^{\eta*})^{\dagger} = \left((a_{ij}^{\eta*})^{\dagger}\right) \in$ $\mathbb{H}^{m\times n}$ *має наступні визначникові зображення,*

$$(a_{ij}^{\eta*})^{\dagger} = -\,\eta\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{a}_{i\,.}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in I_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\alpha}^{\alpha}}\eta =$$

$$= -\eta \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{.i}(\mathbf{a}_{.j}) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,m}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\beta^\beta} \eta.$$

У пункті 2.1.4 будуються визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза для комплексних матриць, замінивши у відповідних визначникових зображеннях стовпцеві і рядкові визначники звичайними визначниками. Отримані нові визначникові зображення матриці Мура-Пенроуза для комплексних матриць є більш застосовними, порівнюючи з раніше введеними.

У підрозділі 2.2 будуються визначникові зображення зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. У пункті 2.2.1 введено поняття зваженої узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза на основі зваженого сингулярного розкладу кватерніонової матриці по аналогії з комплексним випадком [2]. Доведена теорема про зважений сингулярний розклад кватерніонової матриці.

Теорема 2.3. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, *та* $\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{N}$ *додатноозначені матриці порядку* m *і* n, *відповідно. Позначимо* $\mathbf{A}^\sharp = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$. *Тоді існують матриці* $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^{m\times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *що задовольняють умови* $\mathbf{U}^*\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I}_m$ *і* $\mathbf{V}^*\mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$, *і такі, що* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^*$, *де* $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r)$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant ... \geqslant \sigma_r > 0$ *і* σ_i^2 *- ненульові власні значення матриць* $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ *чи* $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$, *які співпадають.*

Означення 2.3. Для матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, *зваженою узагальненою оберненою матрицею Мура-Пенроуза* з вагами $\mathbf{M} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ і $\mathbf{N} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, що є додатноозначеними матрицями (позначається як $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$), є єдина $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, яка задовольняє рівняння:

$$(1)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A};\ (2)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X};$$
$$(3M)\ (\mathbf{MAX})^* = \mathbf{MAX};\ (4N)\ (\mathbf{NXA})^* = \mathbf{NXA}.$$

З теореми 2.3. випливає, що зважена узагальнена обернена матриця Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$ може бути представлена як

$$\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^*\mathbf{M}. \tag{1}$$

Визначникові зображення матриці $\mathbf{A}^\dagger_{M,N}$ будуються у залежності від того, чи матриці $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$, обидві або одна з них, є ермітовими, або

[2]Prasad, K.M., Bapat, R.B.: A note of the khatri inverse. Sankhya Indian J. Stat. **54**, 291-295 (1992)

не є ермітовими. У випадку ермітових матриць $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ чи $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$ будується гранично-ранговий метод, з допомогою якого маємо теорему.

Теорема 2.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$. *Якщо* $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ *або* $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$ *є ермітовими, тоді* $\mathbf{A}_{M,N}^\dagger = \left(a_{ij}^\ddagger\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *має визначникові зображення*

$$a_{ij}^\ddagger = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^\sharp\right)\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}\right|_\beta^\beta} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp)_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^\sharp)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp\right|_\alpha^\alpha}.$$

де $\mathbf{a}_{i.}^\sharp$ *та* $\mathbf{a}_{.j}^\sharp$ *–* i*-й рядок та* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{A}^\sharp$.

У випадку не-ермітових матриць $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ чи $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$ визначникові зображення матриці $\mathbf{A}_{M,N}^\dagger$ будуються, використовуючи представлення (1).

У підрозділі 2.3 будуються визначникові зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Дразіна, означення якої аналогічне комплексному випадку [3].

Означення 2.4. Нехай для $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ з індексом $k = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$ (тобто, k - таке найменше невід'ємне ціле число, що $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k$) існує така матриця $\mathbf{X}$, яка є розв'язком системи рівнянь:

$$(2)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X};\ (5)\ \mathbf{AX} = \mathbf{XA};\ (6)\ \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{X} = \mathbf{A}^k.$$

Тоді матриця $\mathbf{X}$ називається її *узагальненою оберненою матрицею Дразіна* і позначається як $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d$.

Якщо $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 1$, то маємо *групову обернену* $\mathbf{A}^\#$. Очевидно, що коли $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = 0$, то $\mathbf{A}^d = \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$.

Показано, що для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ існує єдина її узагальнена обернена матриця Дразіна $\mathbf{A}^d$. Для ермітової кватерніонової матриці визначникове зображення матриці Дразіна одержимо відповідним гранично-ранговим методом.

Теорема 2.10. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *– ермітова з індексом* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k = r$, *тоді* $\mathbf{A}^d = \left(a_{ij}^d\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *має визначникові*

[3]Drazin, M.P.: Pseudoinverse in associative rings and semigroups. Am. Math. Monthly **65**, 506-514 (1958)

зображення:

$$a_{ij}^d = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i} \left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{A}^{k+1})_{j\,.} (\mathbf{a}_{i.}^{(k)}) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}} \left|\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\alpha}^{\alpha}}.$$

де $\mathbf{a}_{i.}^{(k)}$ *та* $\mathbf{a}_{.j}^{(k)}$ *-* i*-й рядок та* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{A}^k$*.*

Для визначникового зображення довільної кватерніонової матриці використовуємо представлення $\mathbf{A}^d = \mathbf{A}^k(\mathbf{A}^{2k+1})^{\dagger}\mathbf{A}^k$.

Теорема 2.11. *Якщо* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k = r$*, тоді* $\mathbf{A}^d$ *має визначникові зображення*

$$a_{ij}^d = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} \sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left(\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*} \mathbf{A}^{2k+1} \right)_{.\,t} (\hat{\mathbf{a}}_{.\,j}) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*} \mathbf{A}^{2k+1} \right|_{\beta}^{\beta}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}\{s\}} \mathrm{rdet}_s \left(\left(\mathbf{A}^{2k+1} \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*} \right)_{s\,.} (\check{\mathbf{a}}_{i\,.}) \right)_{\alpha}^{\alpha} \right) a_{sj}^{(k)}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,n}} \left| \mathbf{A}^{2k+1} \left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*} \right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $(\mathbf{A}^{2k+1})^{*}\mathbf{A}^k =: \hat{\mathbf{A}}$ *та* $\check{\mathbf{a}}_{i.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\mathbf{A}^k(\mathbf{A}^{2k+1})^{*} =: \check{\mathbf{A}}$*.*

У підрозділі 2.4 розглядається кватерніонова зважена узагальнена обернена матриця Дразіна, означення якої узагальнюється з множини комплексних матриць [4].

Означення 2.5. Для $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ і $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, *W-зважена обернена Дразіна* до матриці $\mathbf{A}$ з вагою $\mathbf{W}$ є єдиним розв'язком рівнянь,

$$(\mathbf{AW})^{k+1}\mathbf{XW} = (\mathbf{AW})^k,\ \mathbf{XWAWX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AWX} = \mathbf{XWA},$$

де $k = \max\{\operatorname{Ind}(\mathbf{AW}), \operatorname{Ind}(\mathbf{WA})\}$. Позначається як $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,\mathbf{W}}$.

[4]Cline, R.E., Greville, T.N.E.: A Drazin inverse for rectangular matrices. Linear Algebra Appl. **29**, 53-62 1980

У випадках, коли $\mathbf{AW} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ або $\mathbf{WA} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ є ермітовими матрицями, можемо застосувати відповідний гранично-ранговий метод. Зокрема маємо теорему.

Теорема 2.18. *Нехай для матриць* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *маємо* $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$ *та* $\mathrm{rank}(\mathbf{AW})^{k+1} = \mathrm{rank}(\mathbf{AW})^{k} = r$. *Якщо матриця* $\mathbf{AW} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ *є ермітовою, тоді* $\mathbf{A}_{d,W} = \left(a_{ij}^{d,W}\right) \in \mathbb{H}^{m\times n}$ *має визначникове зображення:*

$$a_{ij}^{d,W} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{AW}\right)^{k+2}_{.\,i}\left(\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}} \left|\left(\mathbf{AW}\right)^{k+2}\right|^{\beta}_{\beta}},$$

де $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\bar{\mathbf{V}}^{k} = (\mathbf{AW})^{k}\mathbf{A}$.

