КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КИРЧЕЙ Іван Ігорович

УДК 512.643.2

ТЕОРІЯ СТОВПЦЕВИХ І РЯДКОВИХ ВИЗНАЧНИКІВ ТА ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ НАД ТІЛОМ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Спеціальність 01.01.06 – алгебра і теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 2008

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі диференціальних рівнянь Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор,
Сявавко Мар'ян Степанович,
Львівський державний інститут новітніх технологій ім. В.Чорновола,
завідувач кафедри обчислювальної математики та моделювання.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор,
Зайцев Михайло Володимирович,
Московський державний університет ім. М. В. Ломоносова,
професор кафедри вищої алгебри;

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Безущак Оксана Омелянівна,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри алгебри та математичної логіки.

Захист відбудеться "17" листопада 2008 р. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.26.001.18 при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03022 м. Київ – 22, проспект Академіка Глушкова, 6, корпус 7, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "13" жовтня 2008 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Плахотник В. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія визначників матриць із некомутуючими елементами, їх ще називають некомутативними визначниками, вже на протязі кількох століть приковує до себе увагу математиків. Хронологія робіт, в яких вводиться нове поняття некомутативного визначника, розпочинається ще від роботи А. Келі 1845 року, але продовжується й досі. Найбільш відоме означення некомутативного визначника, а саме визначника квадратної матриці над тілом, належить Ж.Дьйодонне, який його значення запропонував розглядати не в самому тілі, а в приєднаному до нього об'єкті – факторі по комутанту. Такого ж роду означення було введене Е. Стаді для квадратних матриць над тілом кватерніонів, а також узагальнювалося Й. С. Понізовським, який розглядав визначник квадратної матриці над довільним кільцем, а в якості приєднаного об'єкта - довільну комутативну півгрупу.

Кардинально інше означення некомутативного визначника недавно було запропоноване І.М.Гельфандом та В.С. Ретахом, які квадратній матриці n-го порядку над тілом зіставляють матрицю її квазідетермінантів того ж порядку. Таким чином, замість одного визначника вони вводять n^2 квазідетермінантів, переносячи з комутативного випадку не саме поняття визначника, а його відношення до мінорів порядку $n-1$.

Третій спосіб означення некомутативного визначника – розглядати його подібно комутативному випадку, як альтерновану суму мономів від елементів матриці, фіксуючи додатково порядок елементів у цих мономах. Найбільш ґрунтовно та успішно цей спосіб був розроблений в роботах Е. Г. Мура та Ф. Д. Дайсона, але тільки для певного класу матриць - а саме ермітових матриць над тілом. Певне узагальнення такого визначника для довільних квадратних матриць над тілом кватерніонів здійснив Л. Чен.

В той же час жоден із досі введених некомутативних визначників не узагальнює в повному обсязі, в сенсі збереження всіх властивостей та застосувань, визначник комплексної матриці. Більше того, деякі питання з теорії матриць над некомутативним кільцем досі залишаються відкритими, хоча аналогічні задачі знаходять свій розв'язок засобом визначника у комутативному випадку. Так досі нерозв'язаними залишалися такі актуальні проблеми лінійної алгебри над тілом, як аналітичне зображення класичної приєднаної матриці і, як наслідок, узагальнення правила Крамера для систем лінійних рівнянь над тілом. Розробці цих питань присвячена дана дисертаційна робота.

Актуальність досліджень, які проводяться в лінійній алгебрі над тілом (зокрема, тілом кватерніонів), зростає ще й унаслідок потреб теоретичної фізики, особливо в контексті квантової механіки та теорії поля. З появою суперсиметричних теорій і квантових груп виникла насущна необхідність розглядати матриці, що містять антикомутуючі чи взагалі некомутативні елементи. Тому розгляд визначників таких матриць є важливим узагальненням поняття визначника. Усе це й обумовлює актуальність і вибір теми дисертаційного дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримані в рамках виконання держбюджетної теми Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: "Розвиток диференціально-геометричних та аналітичних методів дослідження інваріантних рівнянь математичної і теоретичної фізики" (номер держреєстрації 0101U000451).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертації є означення та дослідження властивостей стовпцевих та рядкових визначників квадратних матриць над тілом з інволюцією, які б узагальнювали визначник Е. Г. Мура, уведений для ермітової матриці; встановлення критерію оборотності квадратних матриць над тілом у рамках побудованої теорії визначників та визначникове зображення оберненої матриці над тілом через аналог класичної приєднаної матриці; узагальнення правила Крамера для лівих і правих систем лінійних рівнянь над тілом з інволюцією, яке є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над своїм центром – полем нульової характеристики, що передбачає вирішення таких *задач*:

- дати означення та дослідити властивості рядкових та стовпцевих визначників квадратних матриць над тілом з інволюцією, що є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над полем нульової характеристики;
- у рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників дати означення визначника ермітової матриці, що співпадає з визначником Мура, та дослідити його властивості виражені через стовпцеві та рядкові визначники;
- аналітично зобразити обернену до ермітової матриці над тілом з інволюцією через класичну приєднану;
- дати означення та дослідити в рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників властивості подвійного визначника квадратної матриці над тілом з інволюцією;
- одержати визначникове зображення оберненої матриці через аналог класичної приєднаної для довільної оборотної квадратної матриці над тілом з інволюцією;
- аналітично зобразити розв'язки правої і лівої систем лінійних рівнянь над тілом, як узагальнення правила Крамера.

Об'єктом дослідження є матриці над тілом, яке є асоціативною композиційною алгеброю з діленням над своїм центром – полем нульової характеристики.

Предметом дослідження є некомутативні визначники квадратних матриць над тілом з інволюцією.

Методи дослідження: методи теорії некомутативних кілець та алгебр, теорії матриць над тілом.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна роботи полягає в таких основних положеннях.

