Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С.Пидстрыгача НАН Украины

На правах рукописи

УДК 512.643.2

КИРЧЕЙ
ИВАН ИГОРЕВИЧ

ТЕОРИЯ СТОЛБЦОВЫХ И СТРОЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ОБРАТНАЯ МАТРИЦА НАД ТЕЛОМ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Специальность 01.01.06 - алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на получение научной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук,
профессор Сявавко М. С.

Киев 2008

Содержание

ВСТУПЛЕНИЕ

Актуальность темы. Теория определителей матриц с некоммутирующими элементами, их еще называют некоммутативными определителями, уже на протяжении нескольких столетий приковывает к себе внимание математиков. Хронология работ, в которых вводится новое понятие некоммутативного определителя, начинается еще от работы А. Кэли 1845 года и продолжается и до сих пор. Наиболее известное определение некоммутативного определителя, а именно определителя квадратной матрицы над телом, принадлежит Ж. Дьедонне, который его значение предложил рассматривать не в самом теле, а в присоединенном к нему объекте – факторе по коммутанту. Такого же рода определение было введено Э. Стаде для квадратных матриц над телом кватернионов, а также обобщалось Й. С. Понизовским, который рассматривал определитель квадратной матрицы над произвольным кольцом, а в качестве присоединенного объекта - произвольную коммутативную полугруппу.

Кардинально другое определение некоммутативного определителя недавно было предложено И. М. Гельфандом и В. С. Ретахом, которые квадратной матрице n-го порядка над телом сопоставляют матрицу ее квазидетерминантов того же порядка. Таким образом, вместо одного определителя они вводят n^2 квазидетерминантов, перенося из коммутативного случая не самое понятия определителя, а его отношение к минорам порядка $n-1$.

Третий способ определения некоммутативного определителя – рассматривать его подобно коммутативному случаю, как альтернированную сумму мономов от элементов матрицы, фиксируя дополнительно порядок элементов в этих мономах. Наиболее основательно и успешно этот способ был разработан в роботах Э. Г. Мура и Ф. Д. Дайсона, но только для определенного класса матриц - а именно эрмитовых матриц над телом. Определенное обобщение такого определителя для произвольных квадратных матриц над телом кватернионов осуществил Л. Чен.

В то же время ни один из до сих пор введенных некоммутативных определителей не обобщает в полном объеме, в смысле сохранения всех свойств и применений, определитель комплексной матрицы. Более того, некоторые вопросы из теории матриц над некоммутативным кольцом до сих пор остаются открытыми, хотя аналогичные задачи находят своё решение посредством определителя в коммутативном случае. Так до сих пор нерешенными оставались такие актуальные проблемы линейной алгебры над телом, как аналитическое представление классической присоединенной матрицы и, как следствие, обобщение правила Крамера для систем линейных уравнений над телом. Разработке этих вопросов посвящена данная диссертационная работа.

Актуальность исследований, которые проводятся в линейной алгебре над телом (в частности, телом кватернионов), возрастает еще и вследствие нужд теоретической физики, особенно в контексте квантовой механики и теории поля, что отображено в роботах [41, 59, 65, 70, 75] С. Адлера Ф. Гурси, С. Де Лео, П. Ротелли, Д. Финкельштейна и других. С появлением суперсимметричных теорий и квантовых групп [44] возникла насущная необходимость рассматривать матрицы, которые содержат антикоммутирующие или вообще некоммутативные элементы. Поэтому рассмотрение определителей таких матриц является важным обобщением понятия определителя. Все это и обуславливает актуальность и выбор темы диссертационного исследования.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Результаты диссертации получены в рамках выполнения госбюджетной темы Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины: ”Развитие диференциально-геометрических и аналитических методов исследования инвариантных уравнений математической и теоретической физики” (номер госрегистрации 0101U000451).

Цель и задачи исследования. *Целью* диссертации являются определения и исследование свойств столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом с инволюцией, которые бы обобщали определитель Э. Г. Мура, введенный для эрмитовых матриц; установление критерия обратимости квадратных матриц над телом в рамках построенной теории определителей и детерминантное представление обратной матрицы над телом через аналог классической присоединенной матрицы; обобщение правила Крамера для левых и правых систем линейных уравнений над телом с инволюцией, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над своим центром - полем нулевой характеристики.

Для достижения этой цели осуществляется постановка и решения следующих задач:

- дать определения и исследовать свойства строчных и столбцовых определителей квадратных матриц над телом с инволюцией, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над полем нулевой характеристики;
- в рамках теории столбцовых и строчных определителей дать определение определителя эрмитовой матрицы, который совпадает с определителем Мура, и исследовать его свойства выраженные через столбцовые и строчные определители;
- аналитически представить обратную к эрмитовой матрице над телом с инволюцией через классическую присоединенную;

- получить определение в рамках теории столбцовых и строчных определителей и исследовать свойства двойного определителя квадратной матрицы над телом с инволюцией;
- получить детерминантное представление обратной матрицы через аналог классической присоединенной для произвольной обратимой квадратной матрицы над телом с инволюцией;
- аналитически представить решения правой и левой систем линейных уравнений над телом, как обобщения правила Крамера.

Объектом исследования являются матрицы над телом, которое является ассоциативной композиционной алгеброй с делением над своим центром – полем нулевой характеристики.

Предметом исследования являются некоммутативные определители квадратных матриц над телом с инволюцией.

Методы исследования: методы теории некоммутативных колец и алгебр, теории матриц над телом.

Научная новизна полученных результатов. Научная новизна работы заключается в таких основных положениях:

1. Введены понятия и разработана теория новых матричных функционалов, - столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над своим центром - полем нулевой характеристики.
2. В рамках теории столбцовых и строчных определителей введено понятие определителя эрмитовой матрицы, который совпадает с определителем Мура, а также двойного определителя квадратной матрицы над телом с инволюцией. Показано, что множество всех столбцовых и строчных определителей является полным и естественным

обобщением определителя Мура для произвольной квадратной матрицы над телом. Двойной определитель представлен как определитель, который удовлетворяет как аксиомы некоммутативного определителя, так и свойство Лапласа разложения определителя по любому столбцу или строке матрицы.

3. Получено детерминантное представление обратной матрицы через классическую присоединенную для обратимой эрмитовой матрицы над телом с инволюцией.
4. Получено детерминантное представление обратной матрицы для произвольной обратимой квадратной матрицы над телом с инволюцией через аналог классической присоединенной.
5. Решения правых и левых систем линейных уравнений над телом изображено как обобщение правила Крамера.

Личный взнос соискателя. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Практическое значение полученных результатов. Результаты диссертации имеют теоретический характер. Их можно использовать в дальнейших научных исследованиях алгебры матриц с некоммутирующими элементами, а также в исследованиях, которые применяют некоммутативные определители, в частности, в областях теоретической физики и квантовой механики.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на: Международной конференции из алгебры в Украине (г. Львов, 2003; г. Одесса, 2005; г. Каменец-Подольский, 2007), Международной научной конференции им. академика М. Кравчука (г. Киев, 1994, 2002, 2004, 2006), Международной математической конференции им. В. Я. Скоробагатька (г. Дрогобыч, 2004, 2007), International Conference on Matrix Analysis and Applications (Dec. 14-16, 2003, Nova Southeastern University, Fort Lauderdale, Florida, USA), Международной алгебраической конференции посвященной 250-летию Московского государственного университета (г. Москва, Россия, 2004), Международной алгебраической конференции посвященной 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина (г. Екатеринбург, Россия, 2005), III Всеукраинской научной конференции "Нелинейные проблемы анализа" (г. Ивано-Франковск, 2003), Международной школе-семинаре "Цепные дроби, их обобщение и применение" (п.г.т. Верхнее Синевидное Львовской обл., 1994; г. Ужгород, 2002), заседаниях семинара им. В. Я. Скоробагатька Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины (г. Львов, 2001-2008), заседаниях общеинститутского математического семинара Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины (г. Львов, 2005, 2008), заседаниях Львовского городского научного семинара из алгебры (г. Львов, 2001, 2004), заседании семинара из алгебры Киевского национального университета им. Т.Г.Шевченко (г. Киев, 2004).

Публикации. Результаты, которые включены в диссертацию, достаточно полно изложены в 17 публикациях, в том числе в шести статьях в профессиональных научных изданиях из перечня, утвержденного ВАК Украины и одиннадцати тезисах международных и всеукраинских конференций.

РАЗДЕЛ 1
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.
ТЕОРИЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Вопросы детерминантного представления обратной матрицы над телом через аналог классической присоединенной матрицы и, как следствие, решение систем линейных уравнений над телом по правилу Крамера и до сих пор остаются открытыми [45, 50, 51, 56, 95]. Ключевым в решении этой задачи является определение некоммутативного определителя, т.е. определителя квадратной матрицы с некоммутирующими элементами, и в этом плане исторически сложилось несколько подходов.

1.1. Аксиомы некоммутативного определителя

Первый способ - это определение некоммутативного определителя, как образа отображения, которое удовлетворяет необходимую для определения и достаточную группу с трех аксиом, которая в современной литературе является общепризнанной [37, 45, 51, 56].

Обозначим через $\boldsymbol{M(}n\boldsymbol{,K)}$ кольцо квадратных матриц n-го порядка над кольцом $\boldsymbol{K}$.

Определение 1.1.1. Пусть функционал $\boldsymbol{d}:\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{K})\to \boldsymbol{K}$ удовлетворяет следующим аксиомам.

Аксиома 1. (Вырожденность.) $\boldsymbol{d}(\mathbf{A})=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *вырожденная (необратимая) матрица.*

Аксиома 2. (Мультипликативность.) $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\boldsymbol{d}(\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{d}(\mathbf{B})$.

Аксиома 3. (Инвариантность.) *Если матрица* $\tilde{\mathbf{A}}$ *получается из квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *через добавление к ее произвольной строке, умноженной слева на элемент кольца, ее другую строку, или через добавление к ее произвольному столбцу, умноженному справа на элемент кольца, ее другой столбец, тогда* $\boldsymbol{det}\,\tilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$.

Тогда значение функционала $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}) \in \boldsymbol{K}$ называется *определителем квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ n*-го порядка над кольцом* $\boldsymbol{K}$.

Обозначим через $\mathbf{I}$ - единичную матрицу, $\mathbf{E}_{ij}$ - матрицу на пересечении i-й строки и j-го столбца которой находится 1, а все другие элементы являются нулями. Тогда матрица $\mathbf{P}_{ij}(b) = \mathbf{I} + b \cdot \mathbf{E}_{ij}$ при $i \neq j$ отличается от единичной элементом $b \in \boldsymbol{K}$, который находится на пересечении i-й строки и j-го столбца для всех $i, j = \overline{1, n}$.

Вместо аксиомы 3 также используют [45] эквивалентную ей следующую аксиому.

Аксиома 3'. *Для произвольного элемента* $b \in \boldsymbol{K}$ *и для всех* $i, j = \overline{1, n}$ *таких, что* $i \neq j$, *имеем равенство* $\boldsymbol{d}(\mathbf{P}_{ij}(b)) = 1$.

Определение 1.1.2. Группа всех невырожденных (обратимых) квадратных матриц порядка n над кольцом $\boldsymbol{K}$ называется *полной линейной группой* и обозначается $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{K})$. Матрицы $\mathbf{P}_{ij}(b)$ (для всех $i \neq j$ и всех $b \in \boldsymbol{K}$) порождают подгруппу $\boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{K})$, которая называется *унимодулярной группой*, а ее элементы называют *унимодулярными матрицами*.

Имеет место теорема.

Теорема 1.1.1. [45] *Пусть* $\boldsymbol{d}$ *удовлетворяет аксиомы 1, 2, 3, тогда образ* $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{K}))$ *является коммутативным подмножеством* $\boldsymbol{K}$.

Как уже вытекает из этой теоремы только посредством определителя, который удовлетворяет аксиомы 1, 2, 3, невозможно аналитически представить классическую присоединенную матрицу $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ для произвольной обратимой матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{K})$ над кольцом $\boldsymbol{K}$. Поскольку, с одной стороны элементы матрицы $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ за определением классической присоединённой являются алгебраическими дополнениями, т.е. определителями соответствующих подматриц матрицы, а это за теоремой 1.1.1 означает, что они принадлежат коммутативному подмножеству кольца $\boldsymbol{K}$. А с другой - элементы присоединенной матрицы для произвольной матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{K})$ в общем являются произвольными элементами кольца.

Рассмотрим аксиому аддитивности детерминантного отображения относительно ее произвольной строки:

Аксиома 3*. *Пусть для квадратных матриц* $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $\mathbf{C} = (c_{ij})$, *где* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} \subset \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{K})$, *существует индекс* $r \in I_n = \{1, \ldots, n\}$ *такой, что:*

$$a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}, \text{ когда } i \neq r$$

$$a_{rj} + b_{rj} = c_{rj}, \text{ для всех } j = \overline{1, n},$$

тогда $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{d}(\mathbf{B}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{C})$.

Имеет место теорема, которую доказал Фримен Дайсон.

Теорема 1.1.2. [49] *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *кольцо с единицей и без делителей нуля. Если на матричном кольце* $\boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{K})$ *с* $n > 1$ *существует отображение* d*, которые удовлетворяет аксиомы 1, 2, 3*, тогда* $\boldsymbol{K}$ *является коммутативным кольцом.*

Учитывая этот факт, - то, что над кольцом не существует детерминантного отображения, которое бы удовлетворяло аксиомы 1, 2, 3*, он предложил считать аксиому 1 необходимой и ключевой для определения некоммутативного определителя.