У випадку коли $\mathbf{AW}$ та $\mathbf{WA}$ не є ермітовими матрицями, то визначникові зображення будуються, використавши представлення побудовані на основі загальної алгебричної структури кватерніонової W-зваженої матриці Дразіна

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} =& \left\{(\mathbf{AW})^{k}\left[(\mathbf{AW})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{AW})^{k}\right\}\mathbf{W}^{\dagger} = \\ =& \mathbf{W}^{\dagger}\left\{(\mathbf{WA})^{k}\left[(\mathbf{WA})^{2k+1}\right]^{\dagger}(\mathbf{WA})^{k}\right\}.\end{aligned}$$

Застосувавши представлення $\mathbf{A}_{d,\mathbf{W}} = \mathbf{A}\left((\mathbf{WA})^{d}\right)^{2} = \left((\mathbf{AW})^{d}\right)^{2}\mathbf{A}$, одержимо ще два нові визначникові зображення матриці $\mathbf{A}_{d,W}$.

Кожен підрозділ другого розділу завершується прикладами, що демонструють отримані результати.

Третій розділ присвячений впровадженню понять та дослідженню властивостей, зокрема визначниковому зображенню, кватерніонової серцевинної оберненої матриці та її узагальнень.

У підрозділі 3.1 поняття, представлення і властивості серцевинної оберненої узагальнюються з множини комплексних матриць[[5]] до кватерніонових.

Означення 3.1. (3.2.) Матриця $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ називається *правою (лівою) серцевинною оберненою* до матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, якщо

$$\mathbf{AX} = \mathbf{P}_{A}, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A})$$

[5] Baksalary, O.M., Trenkler, G.: Core inverse of matrices. Linear Multilinear Algebra 58(6), 681-697 (2010)

$$(\mathbf{XA} = \mathbf{Q}_A, \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A})).$$

Коли така $\mathbf{X}$ існує, то позначається $\mathbf{A}^{\oplus}$ $(\mathbf{A}_{\oplus})$.

Для довільної $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ серцевинні обернені матриці існують, якщо $\operatorname{Ind} \mathbf{A} \leqslant 1$. Маємо наступні представлення серцевинних обернених.

$$\mathbf{A}^{\oplus} = \mathbf{A}^{\#}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}, \quad \mathbf{A}_{\oplus} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\#}.$$

Виходячи з цих представлень та використавши одержані у розділі 2 визначникові зображення групової оберненої та матриці Мура-Пенроуза одержимо визначникові зображення серцевинних обернених. Зокрема, для правої серцевинної оберненої маємо.

Теорема 3.3. *Нехай* $\operatorname{Ind} \mathbf{A} \leqslant 1$, $\operatorname{rank} \mathbf{A}^2 = \operatorname{rank} \mathbf{A} = s$. *Тоді визначникове зображення* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *має вираз*

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{u}}_{i.}))_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} \left|\mathbf{A}^3\left(\mathbf{A}^3\right)^*\right|_{\alpha}^{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ *є* i*-м рядком* $\widetilde{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$. *Тут* $\mathbf{U} = (u_{if}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є такою, що*

$$u_{if} = \sum_{\alpha\in I_{s,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^3\left(\mathbf{A}^3\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha},$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\check{\mathbf{A}} := \mathbf{A}(\mathbf{A}^3)^*$.

У підрозділі 3.2 поняття[6] комплексної *EP*-серцевинної оберненої матриці узагальнюється на кватерніонові матриці.

Означення 3.3. (3.4.) Матриця $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ називається *правою (лівою) EP-серцевинною оберненою* до $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, якщо вона задовольняє умови

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{A}, \ \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) = \mathcal{C}_r(\mathbf{X}^*) = \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^d)$$
$$(\mathbf{XAX} = \mathbf{A}, \ \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) = \mathcal{R}_l(\mathbf{X}^*) = \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^d)).$$

Позначається як $\mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}}$ $(\mathbf{A}_{\textcircled{\dagger}})$.

З лем про характеризацію правої та лівої *EP*-серцевинних обернених слідують наступні їх представлення

[6] Prasad, K.M., Mohana, K.S.: Core-EP inverse. Linear Multilinear Algebra **62**(3), 792-802 (2014)

$$\mathbf{A}^{\oplus} = \mathbf{A}^{k}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger}, \quad \mathbf{A}_{\oplus} = \left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\dagger}\mathbf{A}^{k}.$$

Звідки, застосувавши отримані визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза, одержимо

Теорема 3.5. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *з* $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k} = s$, *та існують права* $\mathbf{A}^{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,r}\right)$ *та ліва* $\mathbf{A}_{\oplus} = \left(a_{ij}^{\oplus,l}\right)$ *EP-серцевинні обернені матриці. Тоді вони мають наступні визначникові зображення, відповідно,*

$$a_{ij}^{\oplus,r} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_{j}\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\right)_{j.}(\hat{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}}\left|\mathbf{A}^{k+1}\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

$$a_{ij}^{\oplus,l} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_{i}\left(\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}(\check{\mathbf{a}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{s,n}}\left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{k+1}\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *– i-й рядок матриці* $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{k}(\mathbf{A}^{k+1})^{*}$ *та* $\check{\mathbf{a}}_{.j}$ *– j-й стовпець матриці* $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{k+1})^{*}\mathbf{A}^{k}$.

У підрозділі 3.2 розглядаються кватерніонові *DMP*- і *MPD*-обернені матриці.

Означення 3.5. (3.6.) Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ з $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$. Матриця $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ називається *DMP- (MPD-)оберненою* до $\mathbf{A}$, якщо вона задовольняє умови

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{XA} = \mathbf{A}^{d}\mathbf{A},\ \ \mathbf{A}^{k}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{k}\mathbf{A}^{\dagger}$$
$$(\mathbf{XAX} = \mathbf{X},\ \mathbf{AX} = \mathbf{AA}^{d},\ \ \mathbf{XA}^{k} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}^{k}).$$

Позначається як $\mathbf{A}^{d,\dagger}$ $(\mathbf{A}^{\dagger,d})$.

Лема 3.5. (3.6)[7] *Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, *її DMP- (MPD)-обернена завжди існує та є єдиною, при цьому*

$$\mathbf{A}^{d,\dagger} = \mathbf{A}^{d}\mathbf{AA}^{\dagger} \ \ (\mathbf{A}^{\dagger,d} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{AA}^{d}).$$

Використавши одержані у розділі 2 визначникові зображення матриць Мура-Пенроуза та Дразіна, одержимо визначникові зображення *DMP*- і *MPD*-обернених. Зокрема, для DMP-оберненої маємо теорему.

[7] Malik, S.B., Thome, N.: On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index, Appl. Math. Comput. 226, 575-580 (2014)

Теорема 3.7. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_s^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$ *та* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^k) = s_1$. *Тоді її DMP-обернена* $\mathbf{A}^{d,\dagger} = \left(a_{ij}^{d,\dagger}\right)$ *має наступні визначникові зображення.*

(i) *Коли* $\mathbf{A}$ *є довільною матрицею, то*

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\tilde{\mathbf{u}}_{i.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{s_1,n}} \left|\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}\mathbf{A}^*|_\alpha^\alpha}.$$

Тут $\widetilde{\mathbf{u}}_{i.}$ *– i-й рядок матриці* $\widetilde{\mathbf{U}} := \mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{A}^*$, *а матриця* $\mathbf{U} = (u_{if}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *є така, що*

$$u_{if} = \sum_{\alpha\in I_{s_1,n}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^*\right)_{.f}(\check{\mathbf{a}}_{i\,.})\right)_\alpha^\alpha,$$

де $\check{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *– i-й рядок матриці* $\check{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{2k+1})^*$.

(ii) *Коли* $\mathbf{A}$ *– ермітова, то*

$$a_{ij}^{d,\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{v}_{i.})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\alpha^\alpha} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.\,i}(\mathbf{w}_{.j})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{s_1,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta\in J_{s,n}} |\mathbf{A}^2|_\beta^\beta},$$

де

$$\mathbf{v}_{i.} = \left[\sum_{\beta\in J_{s_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.i}\left(\mathbf{a}_{.f}^{(k+2)}\right)\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times n}, \quad f = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{w}_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{s,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}^2)_{j.}(\mathbf{a}_{l.}^{(k+2)})\right)_\alpha^\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1,\ldots,n.$$

У підрозділах 3.4, 3.5, 3.6 та 3.7 розглядаються кватерніонові *CMP*-обернена, та зважені ліва та права *EP*-обернена, *DMP*- і *MPD*-обернені, а також *CMP*-обернена. Одержані теореми про їх характеризацію та визначникові зображення.

Узагальнені обернені є важливим і ефективним інструментом розв'язання матричних рівнянь. **Четвертий розділ** присвячений кватерніоновим узагальненим матричним рівнянням типу Сильвестра та їх системам.