1. Введені поняття та розроблена теорія нових матричних функціоналів, - стовпцевих і рядкових визначників квадратних матриць над тілом, яке є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над своїм центром – полем нульової характеристики.
2. У рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників введене поняття визначника ермітової матриці, що співпадає з визначником Мура, а також подвійного визначника квадратної матриці над тілом з інволюцією. Показано, що множина всіх стовпцевих та рядкових визначників є повним та природним узагальненням визначника Мура для довільної квадратної матриці над тілом. Подвійний визначник квадратної матриці над тілом представлений як визначник, що задовольняє як аксіоми некомутативного визначника так і, засобом стовпцевих та рядкових визначників відповідних правої та лівої ермітових матриць, властивість розкладу Лапласа по елементах будь-якого стовпця чи рядка матриці.
3. Одержано визначникове зображення оберненої матриці через класичну приєднану для оборотної ермітової матриці над тілом з інволюцією.
4. Одержано визначникове зображення оберненої матриці через аналог класичної приєднаної для довільної оборотної квадратної матриці над тілом з інволюцією.
5. Розв’язки правих і лівих систем лінійних рівнянь над тілом зображені як узагальнення правила Крамера.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати в подальших наукових дослідженнях алгебри матриць з некомутуючими елементами, а також в дослідженнях, що застосовують некомутативні визначники, зокрема, в галузях теоретичної фізики та квантової механіки.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати, одержані в дисертаційній роботі, доповідалися і обговорювалися на: Міжнародній конференції з алгебри в Україні (Львів, 2003; Одеса, 2005; Кам’янець-Подільський, 2007), Міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 1994, 2002, 2004, 2006), Міжнародній математичній конференції ім. В.Я.Скоробагатька (Дрогобич, 2004, 2007), International Conference on Matrix Analysis and Applications (Nova Southeastern University, Fort Lauderdale, Florida, USA, 2003), Международной алгебраической конференции посвященной 250-летию Московского государственного университета (Москва, Россия, 2004), Международной алгебраической конференции посвященной 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина (Екатеринбург, Россия, 2005), III Всеукраїнській науковій конференції “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 2003), Міжнародній школі-семінарі “Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування” (с.м.т. Верхнє Синьовидне

Львівської обл., 1994; Ужгород, 2002), засіданнях семінару ім. В. Я. Скоробагатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2001-2008), засіданнях загальноінститутського математичного семінару Інституту прикладних проблем *механіки* і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2005, 2008), засіданнях Львівського міського наукового семінару з алгебри (Львів, 2001, 2004), засіданні семінару з алгебри Київського національного університету ім. Т.Г.Шевченка (Київ, 2004).

Публікації. Результати, що включені до дисертації, достатньо повно викладені у 17 публікаціях, в тому числі у шести статтях у фахових наукових виданнях із переліку затвердженого ВАК України та одинадцяти тезах міжнародних та всеукраїнських конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і має обсяг 148 сторінок. Список використаних джерел містить 95 найменувань і займає 8 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, показано зв'язок роботи з науковими темами, сформульовано мету та задачі дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення, апробацію одержаних результатів та кількість публікацій.

У першому розділі розглядаються основні матеріали з теорії некомутативних визначників, подаються також формули для аналітичного зображення оберненої матриці з некомутуючими елементами в рамках теорії кожного з представлених визначників та формули, що узагальнюють правило Крамера для лівих та правих систем лінійних рівнянь. В першому пункті першого підрозділу вводиться аксіоматичне означення визначника квадратної матриці з некомутуючими елементами.

Означення 1.1.1. Нехай $\boldsymbol{M(n,K)}$, - кільце квадратних матриць n-го порядку над кільцем $\boldsymbol{K}$, і функціонал $\boldsymbol{d}:\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{K})\to\boldsymbol{K}$ задовольняє наступні аксіоми.

Аксіома 1. (Виродженість.) $\boldsymbol{d}(\mathbf{A})=0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{A}$ *вироджена (необоротна) матриця.*

Аксіома 2. (Мультиплікативність.) $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\boldsymbol{d}(\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{d}(\mathbf{B})$.

Аксіома 3. (Інваріантність.) *Якщо матриця* $\tilde{\mathbf{A}}$ *одержується з квадратної матриці* $\mathbf{A}$ *через додавання до її довільного рядка помноженого зліва на елемент кільця її інший рядок, або через додавання до її довільного стовпця помноженого справа на елемент кільця її інший стовпець, тоді* $\boldsymbol{det}\,\tilde{\mathbf{A}}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$.

Тоді значення функціоналу $\boldsymbol{d}(\mathbf{A})\in\boldsymbol{K}$ називають *визначником квадратної матриці* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{K})$.

Має місце теорема про те, що образ визначникового відображення для матриць над некомутативним кільцем $\boldsymbol{K}$, яке задовольняє цю групу аксіом, є комутативною підмножиною кільця. В інших підпунктах цього підрозділу розглядаються визначники, що задовольняють аксіоми 1, 2, 3, а саме, визначник Е. Стаді для матриць над тілом кватерніонів та визначник Ж.Дьйодонне для матриць над довільним тілом, а також узагальнення останнього для квадратних матриць над кільцем здійснене Й. С. Понізовським. В рамках цієї теорії некомутативних визначників приведене аналітичне зображення оберненої матриці одержане Й.С. Понізовським.

У другому підрозділі цього розділу розглядаються елементи теорії квазідетермінантів, розробленої І. М. Гельфандом та В. С. Ретахом, які індукцією по n квадратній матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ над тілом $\boldsymbol{S}$ ставлять у відповідність n^2 побудованих ними квазідетермінантів. Приведені аналітичні зображення оберненої матриці, а також розв'язків систем лінійних рівнянь в рамках теорії квазідетермінантів.

В третьому підрозділі розглядаються визначники введені подібно комутативному випадку, як альтернована суму мономів від елементів матриці, але фіксуючи попередньо порядок елементів в кожному з цих мономів. Найбільш вдалої побудови визначника за цим принципом досягнув Е.Г.Мур. Він зауважив, що можна досягнути успіху, коли в кожному з мономів елементи матриці розміщувати так, щоб підстановки їх індексів утворювали добутки незалежних циклів, крім того застосувати таке означення визначника тільки для певного класу матриць, а саме для ермітових. Ф. Дайсон доводить виконання аксіом 1 та 3 для визначника Мура. В своїй роботі він також ставить невирішене проблемне запитання пов'язане з визначником Мура: Яким найбільш природним шляхом можна узагальнити означення визначника Мура для матриць, що не є ермітовими?