1.1.1. Определитель Э. Стаде. Одним из наиболее известных примеров определителя, как образа отображения, которое удовлетворяет аксиомы 1, 2, 3, есть определитель Стаде. Он ввел его (в работе [86]) для квадратных матриц над телом кватернионов $\boldsymbol{H}$. Его идея заключалась в том, чтобы квадратную матрицу n-го порядка над телом кватернионов трансформировать в комплексную квадратную матрицу порядка $2n$.

Произвольную квадратную матрицу $\mathbf{M} \in \boldsymbol{M(n,H)}$ можно однозначно подать в виде: $\mathbf{M} = \mathbf{A} + j \cdot \mathbf{B}$, где $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} \subset \boldsymbol{M(n,C)}$, а $\boldsymbol{C}$ - поле комплексных чисел.

Определение 1.1.3. Определим гомоморфизм $\varphi(\mathbf{M}) = \varphi(\mathbf{A} + j \cdot \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\overline{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B} & -\overline{\mathbf{A}} \end{pmatrix}$, тогда $\boldsymbol{Sdet}\,\mathbf{M} := \boldsymbol{det_C}\,\varphi(\mathbf{M})$ - *определитель Стаде* для квадратной матрицы $\mathbf{M}$ над телом кватернионов $\boldsymbol{H}$, где $\overline{\mathbf{A}}$ - матрица, элементы которой сопряжены с соответствующими элементами матрицы $\mathbf{A}$.

Кроме того, вводится иньективний гомоморфизм $\phi : \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{M}(2n,\boldsymbol{R})$ из кольца комплексных квадратных матриц n-го порядка в кольцо действительных квадратных матриц порядка $2n$:

$$\phi(\mathbf{C} + i\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{C} \end{pmatrix},$$

Имеет место теорема.

Теорема 1.1.3. [86, 45] *Для произвольной комплексной матрицы* $\mathbf{N}$ *имеем*

$$\boldsymbol{det_R}\,\phi(\mathbf{N}) = |\boldsymbol{det_C}\,\mathbf{N}|^2 \geq 0,$$

и для произвольной матрицы $\mathbf{M}$ *над телом кватернионов:*

$$\boldsymbol{det_C}\,\varphi(\mathbf{M})=\sqrt{\boldsymbol{det_R}\,\phi(\varphi(\mathbf{M}))}\geq 0\,.$$

1.1.2. Определитель Ж. Дьедонне. Другой не менее известный пример детерминантного функционала, который удовлетворяет аксиомы 1, 2 и 3 был введён Жаном Дьедонне. Он рассматривал [55] его для квадратных матриц над произвольным телом $\boldsymbol{S}$.

Имеет место теорема.

Теорема 1.1.4.[1, 55] *Произвольная обратимая матрица* $\forall\mathbf{A}\in\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})$ *может быть изображена в виде* $\mathbf{A}=\mathbf{D}(x)\cdot\mathbf{B}$*, где*

$$\mathbf{D}(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & x\end{pmatrix},\ \mathbf{B}\in\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S}).$$

Следующая теорема утверждает, что $\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$ является коммутантом группы $\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})$:

Теорема 1.1.5.[1, 45, 55] $\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})=[\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S}),\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})]$.

Теорема 1.1.6. [1,45, 55] *Пусть* $\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{S}-\{0\}$ *- мультипликативная группа тела* $\boldsymbol{S}$*. Тогда*

$$\mathbf{D}(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & x\end{pmatrix}$$

является коммутатором в группе $\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})$, *т.е.,* $\mathbf{D}(x)\in \boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$ *тогда и только тогда, когда* x *является коммутатором в* $\boldsymbol{S}^{*}$.

В разложении $\mathbf{A}=\mathbf{D}(x)\cdot\mathbf{B}$ ни x, ни $\mathbf{B}$ не являются однозначными, но произвольному элементу $x\in\boldsymbol{S}$ однозначно ставится в соответствие его канонический образ $x[\boldsymbol{S}^{*},\boldsymbol{S}^{*}]$ фактор-группы $\boldsymbol{S}^{*}/[\boldsymbol{S}^{*},\boldsymbol{S}^{*}]$ по коммутативной подгруппе $[\boldsymbol{S}^{*},\boldsymbol{S}^{*}]$ тела $\boldsymbol{S}$. Это было использовано Дьедонне в его работе [55]. Его целью было показать, как определитель можно выразить в терминах теории групп.

Теорема 1.1.7. [1, 45, 55] *Для произвольного тела* $\boldsymbol{S}$ *существует изоморфизм:*

$$\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})/[\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S}),\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})]\to \boldsymbol{S}^{*}/[\boldsymbol{S}^{*},\boldsymbol{S}^{*}].$$

Из этой основной теоремы Дьедонне вытекает его определение определителя:

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}:=\boldsymbol{det}(\mathbf{D}(x)\cdot\mathbf{B})=x[\boldsymbol{S}^{*},\boldsymbol{S}^{*}].$$

Если $\boldsymbol{S}\equiv\boldsymbol{H}$ - тело кватернионов, тогда, определив гомоморфизм $\omega:\boldsymbol{H}^{*}/[\boldsymbol{H}^{*},\boldsymbol{H}^{*}]\to\boldsymbol{R}_{+}$:

$$\omega\left(x[\boldsymbol{H}^{*},\boldsymbol{H}^{*}]\right)=\|x\|,$$

получим $\boldsymbol{Ddet}\,\mathbf{A}:=\omega\left(x[\boldsymbol{H}^{*},\boldsymbol{H}^{*}]\right)=\|x\|$ - *нормализованный определитель Дьедонне.* Здесь $\|x\|$ - евклидовая норма в теле кватернионов $\boldsymbol{H}$.

Дьедонне показал [55], что произвольный детерминантный функционал $\boldsymbol{d}$, который удовлетворяет аксиомы 1, 2, 3 определения 1.1.1, имеет вид

$\boldsymbol{d}(\mathbf{M})=\boldsymbol{Ddet}^{r}\,\mathbf{M}$, где $r\in\boldsymbol{R}$ - действительное число, и для произвольной матрицы $\mathbf{M}\in\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{H})$, в частности, $\boldsymbol{Sdet}\,\mathbf{M}=\boldsymbol{Ddet}^{2}\,\mathbf{M}$.

Из других свойств определителя Дьедонне отметим то, что этот определитель, как функция от некоторой строки матрицы, не является линейным. Обозначим эту функцию через $\boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.})$, где $\mathbf{a}_{i.}$ - i-я строка матрицы $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, тогда справедливой является теорема:

Теорема 1.1.8. [1, 45, 55] $\boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.}+\mathbf{a}'_{i.})\subset\boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.})+\boldsymbol{D}(\mathbf{a}'_{i.})$.

В случае $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{H})$ получим неравенство треугольника: $\boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.}+\mathbf{a}'_{i.})\leq\boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.})+\boldsymbol{D}(\mathbf{a}'_{i.})$.

Нужно отметить, что определитель Дьедонне имеет широкое применение в теории матриц над телом, что отображено во многих роботах, в частности [46, 47, 57, 61, 66, 74, 82, 83].

1.1.3. Представление обратной матрицы Й.С. Понизовским. В работе [37] Й. С. Понизовский, обобщая подход предложенный Дьйодонне квадратной матрице над кольцом $\boldsymbol{K}$ гомоморфно ставит в соответствие элемент некоторой коммутативной подгруппы, который и называет определителем. Построенный таким образом определитель, как и определитель Дьедонне, является корректно определённым, поскольку полностью удовлетворяет аксиомы 1, 2, 3 некоммутативного определителя. И в то же время, как делает замечание сам автор „такие свойства обычных определителей как разложение по минорам строки или столбца при нашем определении определителя не имеют содержания [37, стр. 4]“. Собственно, из этого, очевидно, следует невозможность введения понятия алгебраического дополнения элемента матрицы и, как следствие, невозможность построения присоединенной матрицы в рамках только этой теории определителей. Й.С.Понизовским получено следующее аналитическое представление обратной матрицы:

$$\mathbf{M}^{-1} = \varphi_{\boldsymbol{D}}^{-1}\left(\mathbf{M}_{\boldsymbol{D}}^{-1}\right).$$

Здесь $\boldsymbol{D}$ - точное неособенное представление кольца $\boldsymbol{K}$ над полем $\boldsymbol{P}$ степени d, $\mathbf{M}$ - матрица порядка n над $\boldsymbol{K}$, $\mathbf{M}_{\boldsymbol{D}}$ - матрица порядка nd над $\boldsymbol{P}$, которая получается с $\mathbf{M}$ заменой каждого элемента матрицей, отвечающей ему в представлении $\boldsymbol{D}$ и $\varphi_{\boldsymbol{D}}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}_{\boldsymbol{D}}$. Если представление $\boldsymbol{D}$ - точное и неособенное, то отображение $\varphi_{\boldsymbol{D}} : \boldsymbol{K}_n \to \boldsymbol{P}_{nd}$ является изоморфизмом, здесь $\boldsymbol{K}_n$ - кольцо квадратных матриц порядка n над $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{P}_{nd}$ - кольцо квадратных матриц порядка nd над полем $\boldsymbol{P}$. При этом представление $\boldsymbol{D}$ называют неособенным, если оно содержит обратимые матрицы. И как указывает автор „если задана конкретная матрица $\mathbf{M}$ над $\boldsymbol{K}$ и фактически задано точное представление $\boldsymbol{D}$ над полем $\boldsymbol{P}$, то можно фактически вычислить $\mathbf{M}^{-1}$ [37, стр. 11]“. Но, очевидно, что такое аналитическое представление обратной матрицы не представляет собой *именно* детерминантное представление обратной матрицы через классическую присоединенную.

1.2. Квазидетерминанты Гельфанда-Ретаха

Второй способ определения определителя матрицы над телом – это рассматривать его как определенную рациональную функцию от элементов матрицы. Таким способом строили свои определители А. Гейтинг [63] и А. Р. Ричардсон [84]. Но наибольшего успеха здесь достигли И. М. Гельфанд и В. С. Ретах. В своих роботах [4, 5, 64], они утверждают, что ”вопрос об определении единого детерминанта квадратной матрицы в общей некоммутативной ситуации не имеет смысла, если рассматривать детерминанты со значениями в кольце [4, стр. 5]” и квадратной матрице n-го порядка над телом вместо одного определителя ставят в соответствие n^2 построенных ими квазидетерминантов, перенося из коммутативного случая не само понятия определителя, а его отношение к минорам порядка $n-1$.

Пусть I_n, J_n - упорядоченные множества индексов из n элементов. Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$, $i \in I_n$, $j \in J_n$, - матрица формальных некоммутативных элементов a_{ij}. Индукцией по n определяются n^2 рациональных выражений $|\mathbf{A}|_{pq}$, $p \in I_n$, $q \in J_n$, которые называются *квазидетерминантами порядка* pq.

Для $n=1$**,** т.е., для одноэлементной матрицы $\mathbf{A}=(a_{ij})$, определяется единое выражение $|\mathbf{A}|_{ij}=a_{ij}$. Предположив, что определены квазидетерминанты всех матриц порядков меньше, чем n, определяются квазидетерминанты матрицы $\mathbf{A}=(a_{ij})$, когда $i \in I_n$, $j \in J_n$:

$$|\mathbf{A}|_{pq}=a_{pq}-\sum_{\substack{i\neq p\\ j\neq q}} a_{pj}\cdot\left|\mathbf{A}^{pq}\right|_{ij}^{-1}\cdot a_{iq}\,, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}^{pq}$ - матрица, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$, вычеркнув ее строку p и столбец q.

Показано, что для квадратных матриц над телом квазидетерминант $|\mathbf{A}|_{pq}$ может быть определён и в случае, когда не определены некоторые из квазидетерминантов матрицы $\mathbf{A}^{pq}$. Для матриц над телом справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.1. [5] *Пусть* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *матрица над телом. Квазидетерминант* $|\mathbf{A}|_{pq}$ *определен, если определен и отличается от нуля хотя бы один из квазидетерминантов матрицы* $\mathbf{A}^{pq}$*. В этом случае в формуле (1.1)* *суммирование проводится по всем парам* (i, j), $i \neq p$, $j \neq q$, *для которых квазидетерминант* $\left|\mathbf{A}^{pq}\right|_{ij}$ *определен и отличается от нуля.*

Если элементы a_{ij} коммутируют, то $|\mathbf{A}|_{pq} = (-1)^{p+q} \dfrac{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{pq}}$.

И. М. Гельфанд и В. С. Ретах демонстрируют широкий спектр свойств и применений квазидетерминантов, призывая при этом не бояться их не полиномиальной, а "лорановской" зависимости от элементов матрицы. Рассмотрим те их результаты, которые относятся к обратимости матриц и решений систем линейных уравнений над телом. Имеют место теоремы.

Теорема 1.2.2. [5] *Пусть определен квазидетерминант* $|\mathbf{A}|_{ij}$ *матрицы* $\mathbf{A}$. *Следующие условия, равносильны:*

1) $|\mathbf{A}|_{ij} = 0$,

2) i*-я строка матрицы* $\mathbf{A}$ *является левой линейной комбинацией других строк этой матрицы;*

3) j*-й столбец матрицы* $\mathbf{A}$ *является правой линейной комбинацией других столбцов этой матрицы.*

Теорема 1.2.3. [4] 1) *Обратная матрица* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ *существует тогда и только тогда, когда*

а) если квазидетерминант $|\mathbf{A}|_{ij}$, $(i, j = \overline{1, n})$, *определен, тогда* $|\mathbf{A}|_{ij} \neq 0$;

б) для каждого "строчного" индекса p *найдётся* q *такое, что квазидетерминант* $|\mathbf{A}|_{pq}$ *определен;*

в) для каждого "столбцового" индекса s *найдётся индекс* r *такой, что квазидетерминант* $|\mathbf{A}|_{rs}$ *определен.*

2) Если определена обратная матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times n}$*, тогда для всех* $i, j = 1,\dots,n$ *элемент* b_{ij} *равняется* $|\mathbf{A}|_{ij}^{-1}$*, если квазидетерминант* $|\mathbf{A}|_{ij}$ *определен, и нулю в противном случае.*

Эта теорема раскрывает предложенный И. М. Гельфандом и В. С. Ретахом метод построения обратной матрицы над телом. Поскольку введенные квазидетерминанты также не удовлетворяют свойство Лапласа разложения по любой строке или столбцу, то очевидно, что для представления обратной матрицы в этом случае используется иная структура, чем присоединенная матрица.