У підрозділі 4.1 розглядається двостороннє матричне рівняння

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{D}, \tag{2}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^{p\times q}, \mathbf{D} \in \mathbb{H}^{m\times q}$ – відомі матриці, а матриця $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times p}$ – невідома, а також його часткові випадки, коли $\mathbf{A}$ або $\mathbf{B}$ - одиничні матриці та особливі випадки з $*$-ермітовістю та η-ермітовістю. Отримані правила Крамера для їх розв'язків, у випадку якщо рівняння (2) - сумісне, або нормальних псевдорозв'язків. Зокрема, для рівняння з обмеженням

$$\mathbf{AXA}^{\eta*} = \mathbf{B},\ \mathbf{B} = \mathbf{B}^{\eta*},$$

його частковий η-ермітовий розв'язок виражається як $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B}\left(\mathbf{A}^{\eta*}\right)^{\dagger}$, який покомпонентно можна зобразити наступним чином

$$x_{ij} = \frac{-\eta \sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\mathbf{v}_{i.}^{\eta}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2} = \\ = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{u}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\right)^2},$$

де

$$\mathbf{v}_{i.}^{\eta} = \left[-\eta \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\widehat{\mathbf{a}}_{.s}\right)\right)_{\beta}^{\beta}\eta\right] \in \mathbb{H}^{1\times n},\ s = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{u}_{.j} = \left[-\eta \sum_{\alpha\in I_{r,n}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{j.}\left(\widehat{\mathbf{a}}_{l.}^{\eta}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\eta\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1},\ l = 1,\ldots,n.$$

Тут $\widehat{\mathbf{a}}_{.s}$ – s-й стовпець $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{A}^{\eta}$ і $\widehat{\mathbf{a}}_{l.}^{\eta}$ – l-й рядок $\widehat{\mathbf{A}}^{\eta} = \mathbf{A}^{\eta*}\mathbf{B}^{\eta}\mathbf{A}$.

У підрозділі 4.2 розглядається узагальнене кватерніонове матричне рівняння Сильвестра

$$\mathbf{AXB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}. \tag{3}$$

Виходячи з[8], його частковий розв'язок може бути виражений як

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\dagger}, \tag{4}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger} + \mathbf{Q}_S\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger}, \tag{5}$$

де $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{C} = (\mathbf{I}-\mathbf{P}_A)\mathbf{C}$, $\mathbf{N} = \mathbf{D}\mathbf{L}_B = \mathbf{D}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_B)$, $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{L}_M = \mathbf{C}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_M)$.

Наступна теорема дає визначникове зображення розв'язку (4)-(5).

Теорема 4.14. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_{r_1}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}_{r_2}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}_{r_3}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}_{r_4}$, $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_5$, $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_6$, $\operatorname{rank}\mathbf{S} = r_7$. *Тоді розв'язок (4)-(5),* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, $\mathbf{Y} = (y_{gf}) \in \mathbb{H}^{p\times q}$ *покомпонентно* $x_{ij} = x^{(1)}_{ij} - x^{(2)}_{ij} - x^{(3)}_{ij}$, $y_{gf} = y^{(1)}_{gf} + y^{(2)}_{gf}$, *має наступні визначникові зображення.*

(i) *Для* $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{X}_1 = \left(x^{(1)}_{ij}\right)$,

$$x^{(1)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{d}^B_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{d}^A_{i.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.\,j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right)_{j.}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{k.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1},$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.i}\left(\mathbf{e}^{(1)}_{.l}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times r}.$$

Тут $\mathbf{e}^{(1)}_{k.}$ *і* $\mathbf{e}^{(1)}_{.\,l}$ *є k-м рядком і l-м стовпцем матриці* $\mathbf{E}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{E}\mathbf{B}^*$.

(ii) *Для* $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{X}_2 = \left(x^{(2)}_{ij}\right)$,

$$x^{(2)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^*\right)_{j.}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_{i.}\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in I_{r_5,m}} |\mathbf{M}\mathbf{M}^*|^{\alpha}_{\alpha} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

[8]Wang, Q.W., Van der Woude, J.W., Chang, H.X.: A system of real quaternion matrix equations with applications. Linear Algebra Appl. **431**(1), 2291-2303 (2009)

де $\widetilde{\phi}_{i.}$ *-* i*-й рядок* $\widetilde{\mathbf{\Phi}} := \mathbf{\Phi}\mathbf{E}\mathbf{B}^*$*. Матриця* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{iq})$ *є така, що*

$$\phi_{iq} = \sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\boldsymbol{\varphi}^{M}_{.\,q} \right) \right)^{\beta}_{\beta} = \\ = \sum_{\alpha \in I_{r_5,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q.} \left(\boldsymbol{\varphi}^{A}_{i.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha},$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}^{M}_{.\,q} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_5,m}\{q\}} \operatorname{rdet}_q \left((\mathbf{M}\mathbf{M}^*)_{q\,.} \left(\mathbf{c}^{(1)}_{f.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1},$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{A}_{i\,.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{c}^{(1)}_{.s} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times m}.$$

Тут $\mathbf{c}^{(1)}_{f\,.}$ *і* $\mathbf{c}^{(1)}_{.\,s}$ *є* f*-м рядком і* s*-м стовпцем* $\mathbf{C}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}\mathbf{M}^*$*.*

(iii) *Для* $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{N}^\dagger\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{X}_3 = \left(x^{(3)}_{ij} \right)$,

$$x^{(3)}_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i} \left(\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha \in J_{r_6,s}} |\mathbf{N}^*\mathbf{N}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} |\mathbf{B}\mathbf{B}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\upsilon}}_{.j}$ *-* j*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{\Upsilon}} = \mathbf{A}^*\mathbf{S}\mathbf{\Upsilon}$*. Матриця* $\mathbf{\Upsilon} = (\upsilon_{tj}) \in \mathbb{H}^{p \times n}$ *– така, що*

$$\upsilon_{tj} = \sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t \left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t} \left(\widetilde{\mathbf{e}}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{e}}_{.j}$ *-* j*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\Psi$*, а* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{fj}) \in \mathbb{H}^{s \times n}$ *задається умовою*

$$\psi_{fj} = \sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\zeta^{N}_{f.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} = \\ = \sum_{\beta \in J_{r_6,s}\{f\}} \operatorname{cdet}_f \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f} \left(\zeta^{B}_{.j} \right) \right)^{\beta}_{\beta},$$

де

$$\boldsymbol{\zeta}^{N}_{f.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_6,s}\{f\}} \mathrm{cdet}_f \left((\mathbf{N}^*\mathbf{N})_{.f} \left(\mathbf{d}^{(1)}_{.k}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times r},\ k = 1,\ldots,r,$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{B}_{.j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}} \mathrm{rdet}_j \left((\mathbf{B}\mathbf{B}^*)_{j.} \left(\mathbf{d}^{(1)}_{l.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{s\times 1},\ l = 1,\ldots,s,$$

та $\mathbf{d}^{(1)}_{.k}$ *і* $\mathbf{d}^{(1)}_{l.}$ *є* k*-м стовпцем і* l*-м рядком матриці* $\mathbf{D}_1 = \mathbf{N}^*\mathbf{D}\mathbf{B}^*$.

(iv) *Для* $\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{D}^{\dagger} = \mathbf{Y}_1 = \left(y^{(1)}_{gf}\right)$,

$$y^{(1)}_{gf} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}\{g\}} \mathrm{cdet}_g \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.g} \left(\mathbf{d}^{D}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|^{\alpha}_{\alpha}} = $$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}\{f\}} \mathrm{rdet}_f \left((\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.} \left(\mathbf{d}^{M}_{g.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}} |\mathbf{M}^*\mathbf{M}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}} |\mathbf{D}\mathbf{D}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де

$$\mathbf{d}^{D}_{.\,f} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_4,q}\{f\}} \mathrm{rdet}_f \left((\mathbf{D}\mathbf{D}^*)_{f.} \left(\mathbf{e}^{(4)}_{k.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha}\right] \in \mathbb{H}^{p\times 1},\ =1,\ldots,p,$$

$$\mathbf{d}^{M}_{g\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_5,p}\{g\}} \mathrm{cdet}_g \left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.g} \left(\mathbf{e}^{(4)}_{.l}\right)\right)^{\beta}_{\beta}\right] \in \mathbb{H}^{1\times q},\ l = 1,\ldots,q.$$

Тут $\mathbf{e}^{(4)}_{k\,.}$ *і* $\mathbf{e}^{(4)}_{.\,l}$ *є* k*-м рядком і* l*-м стовпцем матриці* $\mathbf{E}_4 := \mathbf{M}^*\mathbf{E}\mathbf{D}^*$.