В третьому підпункті цього підрозділу наводиться певний варіант задовільної відповіді на це питання розроблений Лонгхуан Ченом – введений ним визначник квадратної матриці над тілом кватерніонів**.** Приведені визначникове зображення оберненої матриці та правило Крамера для систем лінійних рівнянь над тілом кватерніонів одержані Л. Ченом.

Перший розділ підсумовується наступними висновками. Оскільки, жоден з раніше введених визначників не задовольняє властивість розкладу Лапласа по будь-якому рядку чи стовпцю матриці, то й означити алгебричне доповнення елемента матриці, а звідси й одержати визначникове зображення оберненої матриці через аналог класичної приєднаної над тілом в рамках теорії будь-якого з означених вище некомутативних визначників неможливо. Щоб досягнути поставленої мети необхідно побудувати такий некомутативний визначник, який з одного боку задовольняв би властивість розкладу по будь-якому рядку чи стовпцю матриці, а з іншого - аксіоми некомутативного визначника з означення 1.1.1.

У другому розділі розглядається теорія стовпцевих та рядкових визначників квадратних матриць над тілом з інволюцією.

В першому підрозділі цього розділу основне тіло $\boldsymbol{S}$ з інволюцією означається як асоціативна композиційна нерозщеплювана алгебра над своїм центром – полем $\boldsymbol{F}$ нульової характеристики. Для опису всіх асоціативних композиційних нерозщеплюваних алгебр над своїм центром – полем $\boldsymbol{F}$ нульової характеристики скористаємося процесом Келі-Діксона, тоді $\boldsymbol{S}$ ізоморфна одній з наступних алгебр розмірностей $\boldsymbol{dim_F}\,\boldsymbol{S}=1,2$ або 4. 1) Полю $\boldsymbol{F}$. 2) $\boldsymbol{C}(\alpha)=(\boldsymbol{F},\alpha)$ - алгебрі, яка одержується з $\boldsymbol{F}$ за допомогою процесу Келі – Діксона, при умові, що $\alpha\neq 0$ і многочлен $x^2-\alpha$ незвідний над $\boldsymbol{F}$. Тоді $\boldsymbol{C}(\alpha)$ - поле. 3) $\boldsymbol{H}(\alpha,\beta)=(\boldsymbol{C}(\alpha),\beta)$, - кватерніоновій алгебрі $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$ при умові, що $\beta\neq 0$, $\alpha\neq 0$ беруться такими, щоб виконувалась умова її нерозщеплюваності. Ця алгебра асоціативна, але некомутативна.

Розглядувану $\boldsymbol{F}$-алгебру $\boldsymbol{S}$ можна означити як алгебру породжену генераторами i та j, що пов'язані співвідношеннями: $i^2=\alpha$, $j^2=\beta$, $ij=k=-\alpha\beta$. І ця алгебра є множиною всіх можливих виразів виду $x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k$, де $\{x_0,x_1,x_2,x_3\}\subset\boldsymbol{F}$. Якщо $\alpha=\beta=0$, тоді $\boldsymbol{dim_F}\,\boldsymbol{S}=1$ і в канонічному базисі простору $\boldsymbol{S}$, що в цьому випадку співпадає з полем $\boldsymbol{F}$, форма $\boldsymbol{n}(x)=x_0^2$. Якщо $\alpha\neq 0$ і $\beta=0$, тоді $\boldsymbol{dim_F}\,\boldsymbol{S}=2$ і норма $\boldsymbol{n}(x)$ в просторі $\boldsymbol{S}\cong\boldsymbol{C}(\alpha)$ приймає вигляд $\boldsymbol{n}(x)=x_0^2-\alpha x_1^2$. Якщо $\alpha\neq 0$ і $\beta\neq 0$, тоді $\boldsymbol{dim_F}\,\boldsymbol{S}=4$ і норма $\boldsymbol{n}(x)$ в просторі $\boldsymbol{S}\cong\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$, який в цьому випадку є кватерніоновою алгеброю, приймає вигляд $\boldsymbol{n}(x)=\left(x_0^2-\alpha x_1^2\right)-\beta\left(x_2^2-\alpha x_3^2\right)=x_0^2-\alpha x_1^2-\beta x_2^2+\alpha\beta x_3^2$.

Таким чином, єдиним прикладом некомутативної асоціативної композиційної нерозщеплюваної алгебри, що розглядається в роботі, є кватерніонова алгебра з діленням. Прикладом кватерніонової алгебри з діленням в залежності від вибору поля $\boldsymbol{F}$, зокрема, є тіло кватерніонів $\boldsymbol{H}$ над полем дійсних чисел $\boldsymbol{R}$. Якщо $\boldsymbol{Q}_p$ - поле p-адичних чисел, то $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}_p}\right)$ є кватерніоновою алгеброю з діленням у випадку, коли $p=2$. Якщо $\boldsymbol{Q}$ - поле раціональних чисел, то існує нескінченно багато неізоморфних кватерніонових алгебр $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}}\right)$. Серед них є як розщеплювані алгебри, так і алгебри з діленням.

У другому підрозділі вводяться поняття стовпцевих та рядкових визначників квадратних матриць над тілом. Показано, що кожен з них задовольняє властивість розкладу Лапласа по відповідному рядку чи стовпцю. А в цілому множина всіх рядкових та стовпцевих визначників дозволяє провести розклад по будь-якому рядку чи стовпцю. Доведені леми, що розкривають ліві та праві алгебричні доповнення.

Означення 2.2.4. *Рядковим визначником по i-му рядку* квадратної матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ над тілом $\boldsymbol{S}$, (позначатимемо його $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для довільного $i = \overline{1,n}$), будемо називати альтерновану суму $n!$ мономів, - усіх можливих добутків елементів матриці $\mathbf{A}$ взятих по одному з кожного рядка та стовпця і впорядкованих таким чином, що підстановка σ, - індексів елементів кожного моному, в звичайній формі записана прямим добутком незалежних циклів. Таким чином,

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} .$$

Тут S_n - симетрична група на множині $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$, і впорядкована зліва нормальна форма підстановки σ має вигляд $\sigma = (i\, i_{k_1} i_{k_1+1} \ldots i_{k_1+l_1})(i_{k_2} i_{k_2+1} \ldots i_{k_2+l_2})\ldots(i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$. При цьому перший зліва цикл розпочинається зліва індексом i, а всі наступні незалежні цикли задовольняють умови: $i_{k_2} < i_{k_3} < \ldots < i_{k_r}$, $i_{k_t} < i_{k_t+s}$ для всіх $t = \overline{2,r}$ та $s = \overline{1,l_t}$.