Рассматривается [5] левая система линейных уравнений над телом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = \xi_1, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = \xi_{n1}. \end{cases}$$

Из теоремы 1.2.3 вытекает, что ее решение задается формулой:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{A}|_{ji}^{-1} \xi_j .$$

Приводится и другой вариант решения этой системы - правило Крамера для квазидетерминантов.

Теорема 1.2.4.[5] *Пусть* $\mathbf{A}_l(\xi)$ *- матрица, которая получается из матрицы* $\mathbf{A}$ *заменой* l*-го столбца на столбец* $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)^T$*. Тогда*

$$|\mathbf{A}|_{ij} x_j = |\mathbf{A}_j(\xi)|_{ij}.$$

При этом правая часть не зависит от выбора j*.*

1.3. Определитель как альтернированная сумма мономов от элементов матрицы

“Классический” способ определения определителя, как альтернированной суммы мономов от элементов матрицы взятых по одному с каждой строки и столбца, является наиболее очевидным. Но для матриц с некоммутирующими элементами при попытке его введения возникает проблема порядка элементов в каждом из мономов. Для многих математиков этот недостаток канонического определения стал признаком того, что такой способ непригоден в общей некоммутативной ситуации. Конечно, что при использовании этого метода были свои недостатки, но есть и весомые достижения.

1.3.1. Определитель А. Кэли. В 1845 году, через два года после открытия Гамильтоном кватернионов, Артур Кэли впервые таким способом дал [48] определение определителя матрицы над телом кватернионов. Он выбрал для него разложение по первому столбцу. Если обозначить его $\boldsymbol{Cdet}$, тогда

$$\boldsymbol{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

и

$$\boldsymbol{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1\left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) - a_2\left(b_1 c_3 - b_3 c_1\right) + a_3\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right).$$

Но насколько корректным является такое определение? Кэли отметил, что если два строки 2×2 матрицы одинаковые, то

$$\boldsymbol{Cdet}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0\,.$$

Однако, когда одинаковы два столбца такой матрицы, то $\boldsymbol{Cdet}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ba$, и, вследствие некоммутативности, определитель в общем не равняется нулю. Все же эта причина не оттолкнула, ни Кэли, ни других его последователей от исследования этого определителя, впрочем, без успеха в сфере его применений. Более того, как показано в работе [45] определитель Кэли не удовлетворяет ни одной из указанных выше аксиом.

1.3.2. Определитель Э. Г. Мура. Наиболее удачного построения определителя по этому принципу достиг Э. Г. Мур. Он заметил, что можно достичь успеха в каноническом определении определителя матриц с некоммутирующими элементами, когда применить его для определенного класса матриц, а именно для эрмитовых. Это открытие он сделал в работе [77], которая была длительное время забыта и результаты, которой позднее обобщил и изложил в более современной терминологии известный физик и математик Ф. Д. Дайсон [56], заметив важность применения определителя Мура в теоретической физике.

Определение 1.3.1. Пусть $\boldsymbol{K}$ является кольцом с инволюцией $q \to q^*$, это означает, что оператор $*$ удовлетворяет условие $\left(q^*\right)^* = q$ для всех $q \in \boldsymbol{K}$. Элемент $q = q^*$, $q \in \boldsymbol{K}$, называется *скаляром кольца*. $\boldsymbol{K}$ является *кольцом с коммутирующими скалярами*, если каждый скаляр коммутирует со всеми элементами в кольце $\boldsymbol{K}$.

Множество скаляров образует подкольцо $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{K}$.

Определение 1.3.2. Говорят, что кольцо $\boldsymbol{K}$ владеет *свойством скалярного произведения*, если скалярное произведение $(q, r) = qr + r^* q^*$ является симметричным, что означает: $(q, r) = (r, q)$.

Определение определителя Мура вводится не только для эрмитовых матриц над кольцом $\boldsymbol{K}$ с коммутирующими скалярами и свойством скалярного произведения, но и для почти эрмитовых (самосопряжённых) матриц.

Определение 1.3.3. Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ над кольцом $\boldsymbol{K}$ с коммутирующими скалярами и свойством скалярного произведения называется почти эрмитовой, если существует такой индекс $k \in I_n$, что $a_{ji} = a_{ij}^*$, когда $i \neq k$ и $j \neq k$.

Определение 1.3.4. Пусть $k \in I_n$ удовлетворяет определение 1.3.3. Индукцией по n почти эрмитовой матрице $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ над кольцом $\boldsymbol{K}$ с коммутирующими скалярами и свойством скалярного произведения ставится в соответствие выражение, $\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A}$, которое называется *определителем Мура*:

$$\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A} = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{kj} a_{kj}\, \boldsymbol{Mdet}(\mathbf{A}(k \to j)), & n > 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $\varepsilon_{kj} = \begin{cases} 1, \textit{ если } k = j \\ -1, \textit{ если } k \neq j \end{cases}$, а через $(\mathbf{A}(k \to j))$ обозначена матрица, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$, сначала заменив ее j-й столбец ее k-м столбцом, а потом вычеркнув k-ю строку и k-й столбец.

Другое определение определителя Мура для эрмитовой матрицы эквивалентное определению 1.3.4 приводится [45] в терминах подстановок.

Определение 1.3.5. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ - матрица над кольцом $\boldsymbol{K}$ с коммутирующими скалярами и свойством скалярного произведения. *Определителем эрмитовой матрицы* называется выражение

$$\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A}=\sum_{\sigma\in S_n}|\sigma|\,a_{n_{11}n_{12}}\dots a_{n_{1l_1}n_{11}}\,a_{n_{21}n_{22}}\dots a_{n_{2l_2}n_{21}}\dots a_{n_{r1}n_{r2}}\dots a_{n_{rl_r}n_{r1}},$$

где S_n - симметричная группа на множестве $I_n=\{1,\dots,n\}$, $\sigma\in S_n$ - подстановка n-й степени, $|\sigma|$ - знак ее чётности. Циклическое представление подстановки σ в нормальной форме имеет вид:

$$\sigma=(n_{11}\dots n_{1l_1})(n_{21}\dots n_{2l_2})\dots(n_{r1}\dots n_{rl_r}),$$

где $n_{i1}<n_{ij}$ для всех $j>1$ при этом $n_{11}>n_{21}>\dots>n_{r1}$.

Имеют место теоремы:

Теорема 1.3.1. [56] *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *- кольцо с коммутирующими скалярами и свойством скалярного произведения и пусть* $\mathbf{A}$ *- эрмитовая матрица с элементами из* $\boldsymbol{K}$. *Тогда значение* $\mathbf{Mdet}\,\mathbf{A}$, *определенное равенством (1.2) независимо от* k, *а также* $\mathbf{Mdet}\,\mathbf{A}$ *является скаляром.*

Теорема 1.3.2. [56] *Если* $\mathbf{A}$ *- почти эрмитовая матрица над кольцом* $\boldsymbol{K}$ *и имеет две одинаковые строки или столбца, тогда* $\mathbf{Mdet}\,\mathbf{A}=0$.

Из этих теорем Дайсон доказывает выполнение аксиом 1 и 3* для определителя Мура и аксиомы 2 при определенных строгих ограничениях на исходное кольцо $\boldsymbol{K}$. В своей работе он также приводит перечень нерешенных проблем, связанных с определителем Мура, в частности следующие:

1) Какая зависимость между определителями Мура и Дьедонне?
2) Каким наиболее естественным путём можно обобщить определение определителя Мура для матриц, которые не являются самосопряжёнными?

Первый из приведённых вопросов на данное время уже нашёл свое решение. Что касается второй проблемы, то полный и обоснованный ответ на него является целью данной работы. Другой попыткой удовлетворительного ответа на этот вопрос является определитель Лонгхуан Чена.

1.3.3. Определитель Л. Чена. Для произвольной квадратной матрицы $\mathbf{A}$ над телом кватернионов $\boldsymbol{H}$ Л. Чен определил [49, 50] определитель следующим образом:

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{n_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s n_1} a_{n_2 j_2} \ldots a_{j_t n_2} \ldots a_{n_r k_2} \ldots a_{k_l n_r},$$

$$\sigma = (n_1 i_2 i_3 \ldots i_s)(n_2 j_2 j_3 \ldots j_t)\ldots(n_r k_2 k_3 \ldots k_l),$$

$$n_1 > i_2, i_3, \ldots, i_s;\; n_2 > j_2, j_3, \ldots, j_t;\; \ldots;\; n_r > k_2, k_3, \ldots, k_l,$$

$$n = n_1 > n_2 > \ldots > n_r \geq 1,$$

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(s-1)+(t-1)+\ldots+(l-1)} = (-1)^{n-r}.$$

Следует отметить, что его определитель нарушает предостережение Дайсона - не удовлетворяет ключевую аксиому 1. Но для эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ его определитель, как и определитель Мура, является скаляром, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \in \boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{R}$ - поле действительных чисел. Кроме того, для произвольной кватернионовой матрицы $\mathbf{A}$ вводится понятие двойного определителя, который обозначается $\|\mathbf{A}\|$.

Определение 1.3.4. Для произвольной матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{H}_{n\times m}$, $\|\mathbf{A}\| \equiv |\mathbf{A}^*\mathbf{A}|$ называется ее *двойным определителем*.

Здесь через $\boldsymbol{H}_{n\times m}$ обозначается множество $n \times m$-матриц над телом кватернионов $\boldsymbol{H}$. Имеют место теоремы, которые раскрывают свойства двойного определителя:

Теорема 1.3.4. [50] *Для произвольной* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{H}_{n\times n}$ *имеем* $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^*\|$.

Теорема 1.3.5. [50] *Для произвольных* $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} \in \boldsymbol{H}_{n\times n}$,

$$\|\mathbf{AB}\| = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|.$$

Теорема 1.3.6. [50] *Для произвольной* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{H}_{n\times m}$ *имеем* $\|\mathbf{A}\| \geq 0$.

Установлено необходимое и достаточное условие правой линейной независимости столбцов произвольной матрицы над телом кватернионов.

Теорема 1.3.7. [50] *Если* $\mathbf{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \boldsymbol{H}_{n\times m}$, *тогда необходимым и достаточным условием правой линейной независимости вектор-столбцов* $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$, $(\forall i = \overline{1,n})$, *матрицы* $\mathbf{A}$ *есть* $\|\mathbf{A}\| \neq 0$.

Имеет место также теорема, которая раскрывает предложенный Ченом метод построения обратной матрицы.

Теорема 1.3.8. [50] *Необходимым и достаточным условием оборотности квадратной матрицы* $\mathbf{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *над телом кватернионов является то, чтобы ее двойной определитель* $\|\mathbf{A}\| \neq 0$. *Тогда существует обратная матрица* $\mathbf{A}^{-1} = (b_{jk})$, *где* b_{jk} *задаются формулами:*

$$\overline{b_{jk}} = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}\omega_{kj}, \ (j,k = 1,2,\ldots,n),$$

$$\omega_{kj} = \boldsymbol{det}(\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1} \ldots \alpha_{n-1}\delta_k)^*(\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1} \ldots \alpha_{n-1}\alpha_j).$$

где α_i *-* i *-й столбец матрицы* $\mathbf{A}$*,* δ_k *-* n *-мерный столбец с единицей в* k *-й строке и нолем во всех других.*

Поскольку, свойство разложения Лапласа по любой строке или столбцу определителем Чена, за исключением n -й строки, также не выполняется, то и матрицу, которая используется для аналитического изображения обратной, нельзя определить как некоторый аналог присоединенной.

В работе [49] Чен также получает решение правой системы линейных уравнений над телом кватернионов, который он называет крамеровским.

Теорема 1.3.9. [49] *Для правой системы линейных уравнений* $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \beta$ *над телом кватернионов, если двойной определитель его матрицы коэффициентов* $\|\mathbf{A}\| \neq 0$*, существует единое решение*

$$x_j = \|\mathbf{A}\|^{-1} \overline{\mathbf{D}_j},$$

где

$$\mathbf{D}_j = \boldsymbol{det} \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_{j-1}^* \\ \alpha_n^* \\ \alpha_{j+1}^* \\ \\ \alpha_{n-1}^* \\ \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{j-1} & \alpha_n & \alpha_{j+1} & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

Здесь α_i *-* i *-й столбец матрицы* $\mathbf{A}$*,* α_i^* *-* i *-я строка матрицы* $\mathbf{A}^*$ *для всех* $i = \overline{1, n}$*,* β^* *-* n *- мерная вектор-строка сопряжённая к вектор-столбцу* β *свободных элементов.*

1.4. Выводы

1 В первом подразделе рассматривается определение некоммутативного определителя через необходимую и достаточную группу аксиом. Приводятся примеры определителей, которые удовлетворяют эти аксиомы, а именно определители Стаде и Дьедонне. Приведено представление обратной матрицы для оборотной квадратной матрицы над кольцом, представленное Й. С. Понизовским в рамках теории определителя Дьедонне.

2 Во втором подразделе вводятся определение и рассматриваются основные свойства квазидетерминантов Гельфанда-Ретаха. Рассматриваются полученные в рамках теории квазидетерминантов представление обратной матрицы и аналог правила Крамера для левой системы линейных уравнений над телом.