(v) *Для* $\mathbf{Q}_S\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{E}\mathbf{N}^{\dagger} = \mathbf{Y}_2 = \left(y^{(2)}_{gf}\right)$,

$$y^{(2)}_{gf} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,p}\{g\}} \mathrm{cdet}_g \left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.g} \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.f}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,p}} |\mathbf{S}^*\mathbf{S}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_3,p}} |\mathbf{C}^*\mathbf{C}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\alpha\in I_{r_6,q}} |\mathbf{N}\mathbf{N}^*|^{\alpha}_{\alpha}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{.\,f}$ - f*-й рядок* $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} := \mathbf{S}^*\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}$. *Матриця* $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{tf})$ – *така, що*

$$\omega_{tf} = \sum_{\alpha\in I_{r_6,q}\{f\}} \mathrm{rdet}_f \left((\mathbf{N}\mathbf{N}^*)_{f\,.} \left(\boldsymbol{\xi}^{C}_{t\,.}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} =$$

$$= \sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left(\left(\mathbf{C}^* \mathbf{C} \right)_{.\,t} \left(\boldsymbol{\xi}^N_{.\,f} \right) \right)^{\beta}_{\beta},$$

де

$$\boldsymbol{\xi}^C_{t\,.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \mathrm{cdet}_t \left(\left(\mathbf{C}^* \mathbf{C} \right)_{.\,t} \left(\mathbf{e}^{(5)}_{.\,k} \right) \right)^{\beta}_{\beta} \right] \in \mathbb{H}^{1 \times q},\ k = 1, \ldots, q,$$

$$\boldsymbol{\xi}^N_{.f} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_6,q}\{f\}} \mathrm{rdet}_f \left(\left(\mathbf{N} \mathbf{N}^* \right)_{f\,.} \left(\mathbf{e}^{(5)}_{l\,.} \right) \right)^{\alpha}_{\alpha} \right] \in \mathbb{H}^{s \times 1},\ l = 1, \ldots, p.$$

Тут $\mathbf{e}^{(5)}_{.\,k}$ *і* $\mathbf{e}^{(5)}_{l\,.}$ *є* k*-м стовпцем і* l*-м рядком матриці* $\mathbf{E}_5 = \mathbf{C}^* \mathbf{E} \mathbf{N}^*$.

У другому підрозділі отримані також визначникові зображення загальних, ермітових та η-ермітових розв'язків рівняння (3) із $*$-ермітовістю та η-ермітовістю.

У третьому підрозділі розглядається система

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{X} \mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{X} \mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2, \end{cases} \tag{6}$$

де $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m \times n}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{H}^{r \times s}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{m \times s}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{H}^{k \times n}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}^{r \times p}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{k \times p}$ - задані матриці та $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n \times r}$ – невідома. Побудовані визначникові зображення розв'язків системи та її часткових випадків. Також знайдені визначникові зображення загальних, ермітових та η-ермітових розв'язків системи (6) із $*$-ермітовістю та η-ермітовістю.

У першому підрозділі **п'ятого розділу** розглядаються визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку двостороннього матричного рівняння (2), де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n \times m}$ задані матриці, і $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n \times m}$ – невідома.

Нехай $\operatorname{Ind} \mathbf{A} = k_1$ і $\operatorname{Ind} \mathbf{B} = k_2$. Відомо, що рівняння (2) з обмеженнями

$$\mathcal{R}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{A}^{k_1}), \tag{7}$$

$$\mathcal{N}_r(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_r(\mathbf{B}^{k_2}), \quad \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l(\mathbf{B}^{k_2}), \tag{8}$$

має єдиний розв'язок $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d \mathbf{D} \mathbf{B}^d$, де $\mathbf{A}^d$, $\mathbf{B}^d$ – матриці Дразіна.

Визначникове зображення розв'язку одержимо в залежності від того чи матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ є ермітовими, чи довільними. Зокрема, маємо.

Теорема 5.1. *Нехай матриці* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n \times n}$ *і* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m \times m}$ *обидві є ермітовими, при цьому* $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{k_1+1} = \operatorname{rank} \mathbf{A}^{k_1} = r_1 \leqslant n$ *і* $\operatorname{rank} \mathbf{B}^{k_2+1} =$

$\operatorname{rank} \mathbf{B}^{k_2} = r_2 \leqslant m$. *Позначимо* $\mathbf{A}^{k_1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{k_2} =: \widetilde{\mathbf{D}} = (\widetilde{d}_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$. *Тоді розв'язок* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^d\mathbf{D}\mathbf{B}^d = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *рівняння (2) з обмеженнями (7)-(8) має визначникові зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}^B_{.\,j}\right)\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|^\alpha_\alpha} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1}\right)_{j\,.}\left(\mathbf{d}^A_{i\,.}\right)\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^{k_1+1}\right|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,m}} \left|\mathbf{B}^{k_2+1}\right|^\alpha_\alpha},$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.\,j} = \left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}^{k_1+1}\right)_{j.}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{l.}\right)\right)^\alpha_\alpha\right] \in \mathbb{H}^{n\times 1}, \quad l = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} = \left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1}\right)_{.i}\left(\tilde{\mathbf{d}}_{.t}\right)\right)^\beta_\beta\right] \in \mathbb{H}^{1\times m}, \quad t = 1,\ldots,m.$$

Тут $\widetilde{\mathbf{d}}_{l.}$ *і* $\widetilde{\mathbf{d}}_{.t}$ *–* l*-й рядок і* t*-й стовпець матриці* $\widetilde{\mathbf{D}}$.

Розглянуті також випадки, коли обидві матриці не є ермітовими. А також змішані випадки, коли одна з матриць є ермітовою. Також будуються аналоги правила Крамера для Дразіна оберненого розв'язку часткових випадків рівняння з обмеженнями (7)-(8), коли одна з матриць є одиничною.

Узагальнену обернену матрицю Дразіна можна застосувати до розв'язку деяких кватерніонових сингулярних диференціальних матричних рівнянь. У підрозділі 5.1 розглядається наступне праве лінійне кватерніонове диференціальне матричне рівняння

$$\mathbf{X}^{'} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}, \tag{9}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, а матриці, $\mathbf{B}(t)$ і $\mathbf{X}(t)$, відповідно, кватерніонно-значні матричні функції з дійсною змінною $t \in \mathbb{R}$.

Маємо теорему аналогічну до комплексного випадку [[9]].

[9] Campbell, S.L., Meyer Jr, C.D., Rose, N.J.: Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, SIAM J. Appl. Math. **31**, 411-425 (1976)

Теорема 5.8. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$, *тоді*

$$\int e^{-\mathbf{A}t}\mathrm{d}t = -\mathbf{A}^d e^{-\mathbf{A}t}+$$

$$+(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^d)t\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{2}t + \frac{\mathbf{A}^2}{3!}t^2 + ... + \frac{(-1)^{k-1}\mathbf{A}^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right] + \mathbf{G}, \qquad (10)$$

де $\mathbf{A}^d$ *– узагальнена обернена матриця Дразіна,* $\mathbf{G} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *– довільна матриця.*

Поклавши $\mathbf{G} = 0$, маємо частковий розв'язок.

Теорема 5.9. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$, $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k$, $\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^k = r < n$, *тоді частковий розв'язок рівняння* (9), $\mathbf{X}(t) = (x_{ij}(t))$, *має наступне визначникове зображення.*

(i) *Коли матриця* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *– ермітова, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|^{\beta}_{\beta}} +$$

$$+\left(b_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k+1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|^{\beta}_{\beta}}\right) t-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\widehat{b}^{(1)}_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(k+2)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|^{\beta}_{\beta}}\right) t^2 + ...$$

$$\frac{(-1)^k}{k!}\left(\widehat{b}^{(k-1)}_{ij} - \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.\,i}\left(\widehat{\mathbf{b}}^{(2k)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} |\mathbf{A}^{k+1}|^{\beta}_{\beta}}\right) t^k,$$

де $\mathbf{A}^l\mathbf{B} =: \widehat{\mathbf{B}}^{(l)} = \left(\widehat{b}^{(l)}_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *для всіх* $l = 1, \ldots, 2k$.