Нехай $\mathbf{A}^{ij}$ – підматриця матриці $\mathbf{A}$, яку одержимо, викресливши i-й рядок та j-й стовпець. Через $\mathbf{a}_{.j}$ позначимо j-й стовпець, а через $\mathbf{a}_{i.}$ – i-й рядок матриці $\mathbf{A}$. Нехай $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b})$ – матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$ заміною її j-го стовпця стовпцем $\mathbf{b}$, а матриця $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ одержується з $\mathbf{A}$ заміною її i-го рядка рядком $\mathbf{b}$.

Лема 2.2.1. *Нехай R_{ij} – праве алгебричне доповнення елемента a_{ij} матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, тобто, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot R_{ij}$ для всіх $i = \overline{1,n}$. Тоді* $R_{ij} = \begin{cases} -\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}), & \text{якщо } i \neq j, \\ \boldsymbol{rdet}_k\,\mathbf{A}, \text{ якщо } i = j,\ k = \boldsymbol{min}\{I_n / \{i\}\}. \end{cases}$

Означення 2.2.6. *Стовпцевим визначником по j-му стовпцю* квадратної матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ над тілом $\boldsymbol{S}$, (позначатимемо його $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}$ для довільного $j = \overline{1,n}$), будемо називати альтерновану суму мономів, - усіх можливих добутків елементів матриці $\mathbf{A}$ взятих по одному з кожного рядка та стовпця і впорядкованих таким чином, що підстановка τ, індексів елементів кожного моному, в звичайній формі записана прямим добутком незалежних циклів. Таким чином,

$$\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A} = \sum_{\tau\in S_n} (-1)^{n-r} a_{j_{k_r} j_{k_r+l_r}} \ldots a_{j_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots a_{j\, j_{k_1+l_1}} \ldots a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} a_{j_{k_1} j}$$

Тут S_n - симетрична група на множині $J_n = \{1,2,\ldots,n\}$ і впорядкована справа нормальна форма підстановки τ має вигляд $\tau = (j_{k_r+l_r} \ldots j_{k_r+1} j_{k_r})\ldots(j_{k_2+l_2} \ldots j_{k_2+1} j_{k_2})(j_{k_1+l_1} \ldots j_{k_1+1} j_{k_1} j)$. При цьому перший справа цикл розпочинається справа індексом j, а всі наступні незалежні цикли задовольняють умови: $j_{k_2} < j_{k_3} < \ldots < j_{k_r}$ і $j_{k_t} < j_{k_t+s}$ для всіх $t = \overline{2,r}$ та $s = \overline{1,l_t}$.

Лема 2.2.2. *Нехай* L_{ij} *– ліве алгебричне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, *тобто,* $\boldsymbol{cdet}_j\ \mathbf{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij}$ *для всіх* $j = \overline{1,n}$. *Тоді* $L_{ij} = \begin{cases} -\boldsymbol{cdet}_i\ \mathbf{A}_{i.}^{jj}(\mathbf{a}_{j.}), & \text{якщо } i \neq j, \\ \boldsymbol{cdet}_k\ \mathbf{A}^{ii}, \text{якщо } i = j,\ k = \boldsymbol{min}\{J_n / \{j\}\}. \end{cases}$

Якщо елементи матриці комутують, то очевидно, що

$$\boldsymbol{rdet}_1\ \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{rdet}_n\ \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1\ \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{cdet}_n\ \mathbf{A}.$$

У третьому підрозділі вводяться основні поняття алгебри матриць над даним тілом. Розглядаються властивості спряженої та транспонованої матриць.

У четвертому підрозділі досліджуються властивості рядкових та стовпцевих визначників довільної квадратної матриці над тілом з інволюцією, зокрема наступні.

Теорема 2.4.1. *Якщо один із рядків (стовпців) матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *складається з нулів, то для всіх* $i = \overline{1,n}$ *маємо* $\boldsymbol{rdet}_i\ \mathbf{A} = 0$ *та* $\boldsymbol{cdet}_i\ \mathbf{A} = 0$.

Теорема 2.4.3. *Якщо* i*-й рядок матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *помножити зліва на довільний елемент* $b \in \boldsymbol{S}$, *тоді* $\boldsymbol{rdet_i}\ \mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.}) = b \cdot \boldsymbol{rdet_i}\ \mathbf{A}$ *для всіх* $i = \overline{1,n}$.

Теорема 2.4.4. *Якщо* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *помножити справа на довільний елемент* $b \in \boldsymbol{S}$, *тоді* $\boldsymbol{cdet}_j\ \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j} \cdot b) = \boldsymbol{cdet}_j\ \mathbf{A} \cdot b$ *для всіх* $j = \overline{1,n}$.

Теорема 2.4.5. *Якщо* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *та існує такий* l*-й рядок для деякого* $l \in I_n$, *що для всіх* $j = \overline{1,n}$ *виконується умова, що* $a_{lj} = b_j + c_j$, *тоді для всіх* $i = \overline{1,n}$ *маємо* $\boldsymbol{rdet}_i\ \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\ \mathbf{A}_{l.}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{rdet}_i\ \mathbf{A}_{l.}(\mathbf{c})$ *та* $\boldsymbol{cdet}_i\ \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\ \mathbf{A}_{l.}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{cdet}_i\ \mathbf{A}_{l.}(\mathbf{c})$, *де* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ *- вектор-рядки.*

Теорема 2.4.6. *Якщо* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *та існує такий* l*-й стовпець для деякого* $l \in J_n$, *що для всіх* $i = \overline{1,n}$ *виконується умова, що* $a_{il} = b_i + c_i$, *тоді для всіх* $j = \overline{1,n}$ *маємо* $\boldsymbol{rdet}_j\ \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_j\ \mathbf{A}_{.l}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{rdet}_j\ \mathbf{A}_{.l}(\mathbf{c})$ *та* $\boldsymbol{cdet}_j\ \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j\ \mathbf{A}_{.l}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{cdet}_j\ \mathbf{A}_{.l}(\mathbf{c})$, *де* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$ *- вектор-стовпці.*

Теорема 2.4.10. *Якщо* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *і* $\mathbf{A}^*$ *- матриця спряжена до* $\mathbf{A}$, *тоді* $\boldsymbol{cdet}_i\ \mathbf{A}^* = \overline{\boldsymbol{rdet}_i\ \mathbf{A}}$ *для всіх* $i = \overline{1,n}$.