3 В третьем подразделе рассматриваются некоммутативные определители, определённые подобно коммутативному случаю, как альтернированная сумма произведений элементов матрицы, но фиксируя предварительно порядок элементов, а именно определители Кэли, Мура и Чена. Приводится проблема Дайсона, о полном и естественном обобщении для произвольных квадратных матриц над телом определителя Мура, введенного для эрмитовых матриц. Подается детерминантное представление обратной матрицы и аналог правила Крамера для систем линейных уравнений над телом кватернионов, полученные посредством определителя Чена.

4 Поскольку, ни один из представленных в этом разделе определителей не удовлетворяет свойство разложения Лапласа по любой строке или столбцу матрицы, то и определить алгебраическое дополнение элемента матрицы, а отсюда, и получить аналитическое представле-

ние классической присоединенной матрицы над некоммутативным кольцом в рамках теории любого из определённых выше определителей невозможно.

5 Чтобы получить детерминантное представление обратной матрицы над телом через аналог классической присоединенной матрицы, необходимо построить такой некоммутативный определитель, который, с одной стороны, удовлетворял бы свойство разложения по любой строке или столбцу матрицы и в то же время, как детерминантное отображение, удовлетворял бы аксиомы 1, 2, 3 определения 1.1.1.

РАЗДЕЛ 2
ТЕОРИЯ СТОЛБЦОВЫХ И СТРОЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ НАД ТЕЛОМ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

2.1. Определение основного тела

Определение 2.1.1. Отображение * кольца $\boldsymbol{K}$ в себя называется *инволюцией*, если $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$, $\left(x^*\right)^* = x$.

Пусть $\boldsymbol{F}$ - произвольное поле, $\boldsymbol{A}$ - векторное пространство ненулевой размерности над $\boldsymbol{F}$.

Определение 2.1.2. Отображение $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ называется *билинейной формой*, если для произвольных $x, x', y, y' \in \boldsymbol{A}$ и $\alpha \in \boldsymbol{F}$ выполняются следующие условия:

1) $\boldsymbol{f}(x + x', y) = \boldsymbol{f}(x, y) + \boldsymbol{f}(x', y)$;

2) $\boldsymbol{f}(x, y + y') = \boldsymbol{f}(x, y) + \boldsymbol{f}(x, y')$;

3) $\boldsymbol{f}(\alpha x, y) = \boldsymbol{f}(x, \alpha y) = \alpha \boldsymbol{f}(x, y)$.

Определение 2.1.3. Билинейная форма $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ называется *симметричной*, если $\boldsymbol{f}(x, y) = \boldsymbol{f}(y, x)$ для произвольных $x, y \in \boldsymbol{A}$.

Определение 2.1.4. Симметричная билинейная форма $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ называется *невырожденной*, если из того, что $\boldsymbol{f}(a, x) = 0$ для произвольного $a \in \mathrm{A}$ следует, что $a = 0$, и *вырожденной* в противном случае.

Определение 2.1.5. Отображение $\boldsymbol{n} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ называется *квадратичной* формой, если

1) $\boldsymbol{n}(\lambda x) = \lambda^2 \boldsymbol{n}(x)$, где $x \in \boldsymbol{A}$, $\lambda \in \boldsymbol{F}$

2) функция $\boldsymbol{f}(x, y) = \boldsymbol{n}(x + y) - \boldsymbol{n}(x) - \boldsymbol{n}(y)$ является билинейной формой на $\boldsymbol{A}$.

Определение 2.1.6. Квадратичная форма $\boldsymbol{n}(x)$ называется *невырожденной*, если невырождена соответствующая ей симметричная билинейная форма, и *вырожденной* в противном случае.

Определение 2.1.7. Алгебра $\boldsymbol{A}$ с единицей 1 над полем $\boldsymbol{F}$ характеристики, которая не равняется 2, называется *композиционной*, если на векторном пространстве $\boldsymbol{A}$ определена невырожденная квадратичная форма $\boldsymbol{n}(x):\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{F}$, которая удовлетворяет следующие два условий.

1) Она индуктирует невырожденную симметричную билинейную форму $\boldsymbol{n}(x,y):=\boldsymbol{n}(x+y)-\boldsymbol{n}(x)-\boldsymbol{n}(y)$, т.е. определяет изоморфизм $\boldsymbol{A}\tilde{\to}\boldsymbol{A}^{\vee}=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{F})$, где $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{F})$ - группа гомоморфизмов из $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{F}$.
2) Квадратичная форма $\boldsymbol{n}(x)$ допускает композицию
$$\boldsymbol{n}(x\cdot y)=\boldsymbol{n}(x)\boldsymbol{n}(y).$$

Определение 2.1.8. $\boldsymbol{F}$-алгебра $\boldsymbol{A}$ с единицей 1 называется *квадратичной* над $\boldsymbol{F}$, если каждый элемент $x\in\boldsymbol{A}$ удовлетворяет равенство

$$x^2-\boldsymbol{t}(x)x+\boldsymbol{n}(x)=0 \qquad (2.1)$$

где $\boldsymbol{t}(x)$ - линейная форма на $\boldsymbol{A}$ со значением в поле $\boldsymbol{F}$. Если $x\notin\boldsymbol{F}$, то равенство (2.1) однозначно определяет формы $\boldsymbol{t}(x)$ и $\boldsymbol{n}(x)$. При $\alpha\in\boldsymbol{F}$ положим по определению $\boldsymbol{t}(\alpha)=2\alpha$, $\boldsymbol{n}(\alpha)=\alpha^2$. Элементы $\boldsymbol{n}(x)$ и $\boldsymbol{t}(x)$ называют, соответственно, *нормой* и *следом* элемента x.

Утверждение 2.1.1. [7, 35] *Линейное отображение кольца* $\boldsymbol{A}$ $x\to\bar{x}=\boldsymbol{t}(x)-x$ *является инволюцией, которая оставляет неподвижными элементы поля* $\boldsymbol{F}$.

При этом элемент $\bar{x}\in\boldsymbol{A}$ будем называть *сопряжённым* к элементу $x\in\boldsymbol{A}$.

Определение 2.1.9. Алгебра $\boldsymbol{A}$ называется *альтернативной*, если для произвольных x, y со $\boldsymbol{A}$ справедливы равенства $x^2 y = x(xy)$, $yx^2 = (yx)x$.

Утверждение 2.1.2. [7, 58] *Произвольная композиционная алгебра* $\boldsymbol{A}$ *альтернативная и квадратичная.*

Правильными являются и обратные утверждения**.**

Утверждение 2.1.3. [7, 58] *Если* $\boldsymbol{A}$ *- альтернативная* $\boldsymbol{F}$*-алгебра с единицей 1 и инволюцией* $x \to \bar{x}$ *такой, что* $\boldsymbol{t}(x) \in \boldsymbol{F}$ *и* $\boldsymbol{n}(x) \in \boldsymbol{F}$*, то квадратичная форма* $\boldsymbol{n}(x)$ *удовлетворяет равенство (2.1).*

Утверждение 2.1.4. [7, 58] *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *простая квадратичная альтернативная* $\boldsymbol{F}$*-алгебра, которая содержит хотя бы три элемента. Тогда или* $\boldsymbol{A}$ *- композиционная алгебра, или* $\boldsymbol{A}$ *- некоторое поле характеристики 2.*

Определение 2.1.10. Композиционная алгебра $\boldsymbol{A}$ называется *расщепляемой*, если в ней выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\boldsymbol{n}(x) = 0$ для некоторого $x \neq 0$ из $\boldsymbol{A}$;
2) $xy = 0$ для некоторых $x \neq 0$ и $y \neq 0$ из $\boldsymbol{A}$;
3) $\boldsymbol{A}$ содержит нетривиальный идемпотент, т.е., такой элемент $e \neq 0,1$, который $e^2 = e$.

Поскольку, ассоциативная алгебра является альтернативной, то очевидным следствием утверждений 2.1.3, 2.1.4 и определения 2.1.10 есть следующее утверждение.

Утверждение 2.1.5. *Пусть тело* $\boldsymbol{S}$ *как ассоциативная алгебра с делением над своим центром* $\boldsymbol{F}$ *- полем нулевой характеристики владеет инволюцией* $x \to \bar{x}$ *такой, что* $\boldsymbol{t}(x) \in \boldsymbol{F}$ *и* $\boldsymbol{n}(x) \in \boldsymbol{F}$ *для всех* $x \in \boldsymbol{S}$*, тогда* $\boldsymbol{S}$ *является нерасщепляемой композиционной алгеброй.*

Главной в теории композиционных алгебр является теорема Гурвица.

Теорема 2.1.1. (Гурвица) *Конечномерная композиционная алгебра имеет размерности 1, 2, 4 или 8 над полем* $\boldsymbol{F}$.

Для описания всех композиционных алгебр воспользуемся процессом Кели-Диксона. Пусть $\boldsymbol{A}$ - алгебра над полем $\boldsymbol{F}$ с единицей 1 и инволюцией $a \to \overline{a}$ такой, что $a+\overline{a} \in \boldsymbol{F}$, $a \cdot \overline{a} \in \boldsymbol{F}$ для произвольного $a \in \boldsymbol{A}$. Зафиксируем $\alpha \in \boldsymbol{F}$, $\alpha \neq 0$, и определим на векторном пространстве $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}$ операцию умножения:

$$(a_1, a_2) \cdot (a_3, a_4) = \left(a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a_2}, \overline{a_1} a_4 + a_3 a_2\right).$$

Полученную алгебру $(\boldsymbol{A}, \alpha)$ называют *алгеброй, которая получается из алгебры* $\boldsymbol{A}$ *с помощью процесса Кели – Диксона.* Очевидно, что $\boldsymbol{A}$ изоморфно вкладывается в $(\boldsymbol{A}, \alpha)$ и $\boldsymbol{dim}\,(\boldsymbol{A}, \alpha) = 2\,\boldsymbol{dim}\,\boldsymbol{A}$. Пусть $v = (0, 1)$, тогда $v^2 = \alpha$ и $(\boldsymbol{A}, \alpha) = \boldsymbol{A} \oplus v\boldsymbol{A}$. Для произвольного элемента $x = a_1 + v a_2 \in (\boldsymbol{A}, \alpha)$ положим $\overline{x} = \overline{a_1} - v a_2$. Тогда $x + \overline{x} \in \boldsymbol{F}$ и $x \cdot \overline{x} \in \boldsymbol{F}$, и отображение $x \to \overline{x}$ являются инволюцией алгебры $(\boldsymbol{A}, \alpha)$, которая продолжает инволюцию $a \to \overline{a}$ алгебры $\boldsymbol{A}$. Если квадратичная форма $\boldsymbol{n}(a) = a \cdot \overline{a}$ невырожденная на $\boldsymbol{A}$, то квадратичная форма $\boldsymbol{n}(x) = x \cdot \overline{x}$ невырожденная на $(\boldsymbol{A}, \alpha)$; при этом форма $\boldsymbol{n}(x) = x \cdot \overline{x}$ допускает композицию тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{A}$ ассоциативная.

Таким образом, получим [7, 35, 36, 58, 67, 68, 90] следующие примеры композиционных алгебр над полем $\boldsymbol{F}$:

1. $\boldsymbol{F}$ **-** поле характеристики, которая не равняется 2.
2. $\boldsymbol{C}(\alpha) = (\boldsymbol{F}, \alpha)$, $\alpha \neq 0$. Если многочлен $x^2 - \alpha$ неприводимый над $\boldsymbol{F}$, тогда $\boldsymbol{C}(\alpha)$ - поле; в противоположном случае $\boldsymbol{C}(\alpha) \cong \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F}$.
3. $\boldsymbol{H}(\alpha, \beta) = (\boldsymbol{C}(\alpha), \beta)$, $\beta \neq 0$ - алгебре обобщенных кватернионов. Эта алгебра ассоциативная, но некоммутативная.

4. $\boldsymbol{O}(\alpha,\beta,\gamma)=(\boldsymbol{H}(\alpha,\beta),\gamma)$, $\gamma\neq 0$ - алгебре Кели - Диксона. Эта алгебра уже неассоциативная, поэтому на ней индуктивный процесс построения композиционных алгебр завершается.

Поскольку, в дальнейшем всюду в работе алгебра $\boldsymbol{A}$ рассматривается как тело $\boldsymbol{S}$ с инволюцией, а его центр $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{S})=\boldsymbol{F}$ - поле нулевой характеристики, то вследствие утверждения 2.1.5 получим следующие примеры композиционных алгебр.

1. Поле $\boldsymbol{F}$.
2. $\boldsymbol{C}(\alpha)=(\boldsymbol{F},\alpha)$, $\alpha\neq 0$, - алгебра, которая получается из алгебры $\boldsymbol{F}$ с помощью процесса Кели – Диксона, при условии, что многочлен $x^2-\alpha$ неприводимый над $\boldsymbol{F}$. Тогда $\boldsymbol{C}(\alpha)$ - поле.
3. $\boldsymbol{H}(\alpha,\beta)=(\boldsymbol{C}(\alpha),\beta)$, - алгебра обобщенных кватернионов или как принято в англоязычной литературе кватернионовая алгебра (the quaternion algebra), при условии, что $\beta\neq 0$, $\alpha\neq 0$ берутся такими, чтобы выполнялось условие ее нерасщепляемости. Эта алгебра ассоциативная, но некоммутативная. Будем обозначать ее $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$.

В общем, рассматриваемую $\boldsymbol{F}$-алгебру $\boldsymbol{S}$ можно определить как алгебру образованную генераторами i та j, которые связанны соотношениями:

$$i^2=\alpha\,,\ j^2=\beta\,,\ ij=k=-\alpha\beta\,.$$

И эта алгебра есть множество всех возможных выражений вида

$$x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k\ ,$$

где $\{x_0,x_1,x_2,x_3\}\subset\boldsymbol{F}$.