(ii) *Коли* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *- довільна, то*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} a^{(k)}_{it} \sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{s\}} \operatorname{cdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\widehat{\mathbf{d}}^{(0)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right|^{\beta}_{\beta}}$$

$$+\left(b_{ij}-\frac{\sum\limits_{s=1}^{n}a_{is}^{(k)}\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{s\}}\operatorname{cdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}\right)t$$

$$-\frac{1}{2}\left(\widehat{b}_{ij}^{(1)}-\frac{\sum\limits_{t=1}^{n}a_{it}^{(k)}\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{s\}}\operatorname{cdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}\right)t^2+\ldots$$

$$\frac{(-1)^k}{k!}\left(\widehat{b}_{ij}^{(k-1)}-\frac{\sum\limits_{s=1}^{n}a_{is}^{(k)}\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{s\}}\operatorname{cdet}_s\left(\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)_{.\,s}\left(\widehat{\mathbf{d}}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{A}^{2k+1}\right)^{*}\mathbf{A}^{2k+1}\right|_{\beta}^{\beta}}\right)t^k,$$

де $(\mathbf{A}^{2k+1})^{*}\mathbf{A}^{k+l}\mathbf{B}=:\widehat{\mathbf{D}}^{(l)}=(\widehat{d}_{ij}^{(l)})\in\mathbb{H}^{n\times n}$ *для всіх* $l=0,\ldots,k$.

У підрозділі 5.2 розглядаються застосування зваженої кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза до розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Лема 5.6. [10] *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}_{r_2}^{p\times q}$, *а матриці* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ *і* $\mathbf{Q}$ *є додатноозначеними порядків* m, n, p *і* q, *відповідно. Позначимо* $\mathbf{A}^{\sharp}=\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{M}$ *і* $\mathbf{B}^{\sharp}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^{*}\mathbf{P}$. *Якщо* $\mathbf{D}\subset\mathcal{C}_r\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp},\mathbf{B}^{\sharp}\mathbf{B}\right)$ *і* $\mathbf{D}\subset\mathcal{R}_l\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A},\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right)$ *для двостороннього рівняння (2) з обмеженнями*

$$\mathcal{C}_r(\mathbf{X})\subset\mathbf{N}^{-1}\mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{*}),\ \mathcal{N}_r(\mathbf{X})\supset\mathbf{P}^{-1}\mathcal{N}_r(\mathbf{B}^{*}),\tag{11}$$

$$\mathcal{R}_l(\mathbf{X})\subset\mathcal{R}_l(\mathbf{A}^{*})\mathbf{M},\ \mathcal{N}_l(\mathbf{X})\supset\mathcal{N}_l(\mathbf{B}^{*})\mathbf{Q}\tag{12}$$

тоді єдиним розв'язком рівняння (2) з обмеженнями (11-12) є

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}\mathbf{D}\mathbf{B}_{P,Q}^{\dagger}.\tag{13}$$

Розглядаються визначникові зображення розв'язку (13) в залежності від того, чи матриці $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}$ є ермітовими та повноранговими. Зокрема, для ермітового випадку маємо.

Теорема 5.17. *Нехай* $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}$ – *ермітові. Позначимо* $\widetilde{\mathbf{D}}=\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\sharp}$. *Тоді розв'язок (13) має наступні визначникові зображення.*

(i) *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A}=r_1<n$ *і* $\operatorname{rank}\mathbf{B}=r_2<p$, *тоді*

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,n}\{i\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{d}_{.\,j}^{B}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,p}}\left|\mathbf{B}\mathbf{B}^{\sharp}\right|_{\alpha}^{\alpha}}=$$

[10] Song, G.J.: Determinantal representation of the generalized inverses over the quaternion skew field with applications. Appl. Math. Comput. **219**, 656–667 (2012)

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp \right)_{j\,.} \left(\mathbf{d}^A_{i\,.} \right) \right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left| \mathbf{A}^\sharp \mathbf{A} \right|^\beta_\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}} \left| \mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp \right|^\alpha_\alpha},$$

де

$$\mathbf{d}^B_{\cdot\, j} = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp \right)_{j.} \left(\tilde{\mathbf{d}}_{k.} \right) \right)^\alpha_\alpha \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A} \right)_{.i} \left(\tilde{\mathbf{d}}_{.\,l} \right) \right)^\beta_\beta \right] \in \mathbb{H}^{1 \times p}, \quad l = 1, \ldots, p. \tag{15}$$

Тут $\tilde{\mathbf{d}}_{k\,.}$ *і* $\tilde{\mathbf{d}}_{.\,l}$ *–* k*-й рядок і* l*-й стовпець* $\widetilde{\mathbf{D}}$.

(ii) Якщо $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$ і $\operatorname{rank} \mathbf{B} = p$, тоді

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{cdet}_i (\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A})_{.\,i} \left(\mathbf{d}^B_{.j} \right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)} = \frac{\operatorname{rdet}_j (\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j.} \left(\mathbf{d}^A_{i\,.} \right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)},$$

де

$$\mathbf{d}^B_{.j} := \left[\operatorname{rdet}_j (\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j.} \left(\tilde{\mathbf{d}}_{k\,.} \right) \right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

$$\mathbf{d}^A_{i\,.} := \left[\operatorname{cdet}_i (\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A})_{.\,i} \left(\tilde{\mathbf{d}}_{.\,l} \right) \right] \in \mathbb{H}^{1 \times p}, \quad l = 1, \ldots, p. \tag{17}$$

(iii) *Якщо* $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$ *і* $\operatorname{rank} \mathbf{B} = r_2 < p$*, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A} \right)_{.\,i} \left(\mathbf{d}^B_{.\,j} \right) \right)}{\det(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}) \cdot \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}} \left| \mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp \right|^\alpha_\alpha} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left(\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp \right)_{j\,.} \left(\mathbf{d}^A_{i\,.} \right) \right)^\alpha_\alpha}{\det(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A}) \cdot \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,p}} \left| \mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp \right|^\alpha_\alpha},$$

де $\mathbf{d}^B_{.\,j}$ *є (14) і* $\mathbf{d}^A_{i\,.}$ *знаходиться за формулою* (17).

(iv) *Якщо* $\operatorname{rank} \mathbf{A} = r_1 < n$ *і* $\operatorname{rank} \mathbf{B} = p$*, тоді*

$$x_{i\,j} = \frac{\operatorname{rdet}_j (\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)_{j.} \left(\mathbf{d}^A_{i\,.} \right)}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left| \mathbf{A}^\sharp \mathbf{A} \right|^\beta_\beta \cdot \det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^\sharp \mathbf{A} \right)_{.\,i} \left(\mathbf{d}^B_{.\,j} \right) \right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left| \mathbf{A}^\sharp \mathbf{A} \right|^\beta_\beta \cdot \det(\mathbf{B}\mathbf{B}^\sharp)},$$

де $\mathbf{d}^B_{.\,j}$ *є (16) і* $\mathbf{d}^A_{i\,.}$ *визначається формулою* (15).

У підрозділі 5.3 визначникові зображення зваженої кватерніонової узагальненої оберненої матриці Дразіна застосовуються для компонентного розв'язку деяких кватерніонових матричних рівнянь з обмеженнями.

Розглядаються кватерніонове двостороннє матричне рівняння,

$$\mathbf{W}_1\mathbf{A}\mathbf{W}_1\mathbf{X}\mathbf{W}_2\mathbf{B}\mathbf{W}_2 = \mathbf{D},$$

та його ліво- та правосторонні часткові випадки. Зокрема, маємо лівостороннє матричне рівняння з обмеженням,

$$\mathbf{WAWX} = \mathbf{D}, \tag{18}$$

$$\mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r\left((\mathbf{AW})^k\right), \mathcal{N}_l(\mathbf{X}) \supset \mathcal{N}_l\left((\mathbf{WA})^k\right), \tag{19}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{n\times p}$ та $\mathbf{W} \in \mathbb{H}_r^{n\times m}$ з $k = \max\{\mathrm{Ind}(\mathbf{AW}), \mathrm{Ind}(\mathbf{WA})\}$, $\mathrm{rank}\,(\mathbf{AW})^k = \mathrm{rank}\,\mathbf{V}^k = r_1$ і $\mathrm{rank}\,(\mathbf{WA})^k = \mathrm{rank}\,\mathbf{U}^k = r_2$.