В силу невиконання для стовпцевих та рядкових визначників довільної квадратної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$ аксіоми 1, необхідної для коректного означення некомутативного визначника, будемо вважати ці матричні функціонали - пре-визначниками.

В п'ятому підрозділі доведена рівність між собою всіх стовпцевих та рядкових визначників ермітової матриці над тілом з інволюцією.

Теорема 2.5.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *– ермітова матриця над тілом* $\boldsymbol{S}$*, тоді*

$$\boldsymbol{rdet}_1 \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{rdet}_n \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1 \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{cdet}_n \mathbf{A} \in \boldsymbol{F}.$$

Оскільки всі стовпцеві і рядкові визначники ермітової матриці рівні між собою, то для неї можемо ввести поняття визначника матриці, який будемо розкривати як рядковий по будь-якому рядку чи як стовпцевий по будь-якому стовпцю матриці: $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} := \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}$ для будь-якого $i = \overline{1, n}$.

Показано, що визначник ермітової матриці співпадає з визначником Мура, а множина всіх рядкових та стовпцевих визначників є його повним і природним узагальненням на множині довільних квадратних матриць.

У шостому підрозділі досліджуються властивості визначника ермітової матриці через стовпцеві та рядкові визначники. Результат цих досліджень узагальнюють наступні теореми.

Теорема 2.6.9. *Нехай* $\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right)$ *- матриця, яку одержимо з ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, заміною її* i*-го рядка лівою лінійною комбінацією її інших рядків, де* $c_t \in \boldsymbol{S}$ *для всіх* $t = \overline{1, k}$*. Тоді* $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$ *та* $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$ *для всіх* $i = \overline{1, n}$.

Теорема 2.6.10. *Нехай* $\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} \cdot c_k\right)$ *- матриця, яку одержимо з ермітової* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, заміною її* j*-го стовпця правою лінійною комбінацією її інших стовпців, де* $c_t \in \boldsymbol{S}$ *для всіх* $t = \overline{1, k}$*. Тоді* $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} \cdot c_k\right) = 0$ та $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} \cdot c_k\right) = 0$ *для всіх* $j = \overline{1, n}$.

У сьомому підрозділі вводиться поняття унімодулярної подібності ермітових матриць над тілом та доведено теорему про унімодулярну подібність ермітової матриці діагональній.

Теорема 2.7.4. *Якщо* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*- ермітова, тоді* $\mathbf{A}$ *унімодулярно подібна деякій діагональній матриці, тобто,* $\exists \mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$*, що* $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^* = \boldsymbol{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$*, де* $\boldsymbol{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *- діагональна матриця з елементами* $\mu_i \in \boldsymbol{F}$ *для всіх* $i = \overline{1, n}$ *на головній діагоналі. При цьому* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n$.

У третьому розділі одержано визначникове зображення оберненої матриці над тілом з інволюцією через аналог класичної приєднаної матриці і, як наслідок, розв'язки правої та лівої систем лінійних рівнянь над тілом аналітично представлені формулами, що узагальнюють правило Крамера.

У першому підрозділі обернена до ермітової матриці над даним тілом аналітично зображається через класичну приєднану.

Теорема 3.1.1. *Для ермітової невиродженої матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, *(*$\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} \neq 0$*), існує єдина права обернена матриця* $(R\mathbf{A})^{-1} = \left(\dfrac{R_{ji}}{\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}}\right)_{n \times n}$ *і єдина ліва обернена матриця* $(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\dfrac{L_{ji}}{\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}}\right)_{n \times n}$*, рівні між собою,* $(R\mathbf{A})^{-1} = (L\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$*, і де* R_{ij} *і* L_{ij} *- праве та ліве алгебричне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* $\mathbf{A}$*, відповідно.*

Теорема 3.1.3. *Якщо* $\mathbf{A}$ *- невироджена ермітова матриця над тілом* $\boldsymbol{S}$*, тоді* $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}^{-1} = (\boldsymbol{det}\, \mathbf{A})^{-1}$.

З теореми 3.1.3 випливає виконання визначником ермітової матриці аксіоми 1 означення 1.1.1, тобто, коректність його означення.

У другому підрозділі цього розділу пропонується для довільної $m \times n$ - матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ розглядати її праву $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ та ліву $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ відповідні ермітові матриці. Встановлені властивості визначників цих ермітових матриць в залежності від матриці $\mathbf{A}$.

Теорема 3.2.7. *Якщо довільний стовпець матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *є правою лінійною комбінацією її інших стовпців, тоді визначник її лівої відповідної ермітової матриці* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *дорівнює нулю.*

Теорема 3.2.8. *Якщо довільний рядок матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *є лівою лінійною комбінацією її інших рядків, тоді визначник її відповідної правої ермітової матриці* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ *дорівнює нулю.*

У третьому підрозділі встановлюються критерії виродженості відповідних ермітових матриць.

Теорема 3.3.6. *Для того, щоб визначник ермітової матриці* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб стовпці матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *були лінійно залежними справа.*

Теорема 3.3.7. *Для того, щоб визначник ермітової матриці* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ *дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб рядки матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *були лінійно залежними зліва.*

У четвертому підрозділі введено ранг по головних мінорах відповідної ермітової матриці і доведено, що він дорівнює рангу, (стовпцевому чи рядковому), початкової матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$.