Если $\alpha = \beta = 0$, тогда $\boldsymbol{dim_F S} = 1$ и в каноническом базисе пространства $\boldsymbol{S}$, которое в этом случае совпадает с полем $\boldsymbol{F}$, форма $\boldsymbol{n}(x) = x_0^2$. Если $\alpha \neq 0$ и $\beta = 0$, тогда $\boldsymbol{dim_F S} = 2$ и норма $\boldsymbol{n}(x)$ в пространстве $\boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{C}(\alpha)$ принимает вид $\boldsymbol{n}(x) = x_0^2 - \alpha x_1^2$. Если $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, тогда $\boldsymbol{dim_F S} = 4$ и норма $\boldsymbol{n}(x)$ в пространстве $\boldsymbol{S} \cong \left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$, которое в этом случае является кватернионовой алгеброй, принимает вид

$$\boldsymbol{n}(x) = \left(x_0^2 - \alpha x_1^2\right) - \beta\left(x_2^2 - \alpha x_3^2\right) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2 .$$

Таким образом, единственным примером некоммутативной ассоциативной композиционной алгебры, которая рассматривается в работе, является кватернионовая алгебра (the quaternion algebra) с учетом условия ее нерасщепляемости. С другой стороны подтверждением этому есть следующая теорема.

Теорема 2.1.2. [72] *Кватернионовая алгебра является телом тогда и только, тогда когда ее квадратичная форма, - норма* $\boldsymbol{n}(x) : \left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right) \to \boldsymbol{F}$*, является невырожденной.*

Определение 2.1.11. Две квадратичные формы $q_1 : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{F}$ и $q_2 : \boldsymbol{V}_2 \to \boldsymbol{F}$ будем называть *изометрическими*, если существует изоморфизм $\gamma : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ такой, что $q_2(\gamma(x)) = q_1(x)$ для всех $x \in \boldsymbol{V}_1$. Отображение γ называется *изометрией*.

Теорема 2.1.3. [72] *Кватернионовые алгебры* $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$ *и* $\left(\frac{\alpha',\beta'}{\boldsymbol{F}}\right)$ *являются изоморфными тогда и только тогда, когда нормы в этих алгебрах являются изометрическими квадратичными формами.*

В зависимости от выбора поля $\boldsymbol{F}$ и элементов α и β на множестве всех кватернионовых алгебр являются возможными два случая [42, 43, 53, 71, 72, 87, 91, 92]:

1. $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$ есть алгеброй с делением.

2. $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$ является изоморфной $M_2\boldsymbol{F}$, алгебре всех 2×2 матриц над полем $\boldsymbol{F}$. В этом случае кватернионовая алгебра расщепляемая.

Рассмотрим некоторые примеры [72] кватернионовых алгебр в зависимости от выбора поля $\boldsymbol{F}$.

1. Пусть $\boldsymbol{C}$ - поле комплексных чисел. Тогда $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{C}}\right)$ является изоморфной $M_2\boldsymbol{C}$ для всех ненулевых $\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$. Таким образом, алгебра $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{C}}\right)$ - всегда расщепляемая.

2. Пусть $\boldsymbol{R}$ - поле действительных чисел. Алгебра $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{R}}\right)$ является изоморфной телу кватернионов $\boldsymbol{H}$, когда $\alpha<0$ и $\beta<0$. Иначе $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{R}}\right)$ - расщепляемая.

3. Пусть $\boldsymbol{F}_n$ - конечное поле, которое содержит n элементов. Алгебра $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}_n}\right)$ является всегда расщепляемой.

4. Пусть $\boldsymbol{Q}$ - поле рациональных чисел. Существует бесконечно много неизоморфных кватернионовых алгебр $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}}\right)$. При условии $\alpha<0$ и $\beta<0$, (но не только), эти алгебры являются телами.

5. Пусть $\boldsymbol{Q}_p$ - поле p-адических чисел, где p простое число. Для каждого простого числа p существует единственная кватернионовая алгебра $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}_p}\right)$, но только в случае $p=2$ эта алгебра является алгеброй с делением.
6. Пусть $\boldsymbol{K}$ - поле алгебраических чисел. Существует бесконечно много неизоморфных кватернионовых алгебр над полем $\boldsymbol{K}$. Среди них есть как расщепляемые алгебры, так и алгебры с делением.

Все полученные результаты диссертационной работы, кроме теоремы 3.5.2, являются справедливыми для всех обозначенных нерасщепляемых кватернионовых алгебр $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$. В теореме 3.5.2 требуется, чтобы поле $\boldsymbol{F}$ было максимальным упорядоченным полем. Поэтому, в частности, эта теорема не выполняется для $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}}\right)$, поскольку поле рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ вместе со своим произвольным элементом в общем не содержит и его квадратный корень.

2.2. Определение строчных и столбцовых определителей

Определение 2.2.1. Пусть S_n - симметричная группа на множестве $I_n=\{1,2,...,n\}$. Будем говорить, что подстановка $\sigma\in S_n$ *записана прямым произведением независимых циклов*, если ее запись в обычной двухрядной форме отвечает ее разложению в независимые циклы, т.е.,

$$\sigma = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1l_1} & n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2l_2} & \dots & n_{r1} & n_{r2} & \dots & n_{rl_r} \\ n_{12} & n_{13} & \dots & n_{11} & n_{22} & n_{23} & \dots & n_{21} & \dots & n_{r2} & n_{r3} & \dots & n_{r1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Определение 2.2.2. Будем говорить, что представление подстановки $\sigma \in S_n$ произведением независимых циклов является *упорядоченным слева*, если элементы, которые замыкают каждый из ее независимых циклов, записываются первыми слева в каждом из циклов. Это означает, что когда запись подстановки σ прямым произведением независимых циклов имеет вид (2.2), то ее упорядоченное слева разложение в независимые циклы записывается в виде

$$\sigma = (n_{11}n_{12}\dots n_{1l_1})(n_{21}n_{22}\dots n_{2l_2})\dots(n_{r1}n_{r2}\dots n_{rl_r}).$$

Определение 2.2.3. Будем говорить, что представление подстановки $\sigma \in S_n$ произведением независимых циклов является *упорядоченным справа*, если элементы, которые замыкают каждый из ее независимых циклов, записываются первыми справа в каждом из циклов, соответственно. Это означает, что когда запись подстановки σ прямым произведением независимых циклов имеет вид (2.2), то ее упорядоченное справа разложение в независимые циклы записывается в виде

$$\sigma = (n_{12}\dots n_{1l_1}n_{11})(n_{22}\dots n_{2l_2}n_{21})\dots(n_{r2}\dots n_{rl_r}n_{r1}).$$

Определение 2.2.4. *Строчным определителем по* i-й *строке* квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ над телом $\boldsymbol{S}$, (обозначим его $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для произвольного $i = \overline{1,n}$), будем называть альтернированную сумма $n!$ мономов, - всех возможных произведений элементов матрицы $\mathbf{A}$ взятых по одному с каждой строки и столбца, и упорядоченных таким образом, что подстановка $\sigma \in S_n$ индексов элементов каждого монома в обычной форме записана прямым произведением независимых циклов. И если подстановка чётная, то моном берется со знаком “плюс”, а если нечётная - то с “минус”. Таким образом,

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} .$$

Здесь S_n - симметричная группа на множестве $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ и упорядоченная слева нормальная форма подстановки σ имеет вид

$$\sigma = \left(i\, i_{k_1} i_{k_1+1} \ldots i_{k_1+l_1}\right)\left(i_{k_2} i_{k_2+1} \ldots i_{k_2+l_2}\right) \ldots \left(i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r}\right). \qquad (2.3)$$

При этом первый слева цикл начинает слева индексом i, а все следующие независимые циклы удовлетворяют условие:

$$i_{k_2} < i_{k_3} < \ldots < i_{k_r} ,\ i_{k_t} < i_{k_t+s} , ,. \qquad (2.4)$$

для всех $t = \overline{2,r}$ и $s = \overline{1,l_t}$.

Определение 2.2.5. Пусть $R_{i\,j}$ - сумма, которую получим, вынося из $(n-1)!$ соответствующих мономов строчного определителя $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ общий множитель $a_{i\,j}$, размещенный в каждом из них первым слева, и будем называть ее *правым алгебраическим дополнением элемента* $a_{i\,j}$. Тогда

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} \cdot R_{i\,j} \qquad (2.5)$$

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $\mathbf{A}^{ij}$ - подматрица матрицы $\mathbf{A}$, которую получим, вычеркнув ее i-ю строку и j-й столбец. Обозначим через $\mathbf{a}_{.j}$ - j-й столбец, а через $\mathbf{a}_{i.}$ - i-ю строку матрицы $\mathbf{A}$. И пусть $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b})$ - матрица, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$ заменой ее j-го столбца столбцом $\mathbf{b}$, а $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ - матрица, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$, заменив ее i-ю строку строкой $\mathbf{b}$.

В следующей лемме строчный определитель $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для всех $i=\overline{1,n}$ разлагается по элементам i-й строки, кроме того вычисление строчного определителя квадратной матрицы n-го порядка над телом $\boldsymbol{S}$ сводится к вычислению строчного определителя матрицы на порядок ниже.

Лемма 2.2.1. *Пусть R_{ij} - правое алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, тогда*

$$R_{ij}=\begin{cases} -\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}), & \text{если } i\neq j,\\ \boldsymbol{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii}, & \text{если } i=j,\end{cases}$$

где матрица $\mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i})$ получается с $\mathbf{A}$ последовательным применением замены ее j-го столбца i-м и вычёркивания i-х строки и столбца, $k=\boldsymbol{min}\{I_n\setminus\{i\}\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что $R_{ii}=\boldsymbol{rdet}_{\boldsymbol{k}}\,\mathbf{A}^{ii}$, где $k=\boldsymbol{min}\{I_n\setminus\{i\}\}$.

Если $i=1$, тогда $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}=a_{11}\cdot R_{11}+a_{12}\cdot R_{12}+\ldots+a_{1n}\cdot R_{1n}$. Рассмотрим те мономы определителя $\boldsymbol{rdet}_1\mathbf{A}$, которые начинаются слева множителем a_{11}, а именно

$$a_{11}\cdot R_{11}=$$

$$= \sum_{\tilde{\sigma}\in S_n} (-1)^{n-r} a_{11} \cdot a_{2 i_{k_2}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_2+l_2} 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}$$

где $\tilde{\sigma} = (1)(2\, i_{k_2} \ldots i_{k_2+l_2}) \ldots (i_{k_r}\, i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - подстановка из r независимых циклов для всех $r = \overline{2,n}$. Выносся общий множитель a_{11} слева по знак суммы, получим

$$a_{11} \cdot R_{11} =$$

$$= a_{11} \cdot \sum_{\tilde{\sigma}_1 \in S_{n-1}} (-1)^{n-1-(r-1)} a_{2 i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} 2} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

где $\tilde{\sigma}_1 = (2\, i_{k_2} \ldots i_{k_2+l_2}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - подстановки из $r-1$ независимых циклов. Здесь S_{n-1} симметричная группа на множестве $I_n \setminus \{1\}$. Количество множителей в каждом мономе суммы и количество независимых циклов уменьшились на единицу. Поскольку каждый моном начинается из элемента второй строки и среди его множителей отсутствуют элементы первой строки и первого столбца матрицы $\mathbf{A}$, то

$$\sum_{\tilde{\sigma}_1 \in S_{n-1}} (-1)^{n-1-(r-1)} a_{2 i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} 2} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \boldsymbol{rdet}_2\, \mathbf{A}^{11}.$$

Итак,

$$R_{11} = \boldsymbol{rdet}_2\, \mathbf{A}^{11}. \tag{2.6}$$

Пусть теперь $i \neq 1$, тогда

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = a_{i1} \cdot R_{i1} + a_{i2} \cdot R_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot R_{in}. \tag{2.7}$$

Рассмотрим те мономы определителя $\mathbf{rdet}_i\,\mathbf{A}$, которые начинаются слева множителем a_{ii}.

$$a_{ii}\cdot R_{ii}=\sum_{\breve{\sigma}\in S_n}(-1)^{n-r}a_{ii}\cdot a_{1i_{k_2}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_2+l_2}1}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}},$$

где $\breve{\sigma}=(i)(1i_{k_2}\ldots i_{k_2+l_2})\ldots(i_{k_r}i_{k_r+1}\ldots i_{k_r+l_r})$ - подстановки из r независимых циклов для всех $r=\overline{2,n}$.

Снова вынося общий множитель a_{ii} слева по знак суммы, получим

$$a_{ii}\cdot R_{ii}=a_{ii}\cdot\sum_{\breve{\sigma}_1\in\breve{S}_{n-1}}(-1)^{n-1-(r-1)}a_{1i_{k_2}}\ldots a_{i_{k_2+l_2}1}\ldots a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}},$$

где $\breve{\sigma}_1=(1i_{k_2}\ldots i_{k_2+l_2})\ldots(i_{k_r}i_{k_r+1}\ldots i_{k_r+l_r})$ - подстановки из $r-1$ независимых циклов. Здесь $\breve{S}_{n-1}$ - симметричная группа на множестве $I_n\setminus\{i\}$. Количество множителей в каждом мономе суммы и количество независимых циклов снова уменьшились на единицу. Каждый из мономов начинается из элемента первой строки, а среди его множителей отсутствуют элементы i-го строки и i-го столбца матрицы $\mathbf{A}$, поэтому

$$\sum_{\breve{\sigma}_1\in\breve{S}_{n-1}}(-1)^{n-1-(r-1)}a_{1i_{k_2}}\ldots a_{i_{k_2+l_2}1}\ldots a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}=\mathbf{rdet}_1\,\mathbf{A}^{ii}.$$

Итак,

$$R_{ii}=\mathbf{rdet}_1\,\mathbf{A}^{ii}. \tag{2.8}$$

Объединив выражения (2.6) и (2.8), получим $R_{ii} = \boldsymbol{rdet}_k\, \mathbf{A}^{ii}$, где $k = \boldsymbol{min}\{I_n \setminus \{i\}\}$.