Теорема 5.21. *Якщо $\mathbf{D} \subset \mathcal{C}_r\left((\mathbf{AW})^k\right)$ і $\mathbf{D} \supset \mathcal{N}_l\left((\mathbf{WA})^k\right)$, тоді рівняння (18) з обмеженням (19) має єдиний розв'язок, $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{d,W}\mathbf{D}$, котрий має наступні визначникові зображення.*

(i)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{W}^*\mathbf{W})_{.i}\,(\widetilde{\omega}^{(1)}_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,m}} |\mathbf{W}^*\mathbf{W}|^{\beta}_{\beta} \sum\limits_{\beta\in J_{r_2,\,n}} \left|\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\mathbf{U}^{2k+1}\right|^{\beta}_{\beta}},$$

де $\widetilde{\omega}^{(1)}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\widetilde{\Omega}_1 = \mathbf{W}^*\mathbf{U}^k\Omega_1$. Матриця $\Omega_1 = \left(\omega^{(1)}_{tj}\right)$ є такою, що

$$\omega^{(1)}_{ts} := \sum_{\beta\in J_{r_2,\,n}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\mathbf{U}^{2k+1}\right)_{.t}(\hat{\mathbf{d}}_{.j})\right)^{\beta}_{\beta}.$$

де $\hat{\mathbf{d}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\hat{\mathbf{D}} = \left(\mathbf{U}^{2k+1}\right)^*\mathbf{U}^k\mathbf{D}$.

(ii)

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{m} v^{(k)}_{it} \sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}\{t\}} \mathrm{cdet}_t\left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right)_{.\,t}\left(\widetilde{\psi}^{(1)}_{.j}\right)\right)^{\beta}_{\beta}}{\left(\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,\,m}} \left|\left(\mathbf{V}^{2k+1}\right)^*\mathbf{V}^{2k+1}\right|^{\beta}_{\beta}\right)^2},$$

де $\widetilde{\psi}^{(1)}_{.j}$ - j-й стовпець матриці $\widetilde{\mathbf{\Psi}}_1 := (\mathbf{V}^{2k+1})^*\mathbf{V}^{2k}\mathbf{\Psi}\mathbf{AD}$, і матриця $\mathbf{\Psi} = (\psi_{sj})$ така, що

$$\psi_{sj} = \sum_{\beta \in J_{r_1,\, m}\{s\}} \mathrm{cdet}_s \left(\left(\left(\mathbf{V}^{2k+1} \right)^* \mathbf{V}^{2k+1} \right)_{.\, s} (\hat{\mathbf{v}}_{.\, j}) \right)_\beta^\beta$$

і $\hat{\mathbf{v}}_{.\, j}$ *-* j*-й стовпець матриці* $(\mathbf{V}^{2k+1})^* \mathbf{V}^k =: \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{H}^{m \times n}$.

(iii) *Якщо матриця* $\mathbf{AW} \in \mathbb{H}^{m \times m}$ *– ермітова, тоді*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\, m}\{i\}} \mathrm{cdet}_i \left((\mathbf{AW})^{k+2}_{.\, i} (\mathbf{f}_{.j}) \right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,\, m}} \left| (\mathbf{AW})^{k+2} \right|_\beta^\beta},$$

де $\mathbf{f}_{.j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{F} = (\mathbf{AW})^k \mathbf{AD}$.

У підрозділі 5.4, як приклад застосування кватерніонової серцевинної оберненої матриці та її узагальнень, розглянемо наступну задачу кватерніонових матричних наближень з обмеженнями:

$$\|\mathbf{AXB} - \mathbf{C}\| = \min, \quad \mathcal{C}_r(\mathbf{X}) \subset \mathcal{C}_r(\mathbf{A}^{k_1}), \quad \mathcal{R}_l(\mathbf{X}) \subset \mathcal{R}_l(\mathbf{B}^{k_2}), \tag{20}$$

де $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ з $k_1 = \mathrm{Ind}\, \mathbf{A}$, $k_2 = \mathrm{Ind}\, \mathbf{B}$, $\mathrm{rank}\, \mathbf{A}^{k_1} = r_1$ і $\mathrm{rank}\, \mathbf{B}^{k_2} = r_2$.

Теорема 5.25. *Єдиний розв'язок задачі матричної мінімізації* (20)*:*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}} \mathbf{C} \mathbf{B}_{\textcircled{\dagger}}. \tag{21}$$

де $\mathbf{A}^{\textcircled{\dagger}}$ *– права EP-обернена,* $\mathbf{B}_{\textcircled{\dagger}}$ *– ліва EP-обернена.*

Теорема 5.26. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{n \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m \times n}$ *з* $k_1 = \mathrm{Ind}\, \mathbf{A}$, $k_2 = \mathrm{Ind}\, \mathbf{B}$, $\mathrm{rank}\, \mathbf{A}^{k_1} = r_1$ *та* $\mathrm{rank}\, \mathbf{B}^{k_2} = r_2$. *Розв'язок* $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{H}^{m \times n}$ *заданий умовою* (21) *покомпонентно можна подати як*

$$x_{ij} = \frac{\tilde{c}_{ij}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_1,m}} \left| \mathbf{A}^{k_1+1} \left(\mathbf{A}^{k_1+1} \right)^* \right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\beta \in J_{r_2,n}} \left| \left(\mathbf{B}^{k_2+1} \right)^* \mathbf{B}^{k_2+1} \right|_\beta^\beta},$$

де $\widetilde{\mathbf{C}} = (\tilde{c}_{ij}) = \mathbf{\Phi C \Psi}$. *Тут* $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ij})$ *і* $\mathbf{\Psi} = (\psi_{ij})$ *задаються умовами*

$$\phi_{ik} = \sum_{\alpha \in I_{r_1,m}\{k\}} \mathrm{rdet}_k \left(\left(\mathbf{A}^{k_1+1} \left(\mathbf{A}^{k_1+1} \right)^* \right)_{k.} (\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}) \right)_\alpha^\alpha,$$

$$\psi_{lj} = \sum_{\beta \in J_{r_2,n}\{l\}} \mathrm{cdet}_l \left(\left(\left(\mathbf{B}^{k_2+1} \right)^* \mathbf{B}^{k_2+1} \right)_{.l} (\check{\mathbf{b}}_{.j}) \right)_\beta^\beta,$$

де $\check{\mathbf{b}}_{.\,j}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\check{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}^{k_2+1})^*\mathbf{B}^{k_2}$ *і* $\hat{\mathbf{a}}_{i\,.}$ *–* i*-й рядок матриці* $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{k_1}(\mathbf{A}^{k_1+1})^*$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів і, в першу чергу, побудові їх визначникових зображень, а також застосуванню отриманих визначникових зображень до розв'язку кватерніонових матричних рівнянь.

Основні результати дисертації наступні:

1. Отримано визначникові зображення узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених для матриць над тілом кватерніонів, використовуючи раніше введені здобувачем стовпцеві і рядкові некомутативні визначники. Встановлені нові властивості стовпцевих і рядкових визначників, тим самим внесено значний вклад в розвиток їх теорії.
2. Доведено нові теореми з теорії матриць над тілом кватерніонів, зокрема, теореми про зважений сингулярний розклад матриці, про граничне зображення зваженої матриці Мура-Пенроуза, про загальну алгебричну структуру зваженої матриці Дразіна, тощо.
3. Розроблено новий гранично-ранговий метод, який застосовується для побудови визначникового зображення кватерніонової узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза. Для кватерніонових узагальненої оберненої матриці Дразіна, зважених узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза та Дразіна це метод застосовується в особливих випадках, пов'язаних з ермітовістю відповідних матриць.
4. За допомогою гранично-рангового методу отримані нові визначникові зображення комплексних узагальнених обернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна та їх зважених.
5. Поняття та властивості серцевинної оберненої матриці та її узагальнень розширено до кватерніонових матриць. Зокрема, доведені теореми про характеризацію лівої W-зваженої *EP*-серцевинної оберненої матриці, зваженої *MPD*-оберненої матриці.
6. Побудовані визначникові зображення кватерніонових правої та лівої серцевинних обернених, правої та лівої *EP*-серцевинних обернених, *DMP*- та *MPD*-обернених, *CMP*-оберненої, зважених правої та лівої *EP*-обернених, зважених *DMP*- та *MPD*-обернених і зваженої *CMP*-оберненої.
7. Отримані нові визначникові зображення серцевинної оберненої ма-

триці та її узагальнень для комплексних матриць.