У п'ятому підрозділі доведена теорема про рівність визначників лівої та правої відповідних ермітових матриць для довільної квадратної матриці над тілом, на основі якої вводиться поняття подвійного визначника квадратної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$ в рамках теорії стовпцевих та рядкових визначників.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, тоді* $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Означення 3.5.1. Для квадратної матриці $\mathbf{A}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ визначник її відповідної ермітової матриці будемо називати її *подвійним (double) визначником*: $\boldsymbol{ddet}\, \mathbf{A} := \boldsymbol{det}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \boldsymbol{det}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)$.

Якщо тіло $\boldsymbol{S}$ є композиційною асоціативною алгеброю з діленням над максимальним впорядкованим полем $\boldsymbol{F}$, тоді для довільного елемента $a \in \boldsymbol{S}$ його норма є невід'ємною, $\boldsymbol{n}(a) \in \boldsymbol{F}_+$, де $\boldsymbol{F}_+$ - множина невід'ємних елементів поля, і справедливою є теорема, яка показує, що в цьому випадку подвійний визначник задовольняє аксіому 2 означення 1.1.1.

У шостому підрозділі встановлено критерій оборотності довільної квадратної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$, а її обернена зображена через матрицю, яка є аналогом класичної приєднаної.

Означення. 3.6.1. Нехай $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Для всіх $j = \overline{1, n}$ її подвійний визначник можна розкласти по j-му стовпцю наступним чином, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{L}_{ij} a_{ij}$, тоді $\mathbb{L}_{ij}$ будемо називати *лівим подвійним алгебричним доповненням* елемента a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Означення. 3.6.2. Нехай $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Для всіх $i = \overline{1, n}$ її подвійний визначник можна розкласти по i-му рядку наступним чином, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right) = \sum\limits_{j} a_{ij} \mathbb{R}_{ij}$, тоді $\mathbb{R}_{ij}$ будемо називати *правим подвійним алгебричним доповненням* елемента a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Таким чином, подвійний визначник довільної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$, що є композиційною асоціативною алгеброю з діленням над полем нульової характеристики $\boldsymbol{F}$, задовольняє аксіоми 1 і 3, а також властивість розкладу його по будь-якому рядку чи стовпцю. А якщо $\boldsymbol{F}$ є максимальним впорядкованим полем, тоді подвійний визначник також задовольняє ще й аксіому 2 означення некомутативного визначника 1.1.1.

Теорема 3.6.1. *Для того, щоб довільна матриця* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *була оборотною необхідно і достатньо, щоб* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, *тоді існують єдині її ліва обернена матриця* $(L\mathbf{A})^{-1}$ *та права обернена* $(R\mathbf{A})^{-1}$ *такі, що* $(L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$ *і*

$$(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^* = \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathbb{L}_{11} & \mathbb{L}_{21} & \dots & \mathbb{L}_{n1} \\ \mathbb{L}_{12} & \mathbb{L}_{22} & \dots & \mathbb{L}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{L}_{1n} & \mathbb{L}_{2n} & \dots & \mathbb{L}_{nn} \end{pmatrix}, (R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{21} & \dots & \mathbb{R}_{n1} \\ \mathbb{R}_{12} & \mathbb{R}_{22} & \dots & \mathbb{R}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{R}_{1n} & \mathbb{R}_{2n} & \dots & \mathbb{R}_{nn} \end{pmatrix}$$

при цьому $\mathbb{L}_{ij} = \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)$ *та* $\mathbb{R}_{ij} = \boldsymbol{rdet}_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i.}\left(\mathbf{a}^*_{j.}\right)$ *для всіх* $i, j = \overline{1, n}$.

В теоремі 3.6.1 пропонується метод визначникового зображення оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$ для довільної $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, подвійний визначник якої $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, через матрицю, яка є аналогом класичної приєднаної. Тобто, її класичну приєднану можна представити, як матрицю, елементи якої є лівими подвійними алгебричними доповненнями $\left(\mathbb{L}_{ij}\right)_{n \times n}$, або правими подвійними алгебричними доповненнями $\left(\mathbb{R}_{ij}\right)_{n\times n}$ матриці $\mathbf{A}$. Позначимо її $\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]$, тоді в тілі $\boldsymbol{S}$ виконується формула: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}$.

Теорема 3.6.2. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n,S)}$ *і тіло* $\boldsymbol{S}$ *є композиційною асоціативною нерозщеплюваною алгеброю над максимальним впорядкованим полем* $\boldsymbol{F}$ *, тоді виконуються рівності:*

i) $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^{-1} = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{-1}$*; ii)* $\boldsymbol{ddet}\left(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]\right) = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{n-1}$.

У сьому підрозділі розв'язки правої та лівої систем лінійних рівнянь над тілом знаходяться за формулами, що узагальнюють правило Крамера.

У першому пункті цього підрозділу розглядається права система лінійних рівнянь $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ із матрицею коефіцієнтів $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n,S)}$, стовпцем вільних елементів $\mathbf{y} = \left(y_1,\ldots,y_n\right)^T$ і стовпцем невідомих $\mathbf{x} = \left(x_1,\ldots,x_n\right)^T$.

Теорема 3.7.2. *Якщо подвійний визначник основної матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n,S)}$ *правої системи лінійних рівнянь над тілом* $\boldsymbol{S}$ *не дорівнює нулю,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*, то система має і при цьому єдиний розв'язок, який задається формулою для всіх* $j = \overline{1,n}$*:*

$$x_j = \frac{\boldsymbol{cdet}_j\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\boldsymbol{)}_{.j}\left(\mathbf{f}\right)}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}},$$

де вектор-стовпець $\mathbf{f} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$.

У другому пункті цього підрозділу розглядується ліва система лінійних рівнянь $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{y}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ із матрицею коефіцієнтів $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n,S)}$, рядком вільних елементів $\mathbf{y} = \left(y_1,\ldots,y_n\right)$ і рядком невідомих $\mathbf{x} = \left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

***Теорема* 3.7.4**. *Якщо подвійний визначник основної матриці* $\mathbf{A}$ *лівої системи лінійних рівнянь над тілом* $\boldsymbol{S}$ *не дорівнює нулю,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*, то система має і при цьому єдиний розв'язок, який задається формулою для всіх* $i = \overline{1,n}$*:*

$$x_i = \frac{\boldsymbol{rdet}_i\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^*\boldsymbol{)}_{i.}\left(\mathbf{z}\right)}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}},$$

де вектор-рядок $\mathbf{z} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{A}^*$.