Пусть теперь $i \neq j$. Докажем, что $R_{ij} = -\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i})$. Рассмотрим те мономы определителя $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$ в формуле (2.7), которые начинаются слева множителем a_{ij}, где $j \in I_n \setminus \{i\}$.

$$a_{ij} \cdot R_{ij} =$$

$$\sum_{\overline{\sigma} \in S_n} (-1)^{n-r} a_{ij} \cdot a_{j i_{k_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} =$$

$$= -a_{ij} \cdot \sum_{\overline{\sigma} \in S_n} (-1)^{n-r-1} a_{j i_{k_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

где $\overline{\sigma} = (i\, j\, i_{k_1} \ldots i_{k_1+l_1}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - подстановки из r независимых циклов для всех $r = \overline{1, n-1}$. Обозначим для всех $i_{k_1+l_1} \in I_n$

$$\tilde{a}_{i_{k_1+l_1} j} = a_{i_{k_1+l_1} i}, \tag{2.9}$$

тогда

$$a_{ij} \cdot R_{ij} =$$

$$= -a_{ij} \cdot \sum_{\overline{\sigma}_1 \in \tilde{S}_{n-1}} (-1)^{n-r-1} a_{j i_{k_1}} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{i_{k_1+l_1} j} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

где $\overline{\sigma}_1 = (j\, i_{k_1} \ldots i_{k_1+l_1}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - подстановка из r независимых циклов для всех $r = \overline{1, n-1}$. Количество множителей в каждом мономе суммы уменьшилась на единицу. Среди элементов подстановки $\overline{\sigma}_1$ каждого из мономов отсутствует индекс i. И эта подстановка в силу (2.9) удовлетворяет условия (2.3)-(2.4) для строчного определителя по

j-й строке матрицы $\mathbf{A}^{ii}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.\,i}\right)$, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$, сначала заменив ее j-и столбец i-м, а потом вычеркнув i-е строку и столбец. Т.е.,

$$\sum_{\overline{\sigma}_1\in\widetilde{S}_{n-1}}(-1)^{n-r-1}a_{j\,i_{k_1}}\ldots\widetilde{a}_{i_{k_1+l_1}\,j}\ldots a_{i_{k_r}\,i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}\,i_{k_r}}=\boldsymbol{rdet}_{\boldsymbol{j}}\,\mathbf{A}^{ii}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.\,i}\right)$$

Поэтому, $R_{ij}=-\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}^{ii}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\right)$, если $i\neq j$.

Лемма доказана.

Определение 2.2.6. *Столбцовым определителем по* j*-му столбцу* квадратной матрицы $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ над телом $\boldsymbol{S}$, (обозначим его $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}$ для произвольного $j=\overline{1,n}$), будем называть альтернированную сумму $n!$ мономов, - всех возможных произведений элементов матрицы $\mathbf{A}$ взятых по одному с каждой строки и столбца и упорядоченных таким образом, что подстановка $\tau\in S_n$ индексов элементов каждого монома в обычной форме записана прямым произведением независимых циклов. И если подстановка парная, то моном берется со знаком “плюс”, а если непарная - то с “минус”. Таким образом,

$$\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{n-r}a_{j_{k_r}\,j_{k_r+l_r}}\ldots a_{j_{k_r+1}\,j_{k_r}}\ldots a_{j\,j_{k_1+l_1}}\ldots a_{j_{k_1+1}\,j_{k_1}}a_{j_{k_1}\,j}\,.$$

Здесь S_n - симметричная группа на множестве $J_n=\{1,2,\ldots,n\}$ и упорядоченная справа нормальная форма подстановки τ имеет вид

$$\tau=\left(j_{k_r+l_r}\cdots j_{k_r+1}j_{k_{r1}}\right)\ldots\left(j_{k_2+l_2}\cdots j_{k_2+1}j_{k_2}\right)\left(j_{k_1+l_1}\cdots j_{k_1+1}j_{k_1}\,j\right).$$

При этом первый справа цикл начинается справа индексом j, а все следующие независимые циклы удовлетворяют условия:

$$j_{k_2} < j_{k_3} < \ldots < j_{k_r},\ j_{k_t} < j_{k_t+s}$$

для всех $t = \overline{2,r}$ и $s = \overline{1,l_t}$.

Определение 2.2.7. Пусть L_{ij} - сумма, которую получим, вынося направо из $(n-1)!$ соответствующих мономов столбцового определителя $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ общий множитель a_{ij}, размещенный в каждом из них первым справа, и будем называть ее *левым алгебраическим дополнением элемента* a_{ij}. Тогда,

$$\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij}. \tag{2.10}$$

Справедливой является следующая лемма, которая дает возможность раскладывать столбцовый определитель $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}$ по элементами j-й строки, а также вычислять столбцовый определитель квадратной матрицы n-го порядка над телом $\boldsymbol{S}$ через столбцовый определитель матрицы на порядок ниже.

Лемма 2.2.2. *Пусть* L_{ij} *- левое алгебраическое дополнение элемента* a_{ij} *матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *тогда*

$$L_{ij} = \begin{cases} -\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}^{jj}\left(\mathbf{a}_{j.}\right), & \textit{если}\ i \neq j, \\ \boldsymbol{cdet}_k\,\mathbf{A}^{jj}, & \textit{если}\ i = j, \end{cases}$$

где матрица $\mathbf{A}_{i.}^{jj}(\mathbf{a}_{j.})$ *получается из матрицы* $\mathbf{A}$ *последовательным применением замены ее* i*-й строки* j*-й и вычеркивания* j*-х строки и столбца,* $k = \boldsymbol{min}\{J_n \setminus \{j\}\}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.2.1 .

Замечание 2.2.1. Особенностью столбцовых определителей является то, что при непосредственном их вычислении множители каждого из мономов записываются справа налево.

Замечание 2.2.2. Очевидно, что каждому моному любого определённого выше столбцового или строчного определителя квадратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$ отвечает моном любого другого определителя, столбцового или строчного, этой же матрицы такой, что оба они имеют одинаковый знак и являются произведением таких же самых множителей, - элементов матрицы, а отличаются только порядком их размещения. И, если элементы матрицы коммутируют, тогда все столбцовые и строчные определители квадратной матрицы равны между собой.

$$\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{rdet}_n\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1\, \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{cdet}_n\, \mathbf{A}.$$

2.3. Алгебра матриц над телом. Свойства транспонированной и сопряжённой матриц

Для матриц над телом $\boldsymbol{S}$ по теми же правилами, что и для комплексных [6, 32-34, 38, 40], вводятся операции суммы и произведения матриц. Также обычным образом вводятся операции левого и правого произведения элемента тела на матрицу. Множество квадратных матриц n-го порядка над телом $\boldsymbol{S}$ образует некоммутативное кольцо $\boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ с единицей $\mathbf{I}$,

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix},$$

где $\{0,1\}\subset \boldsymbol{F}$.

Аналогично комплексному случаю [6, 32-34, 38, 40] вводятся также понятия транспонированной и сопряжённой матриц над телом $\boldsymbol{S}$ и находятся их основные свойства.

Определение 2.3.1. Пусть $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, где $a_{ij}\in \boldsymbol{S}$ для всех $i=\overline{1,n}$ и $j=\overline{1,m}$. *Транспонированной* к $\mathbf{A}$ назовем матрицу $\mathbf{A}^T=\left(a'_{ji}\right)_{m\times n}$, где $a'_{ji}=a_{ij}$.

Лемма 2.3.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *- произвольные матрицы над телом* $\boldsymbol{S}$*, тогда*

а) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$

б) Пусть $a\in \boldsymbol{S}$*, тогда* $(a\mathbf{A})^T=a\mathbf{A}^T$*,* $(\mathbf{A}a)^T=\mathbf{A}^T a$**.**

в) $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$.

Доказательство аналогично доказательству подобных свойств транспонированной матрицы над комплексным полем $\boldsymbol{C}$ [6, 32-32, 38, 40].

Определение 2.3.2. *Сопряжённой* к матрице $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, где $a_{ij}\in \boldsymbol{S}$, назовем матрицу $\mathbf{A}^*=\left(a^*_{ji}\right)_{m\times n}$, где $a^*_{ji}=\overline{a_{ji}}'=\overline{a_{ij}}=\boldsymbol{t}(a_{ij})-a_{ij}$ для всех $i=\overline{1,n}$ и $j=\overline{1,m}$.

Лемма 2.3.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *- произвольные матрицы над телом* $\boldsymbol{S}$*, тогда*

а) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^*=\mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$.

б) Пусть $b\in \mathbf{S}$*, тогда* $(b\mathbf{A})^*=\mathbf{A}^*\overline{b}$*,* $(\mathbf{A}b)^*=\overline{b}\mathbf{A}^*$.

в) Пусть $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times k}$, $\mathbf{B} = \left(b_{ij}\right)_{k\times n}$, *тогда* $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$.

г) Пусть $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, *тогда* $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.

Доказательство также аналогично доказательству подобных свойств сопряжённой матрицы над полем комплексных чисел [6, 32-32, 38, 40].

Замечание 2.3.1. Свойство произведения транспонированных матриц, а именно $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$, в случае матриц над телом вследствие некоммутативности элементов матриц в общем случае не имеет места.

Элементы алгебры матриц над телом кватернионов рассматривались во многих роботах, в частности в [46, 47, 52, 54, 60, 69, 70, 73, 88, 89, 93, 94, 95]

2.4. Общие свойства столбцовых и строчных определителей

Рассмотрим основные свойства столбцовых и строчных определителей произвольной квадратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$.

Теорема 2.4.1. *Если одна из строк (столбцов) матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *состоит из нулей, то любой строчный определитель и любой столбцовый определитель такой матрицы равняется нулю, то есть для всех* $i = \overline{1,n}$ *получим* $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = 0$ и $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = 0$.

Доказательство. Пусть все элементы некоторой k-й строки (k-го столбца) матрицы $\mathbf{A}$ равняются нулю для произвольного $k \in I_n$. Поскольку, в каждый из мономов любого столбцового или строчного определителя матрицы $\mathbf{A}$ входит множителем некоторый элемент k-й строки (k-го столбца), то каждый моном равняется нулю и, итак, все строчные и столбцовые определители также равняются нулю.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.2. *Если все элементы некоторой строки (столбца) матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *умножить на произвольный элемент* α *поля* $\boldsymbol{F}$, *то строчный определитель по любой строке и столбцовый определитель по любому столбцу матрицы* $\mathbf{A}$ *умножается на* α.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_{l.}(\alpha \mathbf{a}_{l.})$ - матрица, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$, умножив все элементы ее l-й строки, для некоторого $l \in I_n$, на произвольный элемент α поля $\boldsymbol{F}$. Поскольку, в каждый из мономов любого столбцового или строчного определителя матрицы $\mathbf{A}_{l.}(\alpha \mathbf{a}_{l.})$ входит множитель αa_{lk}, для некоторого $k \in J_n$, а элемент α поля $\boldsymbol{F}$ коммутирует, то можем его вынести по знак суммы. Поэтому для всех $i = \overline{1,n}$, получим

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{l.}(\alpha \mathbf{a}_{l.}) = \alpha \cdot \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} \cdot \alpha\,,$$

$$\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{l.}(\alpha \mathbf{a}_{l.}) = \alpha \cdot \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} \cdot \alpha\,.$$

Аналогично, рассматривается и случай, когда все элементы любого столбца матрицы $\mathbf{A}$ умножаются на произвольный элемент α поля $\boldsymbol{F}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.3. *Если* $\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.})$ *- матрица, которую получим из квадратной матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *умножив слева ее* i*-ю строку (для произвольного* $i \in I_n$*), на произвольный элемент* b *тела* $\boldsymbol{S}$, *тогда* $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.}) = b \cdot \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$

Доказательство. Пусть матрица $\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.})$ для произвольного $i \in I_n$ получается из матрицы $\mathbf{A}$, если все элементы ее i-й строки умножаются слева на произвольный элемент b тела $\boldsymbol{S}$, тогда

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r}\, b \cdot a_{i i_{k_1}} \cdot a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} =$$

$$= b \cdot \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r}\, a_{i i_{k_1}} \cdot a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} =$$

$$= b \cdot \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}\ .$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4.4. *Если* $\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j} \cdot b\right)$ *- матрица, которую получим из матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *умножив ее* j *-й столбец справа на произвольный элемент* b *тела* $\boldsymbol{S}$, *тогда* $\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j} \cdot b\right) = \boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A} \cdot b$ *для всех* $j = \overline{1,n}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4.3.