8. Побудовані аналоги правила Крамера для кватерніонових двостороннього матричного рівняння, узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливих випадків з $*$-ермітовістю і η-ермітовістю. Отримані правила Крамера зберігають свою новизну як прямого методу знаходження розв'язку комплексного узагальненого матричного рівняння Сильвестра, усіх його часткових випадків, та особливого випадку з *-ермітовістю.
9. Одержані визначникові зображення загального розв'язку системи кватерніонових двосторонніх матричних рівнянь та усіх його часткових випадків, а також загального, ермітового, η-(косо-)ермітового розв'язків системи з, відповідно, $*$-ермі-товістю чи η-ермітовістю.
10. Отримані визначникові зображення Дразіна оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з обмеженнями, а також розв'язку деяких сингулярних кватерніонових диференціальних матричних рівнянь.
11. Побудовані визначникові зображення Мура-Пенроуза зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями, а також його часткових випадків.
12. 12. Одержані визначникові зображення Дразіна зваженого оберненого розв'язку кватерніонового двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями та його часткових випадків.
13. Як застосування визначникових зображень кватерніонової серцевинної оберненої та її узагальнень, одержано розв'язки деяких задач кватерніонно-матричної мінімізації та побудовані правила Крамера для їх знаходження.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kyrchei, I.I., Mosić, D., Stanimirović, P.S.: Solvability of new constrained quater-nion matrix approximation problems based on core-EP inverses, Adv. Appl. Clifford Algebras **31**:3 (2021)
2. Kyrchei, I.I.: Weighted quaternion core-EP, DMP, MPD, and CMP inverses and their determinantal representations. RACSAM **114**:198 (2020)

3. Rehman, A., Kyrchei, I.I., Ali, I., Akram, M., Shakoor, A.: Explicit formulas and determinantal representation for η-skew-Hermitian solution to a system of quaternion matrix equations. Filomat **34**(8), 2601-2627 (2020)
4. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the weighted core-EP, DMP, MPD, and CMP inverses. J. Math. **2020**:9816038 (2020)
5. Kyrchei, I.I.: Cramer's Rules for Sylvester-type matrix equations. In: Kyrchei, I.I.(ed.) Hot Topics in Linear Algebra, pp. 138-162. Nova Sci. Publ., New York (2020)
6. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions to sys-tems of two-sided quaternion matrix equations. Linear Multilinear Algebra (2019). doi:10.1080/03081087.2019.1614517
7. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of general and (skew-) Hermitian solutions to the generalized Sylvester-type quaternion matrix equation. Abstr. Appl. Anal. **2019**:5926832 (2019)
8. Kyrchei, I.I.: Cramer's Rules of η-(skew-)Hermitian solutions to the quaternion Sylvester-type matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**(3):56 (2019).
9. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the core inverse and its generalizations with applications. J. Math. **2019**:1631979 (2019)
10. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the quaternion core inverse and its generalizations. Adv. Appl. Clifford Algebras **29**(5):104 (2019)
11. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the core inverse and its generalizations, In: Functional Calculus. IntechOpen, London (2019). doi:10.5772/intechopen.89341
12. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for the system of quaternion matrix equations with η-Hermicity. 4open **2**:24 (2019)
13. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for Sylvester quaternion matrix equation and its special cases. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**(5):90 (2018)
14. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions to systems of quaternion matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **28**(1):23 (2018)
15. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of solutions and Hermitian solutions to some system of two-sided quaternion matrix equations. J. Math. **2018**:6294672 (2018)
16. Kyrchei, I.I.: Explicit determinantal representation formulas for the solution of the two-sided restricted quaternionic matrix equation. J. Appl. Math. Comput. **58**(1-2), 335-365 (2018)

17. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for the system of two-sided matrix equations and of its special cases. In: Yasser, H.A.(ed.) Matrix Theory-Applications and Theorems, pp. 3-20. IntechOpen, London (2018)
18. Kyrchei, I.I.: Weighted singular value decomposition and determinantal representations of the quaternion weighted Moore – Penrose inverse. Appl. Math. Comput. **309**, 1-16 (2017)
19. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for some Hermitian coquaternionic matrix equations. Adv. Appl. Clifford Algebras **27**(3), 2509–2529 (2017)
20. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the quaternion weighted Moore - Penrose inverse and its applications. In: Baswell, A.R. (ed.): Advances in Mathematics Research **23**, pp. 35-96. Nova Sci. Publ., New York (2017)
21. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin and W-weighted Drazin inverses over the quaternion skew field with applications. In: Griffin, S.(ed.): Quaternions: Theory and Applications, pp.201-275. Nova Sci. Publ., New York (2017)
22. Kyrchei, I.I.: Explicit determinantal representation formulas of W-weighted Drazin inverse solutions of some matrix equations over the quaternion skew field. Math. Probl. Eng. **2016**:8673809 (2016)
23. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field. Appl. Math. Comput. **264**(1), 453-465 (2015)
24. Kyrchei, I.I.: The column and row immanants of matrices over a split quaternion algebra. Adv. Appl. Clifford Algebras **25**(3), 611-619 (2015)
25. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for generalized inverse solutions. In: Kyrchei, I.I.(ed.): Advances in Linear Algebra Research, pp. 79-132. Nova Sci. Publ., New York (2015)
26. Kleyn, A., Kyrchei, I.I.: Relation of row-column determinants with quasideterminants of matrices over a quaternion algebra. In: Kyrchei, I.I.(ed.): Advances in Linear Algebra Research, pp. 299-324. Nova Sci. Publ., New York (2015)
27. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin inverse over the quaternion skew field with applications to some matrix equations. Appl. Math. Comput. **238**, 193–207 (2014)
28. Kyrchei, I.I.: Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solutions of some matrix and differential matrix equations. Appl. Math. Comput. **219**, 7632-7644 (2013)
29. Kyrchei, I.I.: Explicit representation formulas for the minimum norm least squares solutions of some quaternion matrix equations. Linear

Algebra Appl. **438**(1), 136-152 (2013)
30. Kyrchei, I.I.: Analogs of Cramer's rule for the minimum norm least squares solutions of some matrix equations. Appl. Math. Comput. **218**, 6375-6384 (2012)
31. Kyrchei, I.I.: The theory of the column and row determinants in a quaternion linear algebra. In: Baswell, A.R.(ed.): Advances in Mathematics Research **15**, pp. 301-359. Nova Sci. Publ., New York (2012)
32. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Moore - Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules. Linear Multilinear Algebra **59**(4), 413-431 (2011)
33. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for some quaternion matrix equations. Appl. Math. Comput. **217**(5), 2024-2030 (2010)
34. Kyrchei, I.I.: Analogs of the adjoint matrix for generalized inverses and corresponding Cramer rules. Linear Multilinear Algebra **56**(4), 453-469 (2008)
35. Кирчей, І.І.: Визначникові зображення розв'язку кватерніонового узагальненого матричного рівняння Сильвестра. Мат. методи та фіз.-мех. поля **60**(3), 97-106 (2017)
36. Кирчей, І.І.: Визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза над тілом кватерніонів. Мат. методи та фіз.-мех. поля **53**(3), 36-46 (2010)
37. Кирчей, І.І.: Зображення узагальненої оберненої Мура-Пен-роуза через аналог приєднаної матриці. Мат. методи та фіз.-мех. поля **47**(4), 6-11 (2004)

Тези доповідей на конференціях

1. Kyrchei, I.I.: Quaternion core inverse and its generalizations. Abstracts of XI International Skorobohatko Mathematical Conference (2020, October 26-30, Lviv, Ukraine), P.58.
2. Kyrchei, I.I.: Cramer's rules for Sylvester-type quaternion matrix equations. Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky (2019, July 02-06, Vinnytsia, Ukraine), P.63.
3. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for two-sided restricted quaternionic matrix equation. Abstracts of 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko (2017, July 03-07, Kyiv, Ukraine), P.74.
4. Kyrchei, I.I.: Analogues of the adjugate matrix for the weighted Moore-Penrose inverse. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Ско-

робагатька (2015, 25-28 серпня, Дрогобич, Україна), С.92.