ВИСНОВКИ.

Дисертаційна робота присвячена введенню та розробці теорії нових матричних функціоналів, - стовпцевих і рядкових визначників квадратних матриць над тілом з інволюцією, з метою одержання визначникового зображення оберненої матриці через аналог класичної приєднаної, і, як наслідок, узагальнення правила Крамера для правих і лівих систем лінійних рівнянь над тілом з інволюцією. У дисертаційній роботі одержано наступні нові результати.

1) Введені нові поняття стовпцевих та рядкових визначників квадратних матриць над тілом з інволюцією, яке є асоціативною композиційною алгеброю з діленням над своїм центром – полем нульової характеристики. На основі досліджених властивостей цих визначників показано, що для довільних квадратних матриць над тілом з інволюцією вони є повним та природним узагальненням визначника Мура, що розглядався тільки в класі ермітових матриць.

2) У рамках теорії стовпцевих та рядкових визначників введені визначник ермітової матриці та подвійний визначник довільної квадратної матриці над даним тілом. Подвійний визначник представлений як визначник, що задовольняє як аксіоми некомутативного визначника, так і, засобом стовпцевих та рядкових визначників, властивість розкладу Лапласа по будь-якому стовпцю чи рядку матриці над тілом, яке є кватерніоновою алгеброю з діленням над своїм центром – полем нульової характеристики.

3) Встановлено критерій оборотності довільної квадратної матриці над тілом з інволюцією в термінах теорії стовпцевих та рядкових визначників. Одержано визначникове зображення оберненої матриці над тілом з інволюцією через аналог класичної приєднаної.

4) Одержано узагальнення правила Крамера для правих і лівих систем лінійних рівнянь над тілом з інволюцією.

Робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в подальших дослідженнях в теорії матриць з некомутуючими елементами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Кирчей І.І. Дробово-раціональна регуляризація системи лінійних рівнянь над тілом кватерніонів // Мат. методи та фізико-механічні поля. – 1996. - **39**, -№ 2. - С. 89-95.
2. Кирчей І.І. Класична приєднана матриця для ермітової над тілом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, №3. – С. 33–48.
3. Кирчей І.І. Матриця, обернена до ермітової над тілом // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 4. - С. 120-125.
4. Кирчей І.І. Аналог класичної приєднаної матриці над тілом з інволюцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, №4. – С.81–91.
5. Кирчей І.І. Правило Крамера над кватерніоновою алгеброю з діленням // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. - 2006. - №1. - С.28-34.
6. Кирчей И. И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. - **13**:4. – С. 67–94.

7. Кирчей І. І. Про системи лінійних рівнянь в алгебрі кватерніонів // Тези доповідей Міжн. школи-семінару "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування". – Львів, 18-25 вересня 1994. - С. 4.

8. Кирчей І. І. Обернена матриця над тілом // IX міжн. наукова конференція ім. ак. М.Кравчука. Матеріали конференції. – Київ, 16-19 травня 2002. - С. 297.

9. Кирчей І. І. Аналог класичної приєднаної матриці над тілом // Тези доповідей Міжн. школи-семінару "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування". – Ужгород, 19-24 серпня 2002. - С. 36.

10. Кирчей І. І. Нормальний розв'язок систем лінійних рівнянь над тілом // Тези доповідей третьої всеукраїнської наукової конференції "Нелінійні проблеми аналізу". - Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003. - С. 46.

11. Кирчей І. І. Правило Крамера над тілом кватерніонів // X міжн. наукова конференція ім. ак. М. Кравчука. Матеріали конференції. – Київ, 13-16 травня 2004. - С. 302.

12. Кирчей І. І. Узагальнена обернена матриця над тілом // Тези доповідей Міжн. конференції ім. В. Я. Скоробагатька. 27 вересня – 1 жовтня 2004 р., м. Дрогобич. – Львів, 2004. – С.92.

13. Kyrchei I.I. Generalization of Cramer's rule over a skew field // Тезисы докладов Межд. алгебраической конференции, посвящённой 250-летию Московского университета. – Москва, 26 мая –2 июня 2004. - С.226-228.

14. Kyrchei I.I. The least square solution of system of linear equations over the quaternion skew field // Тезисы докладов Межд. алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина. – Екатеринбург, 29 августа – 3 сентября 2005. - С. 128-129.

15. Kyrchei I. Determinantal representation of the inverse matrix over the quaternion skew field // 5th International Algebraic Conference in Ukraine. Abstracts. – Odessa, 20-27 June 2005. - P. 120.

16. Кирчей І.І. Визначникове зображення узагальненої оберненої Мура - Пенроуза // XI міжн. наук. конференція ім. ак. М. Кравчука. Матеріали конференції. – Київ, 18-20 травня 2006. - С. 452.

17. Kyrchei I. Determinantal representation of the Moore-Penrose inverse matrix over quaternion skew field // 6th International Algebraic Conference in Ukraine. Abstracts. - Kamyanets-Podilsky, 1-7 Jule 2007. – P. 120 – 121.

АНОТАЦІЯ

Кирчей І. І. *Теорія стовпцевих і рядкових визначників та обернена матриця над тілом з інволюцією.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. - Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ, 2008.

У дисертації введені нові матричні функціонали, - стовпцеві і рядкові визначники квадратних матриць над тілом, що є композиційною нерозщеплюваною асоціативною алгеброю над своїм центром – полем нульової характеристики. Досліджені їх властивості для довільних квадратних матриць. Зокрема, показано, що вони володіють властивістю розкладу Лапласа для стовпцевих – по відповідному стовпцю і для рядкових визначників по відповідному рядку матриці. Доведено, що стовпцеві та рядкові визначники ермітової матриці рівні між собою та приймають своє значення в полі. І це значення, в силу його однозначності, означається як визначник ермітової матриці. Досліджені властивості визначника ермітової матриці через стовпцеві та рядкові визначники. В рамках теорії стовпцевих та рядкових визначників вводиться поняття подвійного визначника квадратної матриці над тілом. Показано, що цей визначник коректно означений, оскільки задовольняє аксіоми некомутативного визначника. Крім того, засобом стовпцевих та рядкових визначників, він задовольняє властивість розкладу його по будь-якому стовпцю чи рядку. Одержано визначникове зображення оберненої матриці через аналоги класичної приєднаної матриці, елементами яких є відповідні праві або ліві подвійні алгебричні доповнення. Розв'язки правої і лівої систем лінійних рівнянь аналітично представлені формулами, що узагальнюють правило Крамера.