Теорема 2.4.5. *Если все элементы* i *-й строки матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *представляются в виде суммы двух слагаемых* $a_{ij} = b_j + c_j$, $\{b_j, c_j\} \subset \boldsymbol{S}$, *для всех* $j = \overline{1,n}$, *тогда строчный определитель по любой строке (столбцовый определитель по любому столбцу) матрицы* $\mathbf{A}$ *равняется сумме двух строчных определителей по этой же строке (столбцовых определителей по тому же столбцу) матриц, в которых все строки, кроме* i *-й, такие же как и в матрице* $\mathbf{A}$, *а* i *-я строка в одной матрице состоит из элементов* b_j, *а во второй - из элементов* c_j *для всех* $j = \overline{1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим строчный определитель матрицы $\mathbf{A}$ по произвольной l -й строке для некоторого $l \in I_n$. Каждый моном определителя $\boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A}$ вследствие дистрибутивности можно представить в виде:

$$a_{ll_1} \cdot a_{l_1 l_2} \cdot \ldots \cdot a_{i l_i} \cdot \ldots \cdot a_{l_{n-1} l_n} = a_{ll_1} \cdot a_{l_1 l_2} \cdot \ldots \cdot \left(b_{l_i} + c_{l_i}\right) \cdot \ldots \cdot a_{l_{n-1} l_n} =$$
$$= a_{ll_1} \cdot a_{l_1 l_2} \cdot \ldots \cdot b_{l_i} \cdot \ldots \cdot a_{l_{n-1} l_n} + a_{ll_1} \cdot a_{l_1 l_2} \cdot \ldots \cdot c_{l_i} \cdot \ldots \cdot a_{l_{n-1} l_n},$$

где $\{l, l_k\} \in I_n$ для всех $k = \overline{1,n}$. Собирая вместе первые слагаемые этих сумм (с теми же знаками, что и соответствующие мономы определителя $\boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A}$), получим строчный определитель по l -й строке матрицы, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ заменой ее i -й строки строкой

$\mathbf{b}=\left(b_1,\ldots,b_n\right)$. Соответственно, вторые слагаемые образуют определитель по l-й строке матрицы, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ заменой ее i -й строки строкой $\mathbf{c}=\left(c_1,\ldots,c_n\right)$.

Итак, для произвольного $l \in I_n$ имеем

$$\boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A}=\boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})+\boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{c}),$$

где $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)$, $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$.

Аналогично, можно доказать и для столбцового определителя по любому столбцу матрицы.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.6. *Если все элементы j-го столбца матрицы $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ представляются в виде суммы двух слагаемых, $a_{ij}=b_i+c_i, \{b_i, c_i\}\subset \boldsymbol{S}$ для всех $i=\overline{1,n}$, тогда строчный определитель по любой строке (столбцовый определитель по любому столбцу) матрицы $\mathbf{A}$ равняется сумме двух строчных определителей по той же строке (столбцовых определителей по тому же столбцу) матриц, в которых все столбцы, кроме j-го, такие же, как и в матрице $\mathbf{A}$, а j-й столбец в одной матрице состоит из элементов b_i, а во второй - из элементов c_i для всех $i=\overline{1,n}$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4.5.

Теорема 2.4.7. *Если матрица $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ - нижняя квазитреугольная*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(k)} & 0 \\ * & \mathbf{A}_2^{(n-k)} \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{A}_1^{(k)}$ *- матрица* k*-го порядка, а* $\mathbf{A}_2^{(n-k)}$ *- матрица* $(n-k)$*-го порядка. Тогда для всех* $i=\overline{1,k}$ *имеем равенство* $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}=\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_1^{(k)}\cdot\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}_2^{(n-k)}$.

Доказательство. Обозначим через $(i_1\ldots i_s)=:\sigma_1(i_1)$ - циклический множитель подстановки σ, в котором i_1 является первым слева элементом цикла, который замыкает его. Обозначим также произведение, индексы которых образуют циклический множитель $a_{i_1i_2}\cdot a_{i_2i_3}\cdot\ldots\cdot a_{i_si_1}=:\langle\sigma_1(i_1)\rangle$, тогда

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{n-r}\langle\sigma_1(i)\rangle\langle\sigma_2(s)\rangle\ldots\langle\sigma_r(t)\rangle,$$

где $\{i,s,\ldots,t\}\subset I_n$, r - количество циклов в мономе.

Обозначим через $L:=\{1,\ldots,k\}\subset I_n$, $M:=\{k+1,\ldots,n\}\subset I_n$ подмножества множества индексов I_n. По условию леммы $a_{lm}=0$ для всех $l\in L$ и $m\in M$. Из этого следует, что если пара индексов $l\,m$ именно в такой последовательности войдет в один из циклических множителей, то соответствующий моном строчного определителя $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ будет равняться нулю. В свою очередь, вхождение пары $m\,l$ в один из циклических множителей с необходимостью приводит к существованию последовательной пары l_1m_1, (где $l_1\in L$, $m_1\in M$), в этом же циклическом множителе, который снова приводит к вырожденности соответствующего монома.

Таким образом, индексы из множеств L и M каждого из невырожденных мономов строчного определителя $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ размещаются в разных циклических множителях и по определению 2.2.5, получим

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{n-r}\left\langle\sigma_1(i)\right\rangle\left\langle\sigma_2(l_1)\right\rangle\ldots\left\langle\sigma_t(l_{t-1})\right\rangle\times$$

$$\times\left\langle\sigma_{t+1}(k+1)\right\rangle\left\langle\sigma_{t+2}(m_1)\right\rangle\ldots\left\langle\sigma_r(m_{p-1})\right\rangle=$$

$$=\sum_{\sigma_1\in S_k}(-1)^{k-t}\left\langle\sigma_1(i)\right\rangle\cdot\left\langle\sigma_2(l_1)\right\rangle\cdot\ldots\cdot\left\langle\sigma_t(l_{t-1})\right\rangle\times$$

$$\times\sum_{\sigma_2\in\widetilde{S}_{n-k}}(-1)^{n-k-p}\left\langle\sigma_1(k+1)\right\rangle\cdot\left\langle\sigma_2(m_1)\right\rangle\cdot\ldots\cdot\left\langle\sigma_p(m_{p-1})\right\rangle,$$

где $\sigma_1(i)\cdot\sigma_2(l_1)\cdot\ldots\cdot\sigma_t(l_{t-1})\cdot\sigma_1(k+1)\cdot\sigma_2(m_1)\cdot\ldots\cdot\sigma_p(m_{p-1})=\sigma_1\cdot\sigma_2=\sigma$, $t+p=r$ и $l_1<\ldots<l_{t-1}\le k$, $k+1<m_1<\ldots<m_{p-1}\le n$. Здесь S_k - симметричная группа на множестве $\{1,\ldots,k\}$, а через $\widetilde{S}_{n-k}$ обозначим симметричную группу на множестве индексов $\{k+1,\ldots,n\}$. При этом

$$\sigma_1(i)\cdot\sigma_2(l_1)\cdot\ldots\cdot\sigma_t(l_{t-1})=\sigma_1\in S_k,$$

$$\sigma_1(k+1)\cdot\sigma_2(m_1)\cdot\ldots\cdot\sigma_p(m_{p-1})=\sigma_2\in\widetilde{S}_{n-k}.$$

Очевидно, что $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_1^{(k)}=\sum_{\sigma_1\in S_k}(-1)^{k-t}\left\langle\sigma_1(i)\right\rangle\cdot\left\langle\sigma_2(l_1)\right\rangle\cdot\ldots\cdot\left\langle\sigma_t(l_{t-1})\right\rangle$.

Положим $a_{k+\alpha\;k+\beta}=:\tilde{a}_{\alpha\beta}$, где $\tilde{a}_{\alpha\beta}$ - элементы квадратной матрицы $\mathbf{A}_2^{(n-k)}$ для всех $\alpha,\beta\in I_{n-k}=\{1,\ldots\backslash,n\text{-}k\}$. И обозначим $\sigma_1(k+1)=:\tilde{\sigma}_1(1)$, $\sigma_2(m_1)=:\tilde{\sigma}_2(m_1-k),\ldots,\sigma_p(m_{p-1})=:\tilde{\sigma}_p(m_{p-1}-k)$, где $\tilde{\sigma}_i(\gamma)$ - циклический множитель подстановки $\tilde{\sigma}$, которую образуют индексы монома строчного определителя $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}_2^{(n-k)}$ для произвольных $\gamma\in I_{n-k}$ и $i=\overline{1,p}$. Отсюда,

$$\sum_{\sigma_2\in\widetilde{S}_{n-k}}(-1)^{n-k-p}\left\langle\sigma_1(k+1)\right\rangle\cdot\left\langle\sigma_2(m_1)\right\rangle\cdot\ldots\cdot\left\langle\sigma_p(m_{p-1})\right\rangle=$$

$$= \sum_{\tilde{\sigma}\in S_{n-k}} (-1)^{n-k-p} \left\langle \tilde{\sigma}_1(1) \right\rangle \cdot \left\langle \tilde{\sigma}_2(m_1 - k) \right\rangle \cdot \ldots \cdot \left\langle \tilde{\sigma}_p\left(m_{p-1} - k\right) \right\rangle = \boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A}_2^{(n-k)}.$$

Здесь S_{n-k} симметричная группа на множестве $\{1,\ldots,n-k\}$.

Итак, $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_1^{(k)} \cdot \boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A}_2^{(n-k)}$ для всех $i = \overline{1,k}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.8. *Если матрица* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *- верхняя квазитреугольная*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(k)} & * \\ 0 & \mathbf{A}_2^{(n-k)} \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{A}_1^{(k)}$ *- матрица* k*-го порядка, а* $\mathbf{A}_2^{(n-k)}$ *- матрица* $n-k$*-го порядка, тогда* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1\, \mathbf{A}_2^{(n-k)} \cdot \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_1^{(k)}$ *для всех* $i = \overline{1,k}$.

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 2.4.7.

Теорема 2.4.9. *Если* $\mathbf{P}(i,j)$ **-** *матрица перестановок, которая получается из единичной матрицы* $\mathbf{I}$ *перестановкой ее произвольной* i*-й строки с ее* j*-й строкой и* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *тогда*

$$\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(i,j) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(i,j)\right) = \boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A},$$

$$\boldsymbol{cdet}_i\left(\mathbf{P}(i,j) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(i,j)\right) = \boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}.$$

Доказательство. По определению 2.2.4 для произвольного строчного определителя

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} \cdot a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}.$$

Матрица $\mathbf{P}(i,j)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^T(i,j)$ - это матрица, которая получается из квадратной матрицы $\mathbf{A}$ над телом $\boldsymbol{S}$ перестановкой ее i-й строки с ее j-й строкой и ее i-го столбца с ее j-м столбцом. Тогда по определению 2.2.4, получим,

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{P}(i,j)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^T(i,j)=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{n-r}a_{ji_{k_1}}a_{i_{k_1}i_{k_1+1}}\dots a_{i_{k_1+l_1}j}\dots a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\dots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}=\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}.$$

Аналогично, можно показать, что $\boldsymbol{cdet}_i\left(\mathbf{P}(i,j)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^T(i,j)\right)=\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}$, непосредственно используя в этом случае определение столбцового определителя 2.2.5.

Теорема доказана.

Теорема 2.4.10. *Если* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *и* $\mathbf{A}^*$ *- матрица сопряжённая с* $\mathbf{A}$*, тогда* $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}^*=\overline{\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}^*=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$. Рассмотрим произвольный моном d столбцового определителя $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}^*$ для некоторого $i=\overline{1,n}$. Поскольку, $b_{ij}=\overline{a_{ji}}$, то по определению следа элемента тела $\boldsymbol{S}$, получим,

$$d=(-1)^{n-r}b_{i_{k_r}i_{k_r+l_r}}\dots b_{i_{k_r+1}i_{k_r}}\dots b_{i_{k_2}i_{k_2+l_2}}\dots b_{i_{k_2+1}i_{k_2}}b_{i\,i_{k_1+l_1}}\dots b_{i_{k_1}i}=$$

$$=(-1)^{n-r}\overline{a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}}\dots\overline{a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}}\dots\overline{a_{i_{k_2+l_2}i_{k_2}}}\dots\overline{a_{i_{k_2}i_{k_2+1}}}\cdot\overline{a_{i_{k_1+l_1}i}}\dots\overline{a_{i\,i_{k_1}}}=$$

$$=(-1)^{n-r}\overline{a_{i\,i_{k_1}}\dots a_{i_{k_1+l_1}i}\,a_{i_{k_2}i_{k_2+1}}\dots a_{i_{k_2+l_2}i_{k_2}}\dots a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\dots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}}=$$

$$=\overline{d_1}.$$

Здесь d_1 является некоторым мономом строчного определителя $\mathbf{rdet}_i\,\mathbf{A}$. Поскольку, количество мономов определителя $\mathbf{cdet}_i\,\mathbf{A}^*$ совпадает с количеством мономов определителя $\mathbf{rdet}_i\,\mathbf{A}$, то каждому моному столбцового определителя $\mathbf{cdet}_i\,\mathbf{A}^*$ однозначно отвечает моном определителя $\mathbf{rdet}_i\,\mathbf{A}$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 2.4.1. Теоремы 2.4.5 и 2.4.6 утверждают, что все столбцовые и строчные определители произвольной квадратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$ удовлетворяют аксиому 3.

Замечание 2.4.2. В силу невыполнения для столбцовых и строчных определителей произвольной квадратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$ аксиомы 1 необходимой, согласно [49], для корректного определения некоммутативного определителя, а также так как эти матричные функционалы определены подобно определителю комплексной матрицы будем рассматривать их как *пред-определители*.

2.5. Определитель эрмитовой матрицы

Определение 2.5.1. Квадратную матрицу $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, где $a_{ij} \in \boldsymbol{S}$ для всех $i, j = \overline{1,n}$, назовем *эрмитовой*, если она совпадает со своей сопряжённой, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

Лемма 2.5.1. *Пусть T_n - сумма 2^n возможных произведений, каждый из n множителей которых является или $h_i \in \boldsymbol{S}$, или $\overline{h_i}$, $(\forall i = \overline{1,n})$, причём возрастание индекса i внутри каждого произведения сохраняется, т.е., $T_n = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \overline{h_1} \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \ldots + \overline{h_1} \cdot \overline{h_2} \cdot \ldots \cdot \overline{h_n}$. Тогда $T_n = \boldsymbol{t}(h_1)\,\boldsymbol{t}(h_2)\ldots \boldsymbol{t}(h_n)$.*

Доказательство. Количество 2^n слагаемых суммы определяется как число упорядоченных комбинаций из n элементов, каждый из которых может принимать два значения.