5. Kyrchei, I.I.: Determinantal representation of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field. Abstracts of X Inter-national Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd (2015, August 20-27, Odessa, Ukraine), P.60.
6. Kyrchei, I.I.: Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solution of the quaternion matrix equation AXB=D. Abstracts of the 9 th International Algebraic Conference in Ukraine (2013, July 8-13, Lviv, Ukraine), P.108.
7. Kyrchei, I.I.: Determinantal representations of the Drazin inverse matrix over a quaternion skew field. Abstracts of International Conference on Algebra (ICA) dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov (2012, August 20-26, Kyiv, Ukraine), P.78.
8. Кирчей, І.І.: Явна формула для нормального розв'язку деякого матричного рівняння над тілом кватерніонів. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2011, 19-23 вересня, Дрогобич, Україна), С.92.
9. Kyrchei, I.I.: Explicit representation formulas for the least squares solutions of the quaternion matrix equation AXB=D. Abstracts of the 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 60th anniversary of Prof. V. M. Usenko (2011, July 5-12, Lugansk, Ukraine), P.171.
10. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для нормального розв'язку двостороннього матричного рівняння над тілом кватерніонів. Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2010, 13-15 травня, Київ, Україна), С.145.
11. Kyrchei, I.I.: Cramer's rule for some two-sided quaternionic matrix equations. Abstracts of 7th International Algebraic Conference in Ukraine (2009, August 18-23, Kharkiv, Ukraine), P.82-83.
12. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для нормального розв'язку кватерніонових систем лінійних рівнянь. Матеріали XII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (2008, 15-17 травня, Київ, Україна), С.646.
13. Кирчей, І.І.: Правило Крамера для системи узагальнених нормальних. Тези доп. Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (2007, 24-28 вересня, Дрогобич, Україна), С.126.
14. Кирчей, І.І.: Визначникове зображення матриці Дразіна. Праці міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень"(ПОО-XXXIII) (2007, 23-28 вересня, Ялта, Україна), С.121-122.

АНОТАЦІЯ

Кирчей І. І. Узагальнені обернені матриці над тілом кватерніонів та їх застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 «Алгебра і теорія чисел». – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – Інститут математики НАН України. Київ, 2021.

У дисертації розвивається теорія узагальнених обернених матриць над тілом кватерніонів. Будуються визначникові зображення кватерніонових псевдообернених матриць Мура-Пенроуза, Дразіна, та їх зважених, використовуючи некомутативні рядкові і стовпцеві визначники, теорія яких була розроблена здобувачем у кандидатській дисертації. Отримано визначникові зображення кватерніонової серцевинної оберненої матриці та її узагальнень. Побудовано аналоги правила Крамера кватерніонових узагальненого матричного рівняння Сильвестра та системи двосторонніх матричних рівнянь, усіх їх часткових випадків, та особливих випадків з *-ермітовістю і η-ермітовістю. Побудовані аналоги правила Крамера псевдообернених розв'язків Дразіна, зважених Мура-Пенроуза та Дразіна двостороннього матричного рівняння з відповідними обмеженнями. Одержані визначникові зображення розв'язків деяких кватерніонових сингулярних диференціальних матричних рівнянь та задач матричної мінімізації.

Ключові слова: тіло кватерніонів, некомутативний визначник, узагальнена обернена матриця, матриця Мура - Пенроуза, матриця Дразіна, серцевинна обернена, правило Крамера, нормальний розв'язок, узагальнене матричне рівняння Сильвестра, система матричних рівнянь, диференціальне матричне рівняння.

АННОТАЦИЯ

Кирчей И. И. Обобщенные обратные матрицы над телом кватернионов и их применение. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 «Алгебра и теория чисел». – Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстригача НАН Украины. – Институт математики НАН Украины. Киев, 2021.

В диссертации развивается теория обобщённых обратных матриц над телом кватернионов. Строятся детерминантные представления кватернионных матриц Мура-Пенроуза, Дразина, и их взвешенных, используя некоммутативные строчные и столбцовые определители, теория которых была разработана соискателем в кандидатской диссертации. Получены детерминантные представления кватернионной сердцевинной обратной и её обобщений. Построены аналоги правила Крамера кватернионных обобщённого матричного уравнения Сильвестра и системы двусторонних матричных уравнений, всех их частных случаев, и особых случаев с *-эрмитовостью и η-эрмитовостью. Построены аналоги правила Крамера псевдообратных решений Дразина, взвешенных Мура-Пенроуза и Дразина двустороннего матричного уравнения с соответствующими ограничениями. Получены детерминантные представления решений некоторых кватернионных сингулярных дифференциальных матричных уравнений и задач матричной минимизации.

Ключевые слова: тело кватернионов, некоммутативный определитель, обобщённая обратная матрица, матрица Мура-Пенроуза, матрица Дразина, сердцевинная обратная матрица, правило Крамера, нормальное решение, матричное уравнение Сильвестра, система матричных уравнений, дифференциальное матричное уравнение.

ABSTRACT

Kyrchei I.I. Generalized inverse matrices over the quaternion skew field and their applications. — Qualifying work on the right of the manuscript.

Thesis for the doctor of mathematical and physical sciences degree in the specialty 01.01.06 – Algebra and Number Theory. – Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to generalized inverse matrices over the quaternion skew field, first of all to their determinantal representations, and their applications to solutions of matrix equations, some differential matrix equations, and problems of quaternion matrix minimizations and approximations. By using non-commutative row and column determinants the theory of which was developed by the applicant in his Ph.D. thesis, determinantal representations of the quaternion Moore-Penrose and Drazin generalized inverses, and of the weighted Moore-Penrose and Drazin inverses are obtained over the quaternion skew field. The notion of the generalized inverse Moore-Penrose matrix is introduced based on the singular decomposition of a quaternion matrix. The limit representation of the Moore-Penrose inverse is given, and auxiliary lemmas about ranks of some matrices and analogs of characteris-

tic polynomials are proved. These lemmas and the limit representation of the Moore-Penrose inverse form a method (it is called the limit-rank), by which the determinantal representations of the Moore-Penrose inverse for an arbitrary quaternion matrix, its hermitian-conjugated and η-hermitian are explored, where η is one of the quaternion imaginary units. Determinantal representations of the projectors onto the right column space and the left row space of a quaternion matrix are derived as well. The notion of the weighted Moore-Penrose inverse of an arbitrary $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times m}$ with weights $\mathbf{M}$ and $\mathbf{N}$, that are quaternion positive-definite matrices of order m and n, is introduced based on the proved theorem about the weighted singular decomposition of a quaternion matrix. The theorems about the weighted singular decomposition of the weighted Moore-Penrose inverse and its limit representations are given. Based on this limit-rank method, determinantal representations of the quaternion weighted Moore-Penrose inverse are obtained in the cases when the matrices $\mathbf{AN}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$ or $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{MA}$ are hermitan. Otherwise, determinantal representations of the quaternion weighted Moore-Penrose inverse are derived as well. To construct determinantal representations of the Drazin inverse and the weighted Drazin inverse, the corresponding limit-rank methods are also used in special hermitian cases. Otherwise, representations of the Drazin inverse via the Moore-Penrose inverse, and the weighted Drazin inverse via both the Moore-Penrose and Drazin inverses are applied. Applications of the limit-rank method for complex generalized inverses give their new determinantal representations. Characteristic properties and determinantal representations of quaternion left and right core inverses, left and right *EP*-core inverses, *MPD*- and *DMP*- inverses, and *CMP*-inverse, and weighted left and right *EP*-core inverses, weighted *MPD*- and *DMP*- inverses, and weighted *CMP*-inverse are derived. Note that the applicant was the first to begin studies of the core inverse and its generalizations for matrices over the quaternion skew field that are presented in the dissertation. Applications to the novel proposed method for the core inverse and their generalizations of complex matrices also give their new determinantal representations. Since generalized inverses are important tools in solving of matrix equations, then their obtained determinantal representations induct their Cramer's rules for finding solutions. First, Cramer's rules for finding solutions or least squares solutions to the quaternion two-sided matrix equation, its partial cases, and special cases with *-hermicity and η-hermicity are derived. Basis of them, determinantal representations of solutions to the quaternion generalized Sylvester matrix equation, its all partial cases, and some special cases for Sylvester-type matrix equations with *-hermicity and η-hermicity are obtained. Analogs of Cramer's rules for systems of two-sided quaternion matrix equations, for its all partial cases, and

its special cases for matrix equations with *-hermicity and η-hermicity are also derived. Analogs of Cramer's rules for Drazin generalized inverse solutions, for weighted Moore-Penrose and Drazin generalized inverse solutions to the two-sided quaternion matrix equations with corresponding restrictions are derived. By using obtained determinantal representations of the Drazin inverse, determinantal representations of solutions to some quaternion singular differential matrix equations are given. As applications of determinantal representations of the quaternion core inverse and its generalizations, determinantal representations of solutions to some matrix minimization problems are obtained.

Keywords: quaternion skew field, noncommutative determinant, generalized inverse matrix, Moore-Penrose inverse, Drazin inverse, core inverse, Cramer's rule, least squares solution, generalized Sylvester matrix equation, system of matrix equations, differential matrix equation.

Підписано до друку 8.03.2021. Формат 60 × 84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,5. Умовн. друк. арк. 1,4.
Тираж 100 пр. Зам. 89.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б.