Ключові слова: тіло з інволюцією, кватерніонова алгебра, композиційна алгебра, некомутативний визначник, обернена матриця, система лінійних рівнянь, правило Крамера.

ABSTRACT

Kyrchei I. I. *Theory of the column and row determinants and inverse matrix over a skew field with involution.* – Manuscript.

Dissertation for obtaining the Candidate degree of Physical and Mathematical Sciences by the speciality 01.01.06 – Algebra and Number Theory. – Kiev National Taras Shevchenko University, Kiev, 2008.

The column and row determinants of a square matrix are introduced over a skew field with involution. The skew field is a composition associative non-split algebra over its center - a field of zero characteristic. Such determinants can be expanded along a corresponding column for the column determinants and a corresponding row for the row determinants. The column and row determinants of a Hermitian matrix are equal and accept the value in the field. This value is defined as the determinant of a Hermitian matrix. The properties of the determinant of a Hermitian matrix are investigated. A double determinant of an arbitrary square matrix over a skew field is introduced. The double determinant is correctly defined as it satisfies the axioms of the noncommutative determinant. The double determinant can be expanded along an arbitrary row or column of a matrix by the column and row determinants of its corresponding left or right Hermitian matrices, respectively. The necessary and sufficient existence condition of the inverse matrix and its determinantal representation by analog of an adjoint matrix have been obtained. The solutions of the right and of the left systems of linear equations are represented by formulas, which generalize the Cramer rule.

Key words: skew field with involution, quaternion algebra, composition algebra, noncommutative determinant, inverse matrix, system of linear equations, Cramer rule.

АННОТАЦИЯ

Кирчей И. И. *Теория столбцовых и строчных определителей и обратная матрица над телом с инволюцией.* – Рукопись.

Диссертация на получение научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. - Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2008.

В диссертационной работе разрабатывается теория новых матричных функционалов - столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом с инволюцией, которое является композиционной нерасщепляемой ассоциативной алгеброй над своим центром – полем нулевой характеристики. В рамках этой теории получено детерминантное представление обратной матрицы через аналог классической присоединенной матрицы, а также обобщение правила Крамера для систем линейных уравнений над телом с инволюцией. Диссертация состоит из введения, трёх разделов, выводов и списка использованных источников.

В первом разделе рассматриваются главные подходы, которые исторически сложились при определении некоммутативных определителей, т.е. определителей матриц с некоммутирующими элементами. При первом подходе некоммутативные определители определяются как образ матричного отображения, которое удовлетворяет определенным аксиомам. Примерами таких определителей являются, в частности, определители Стади и Дьёдонне. Другой способ определения некоммутативных определителей - рассматривать их как значение некоторых рациональных функции от элементов матрицы. Как пример такого определения рассматриваются квазидетерминанты Гельфанда-Ретаха. И, наконец, третий способ определения некоммутативных определителей - рассматривать их подобно коммутативному случаю как альтернированную сумму мономов от элементов матрицы, фиксируя дополнительно порядок элементов в этих мономах. Такой способ разрабатывали, в частности, А. Кели, Е. Г. Мур, Л. Чен. Поскольку, ни один из представленных некоммутативных определителей не удовлетворяет свойство разложения Лапласа по любой строке или столбцу матрицы, то и определить алгебраическое дополнение элемента матрицы, а отсюда, и

получить аналитическое представление классической присоединенной матрицы над некоммутативным кольцом в рамках теории любого из определённых выше определителей, невозможно.

Во втором разделе показано, что основным телом, над которым рассматривается объект исследований, – алгебра матриц, есть тело с инволюцией, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над полем нулевой характеристики. Единственным примером некоммутативной ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгебры есть кватернионовая алгебра с делением. Вводятся новые понятия столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом, и исследуются их свойства. Показано, что каждый из них удовлетворяет свойство разложения Лапласа по соответствующей строке или столбцу. Доказано, что столбцовые и строчные определители эрмитовой матрицы равны между собой и принимают свое значение в поле. Это значение, в силу его однозначности, определяется как определитель эрмитовой матрицы. Исследованы свойства определителя эрмитовой матрицы, в частности, вырожденность строчного (столбцового) определителя по строке (столбцу), которая заменяется левой (правой) линейной комбинацией других строк (столбцов) эрмитовой матрицы. Введено понятие унимодулярного подобия эрмитовых матриц над телом. Доказано, что любая эрмитовая матрица над телом с инволюцией унимодулярно подобна диагональной матрице, элементы которой принадлежат полю.

В третьем разделе вводятся понятия левой и правой соответствующих эрмитовых матриц для произвольной матрицы над телом с инволюцией. Исследованы свойства, которые устанавливают зависимость между произвольной матрицей над телом и определителями соответствующих ей эрмитовых матриц. Доказана теорема о равенстве определителей левой и правой соответствующих эрмитовых матриц для произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией, на основании которой вводится понятие двойного определителя квадратной матрицы над телом. Показано, что этот определитель корректно определён, поскольку удовлетворяет аксиомы некоммутативных определителей. Если основное тело является алгеброй над максимальным упорядоченным полем, то двойной определитель, как матричный функционал, является мультипликативным. Кроме того, посредством столбцовых и строчных определителей, он удовлетворяет свойство Лапласа разложения по любому столбцу или строке матрицы. Установлен критерий обратимости произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией, а именно, неравенство нулю ее двойного определителя. Получено детерминантное представление обратной матрицы через аналоги классической присоединенной, элементами которых являются соответствующие правые или левые двойные алгебраические дополнения. Решения правой и левой систем линейных уравнений над телом с инволюцией аналитически представлены формулами, которые обобщают правило Крамера.

Ключевые слова: тело с инволюцией, тело кватернионов, композиционная алгебра, некоммутативный определитель, обратная матрица, система линейных уравнений, правило Крамера.