Доказательство проводим методом индукции по n.

1) Пусть $n=1$, тогда $T_1=\overline{h_1}+h_1=\boldsymbol{t}(h_1)$.

2) Пусть утверждение верно для $n-1$:

$$T_{n-1}=h_1\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_{n-1}+\overline{h_1}\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_{n-1}+\ldots+\overline{h_1}\cdot\overline{h_2}\cdot\ldots\cdot\overline{h_{n-1}}=$$
$$=\boldsymbol{t}(h_1)\boldsymbol{t}(h_2)\ldots\boldsymbol{t}(h_{n-1}).$$

3) Покажем, что оно справедливо и при n.

$$T_n=h_1\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_n+\overline{h_1}\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_n+\ldots+\overline{h_1}\cdot\overline{h_2}\cdot\ldots\cdot\overline{h_n}.$$

Сгруппируем слагаемые суммы T_n и вынесем справа общие множители $\overline{h_n}$ и h_n, тогда

$$T_n=T_{n-1}\cdot h_n+T_{n-1}\cdot\overline{h_n}=T_{n-1}\cdot\left(h_n+\overline{h_n}\right)=T_{n-1}\cdot\boldsymbol{t}(h_n)=$$
$$=\boldsymbol{t}(h_1)\cdot\boldsymbol{t}(h_2)\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{t}(h_{n-1})\cdot\boldsymbol{t}(h_n).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5.2. *Если* $\{f,g\}\subset\boldsymbol{S}$, *тогда* $\boldsymbol{t}(f\cdot g)=\boldsymbol{t}(g\cdot f)$.

Доказательство. Раскроем следы элементов согласно определению 2.1.2.

$$\boldsymbol{t}(f\cdot g)=\overline{f\cdot g}+f\cdot g=\overline{g}\cdot\overline{f}+f\cdot g=(\boldsymbol{t}(g)-g)\cdot(\boldsymbol{t}(f)-f)+f\cdot g=$$
$$=\boldsymbol{t}(g)\cdot\boldsymbol{t}(f)-f\cdot\boldsymbol{t}(g)-\boldsymbol{t}(f)\cdot g+f\cdot g+g\cdot f,$$

$$\boldsymbol{t}(g\cdot f)=\overline{g\cdot f}+g\cdot f=\overline{f}\cdot\overline{g}+g\cdot f=(\boldsymbol{t}(f)-f)\cdot(\boldsymbol{t}(g)-g)+g\cdot f=$$
$$=\boldsymbol{t}(g)\cdot\boldsymbol{t}(f)-\boldsymbol{t}(g)\cdot f-g\cdot\boldsymbol{t}(f)+f\cdot g+g\cdot f.$$

Очевидно, что $\boldsymbol{t}(f\cdot g)=\boldsymbol{t}(g\cdot f)$.

Лемма доказана.

Теорема 2.5.1. *Если* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *- эрмитовая матрица, тогда*

$$\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}=\ldots=\boldsymbol{rdet}_n\,\mathbf{A}=\boldsymbol{cdet}_1\,\mathbf{A}=\ldots=\boldsymbol{cdet}_n\,\mathbf{A}\in \boldsymbol{F}.$$

Доказательство. Заметим [34, 40], что у эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ над телом $\boldsymbol{S}$ элементы главной диагонали являются элементами поля, $a_{ii}\in \boldsymbol{F}$ для всех $i=\overline{1,n}$, а элементы симметричные относительно главной диагонали сопряжены, $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$ для всех $i,j=\overline{1,n}$.

Рассмотрим произвольный строчный определитель матрицы $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$. Разобьем множество мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ на два подмножества. К первому подмножеству отнесем те мономы, индексы множителей которых составляют подстановки, содержащие независимые циклы не больше второго порядка. Ко второму подмножеству отнесем те мономы, индексы множителей которых составляют подстановки, содержащие хотя бы один независимый цикл более, чем второго порядка.

Множители, индексы которых образуют циклы первого порядка - это элементы главной диагонали эрмитовой матрицы, а, по определению, они являются элементами поля $\boldsymbol{F}$. Элементы матрицы, индексы произведения которых образуют цикл второго порядка, сопряжены: $a_{i_k i_{k+1}}=\overline{a_{i_{k+1} i_k}}$, и их произведение равняется норме элемента тела, а потому принадлежит полю:

$$a_{i_k i_{k+1}} \cdot a_{i_{k+1} i_k} = \overline{a_{i_{k+1} i_k}} \cdot a_{i_{k+1} i_k} = \boldsymbol{n(} a_{i_{k+1} i_k} \boldsymbol{)} \in \boldsymbol{F} .$$

Таким образом, все мономы первого подмножества, как произведения элементов поля $\boldsymbol{F}$, принадлежат ему.

Рассмотрим теперь произвольный моном d второго подмножества. Пусть индексы его множителей составляют подстановку, которая содержит r независимых циклов и обозначим $i_{k_1} := i$, тогда

$$d = \boldsymbol{(}-1\boldsymbol{)}^{n-r} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i} a_{i_{k_2} i_{k_2+1}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots \times$$
$$\times a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \boldsymbol{(}-1\boldsymbol{)}^{n-r} h_1 h_2 \ldots h_m \ldots h_r \boldsymbol{,} \qquad (2.11)$$

где $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}$ для всех $s = \overline{1\boldsymbol{,}r}$ и $m \in \{1\boldsymbol{,}\ldots\boldsymbol{,}r\}$.

Очевидно, что если $l_s = 0$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s}} \in \boldsymbol{F}$, а когда $l_s = 1$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}} = \boldsymbol{n}(a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}) \in \boldsymbol{F}$. Если все $l_s = \overline{0,1}$ для произвольного $s = \overline{1\boldsymbol{,}r}$, то получим моном первого подмножества. Пусть хотя бы при некотором s выполняется неравенство $l_s \geq 2$. Тогда справедливо, что $\overline{h_s} = a_{i_{k_s} i_{k_s+l_s}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}}$. Действительно,

$$\overline{h_s} = \overline{a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}} = \overline{a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}} \ldots \overline{a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}} = a_{i_{k_s} i_{k_s+l_s}} \ldots a_{i_{k_s+1} i_{k_s}}$$

Индексы элементов матрицы **A** в мономе d образуют подстановку σ, которая согласно определению строчного определителя в обычной форме записана прямым произведением независимых циклов, а в нормальной форме - упорядочена слева. Обозначим через $\sigma_s\left(i_{k_s}\right) := \left(i_{k_s} i_{k_s+1} \ldots i_{k_s+l_s}\right)$ независимый цикл, который образуют индексы монома d и которому отвечает множитель h_s. Тогда $\sigma_s^{-1}\left(i_{k_s}\right)o = \left(i_{k_s} i_{k_s+l_s} \ldots i_{k_s+1}\right)$ - независимый цикл, обратный к $\sigma_s\left(i_{k_s}\right)$, и которому отвечает множитель $\overline{h_s}$. На множестве всех мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$, индексы которых образуют подстановки в обычной форме записанные прямым произведением независимых циклов $\sigma_s\left(i_{k_s}\right)$ или $\sigma_s^{-1}\left(i_{k_s}\right)$, сохраняя их последовательность по s от 1 к r, а в нормальной форме - упорядочены слева согласно формул (2.2)-(2.3), найдутся еще 2^{p-1} таких мономов, (где $p = r - \rho$, а - ρ количество циклов первого и второго порядка), что их сумма C_1, - этих мономов вместе с d, по лемме 2.5.1 равняется

$$C_1 = (-1)^{n-r}\,\alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1})\ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}) \in \boldsymbol{F},$$

где $\alpha \in \boldsymbol{F}$ - произведение множителей, индексы которых составляют подстановки первого и второго порядка, и $\nu_k \in \{1,\ldots,r\}$ для всех $k = \overline{1,p}$.

Таким образом, для произвольного монома второго подмножества определителя $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ среди других его мономов можем выбрать еще $2^p - 1$ таких, что их сумма вместе с выбранным мономом принадлежит полю $\boldsymbol{F}$, а потому и строчный определитель $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$, - как сумма всех мономов первого и второго подмножеств, также принимает значение в поле $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} \in \boldsymbol{F}$.

Докажем равенство между собой всех строчных определителей матрицы $\mathbf{A}$. Рассмотрим произвольный $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$ такой, что $j \neq i$ для произвольного $j = \overline{1,n}$. Снова разобьем множество мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$ на две подмножества по тому же правилу, что и для $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$.

Поскольку, мономы первого подмножества являются произведениями множителей – элементов поля, которые коммутируют, то каждому моному первого подмножества строчного определителя $\boldsymbol{rdet_i}\,\mathbf{A}$ отвечает равный ему моном первого подмножества строчного определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$.

Среди мономов второго подмножества определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$ таких, что индексы их множителей составляют подстановки с r независимыми циклами, можно найти один такой моном d_1, который состоит из тех же множителей что и d, но размещенных в другом порядке. Рассмотрим все возможные случаи размещения множителей в мономе d_1.

1. Если индексы его множителей составляют подстановку из таких же r независимых циклов, отличающуюся от подстановки монома d только порядком размещения циклов, тогда

$$d_1 = (-1)^{n-r}\alpha \cdot h_\mu \cdot \ldots \cdot h_\lambda,$$

где $\{\mu,\ldots,\lambda\} = \{\nu_1,\ldots,\nu_p\}$. Среди мономов второго подмножества определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$ найдутся еще $2^p - 1$ таких, что каждый из них является произведениями скалярного множителя $(-1)^{n-r}\alpha$ на все множители вида h_s или $\overline{h_s}$, где $s \in \{\mu,\ldots,\lambda\}$, и для суммы C_2, - этих мономов вместе с d_1, по лемме 2.5.1 получим

$$C_2 = (-1)^{n-r}\alpha\, \boldsymbol{t}(h_\mu)\ldots \boldsymbol{t}(h_\lambda) = (-1)^{n-r}\alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1})\ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}) = C_1.$$

2. Если индексы множителей монома d_1 составляют подстановку из тех же r независимых циклов, но отличающуюся от подстановки моно-

ма d не только порядком размещения циклов, но и тем, что индекс j содержится в середине некоторого цикла подстановки индексов монома d. Пусть $j \in \sigma_m(i_{k_m})$ и положим $j := i_{k_m+q}$, тогда моном d_1 можно записать в следующем виде

$$d_1 = (-1)^{n-r} a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \dots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \dots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}} \times$$

$$\times a_{i_{k_\mu} i_{k_\mu+1}} \dots a_{i_{k_\mu+l_\mu} i_{k_\mu}} \dots a_{i_{k_\lambda} i_{k_\lambda+1}} \dots a_{i_{k_\lambda+l_\lambda} i_{k_\lambda}} = (-1)^{n-r} \alpha\, \widetilde{h}_m\, h_\mu \dots h_\lambda, \quad (2.12)$$

где $\widetilde{h}_m = \langle \sigma_m(i_{k_m+q}) \rangle$ и $\{m, \mu, \dots, \lambda\} = \{\nu_1, \dots, \nu_r\}$.

Каждому множителю $h_\mu, \dots, h_\lambda$ монома d_1 из формулы (2.12), кроме $\widetilde{h}_m = \langle \sigma_m(i_{k_m+q}) \rangle = a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \dots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \dots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}}$, отвечает равный ему множитель из множества $h_{\nu_1}, \dots, h_{\nu_p}$ монома d из формулы (2.11). Пусть $x := a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \dots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}}$ та $y := a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \dots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}}$. Поскольку, по лемме 2.5.2 имеем равенство следов

$$\boldsymbol{t}(\widetilde{h}_m) = \boldsymbol{t}\left(a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \dots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} \cdot a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \dots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}}\right) = \boldsymbol{t}(x\mathrm{y}) =$$

$$= \boldsymbol{t}(y\mathrm{x}) = \boldsymbol{t}\left(a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \dots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}} a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \dots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}}\right) = \boldsymbol{t}(h_m),$$

тогда для суммы C_2 всех 2^p возможных мономов аналогично предыдущему случаю по лемме 2.5.1 получим

$$C_2 = (-1)^{n-r} \alpha\, \boldsymbol{t}(\widetilde{h}_m)\, \boldsymbol{t}(h_\mu) \dots \boldsymbol{t}(h_\lambda) =$$

$$= (-1)^{n-r}\ \alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1}) \dots \boldsymbol{t}(h_m) \dots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}) = C_1.$$

3. Если в отличие от случая 1 моном d_1 отличается от d не только порядком размещения циклов, но и тем, что индекс i не начинает один из циклов подстановки индексов его элементов, тогда применим лемму 2.5.2 к произведению элементов этого цикла. И, аналогично предыдущему, среди мономов второго подмножества определителя $\mathbf{rdet}_j\, \mathbf{A}$, обнаружатся 2^p таких, что их сумме по лемме 2.5.1 будет отвечать равная ей сумма 2^p соответствующих мономов определителя $\mathbf{rdet}_i\, \mathbf{A}$.

Очевидно, что к этому же выводу мы придем и при объединении двух предыдущих случаев, тогда лемму 2.5.2 применим дважды.

Итак, в любом случае каждой сумме 2^p соответствующих мономов второго подмножества определителя $\mathbf{rdet}_j\, \mathbf{A}$ отвечает равная ей сумма 2^p мономов определителя $\mathbf{rdet}_i\, \mathbf{A}$, где p - количество циклов более, чем второго порядка в каждом из мономов. Кроме того, значение такой суммы принадлежит полю $\boldsymbol{F}$.

Таким образом, $\mathbf{rdet}_i\, \mathbf{A} = \mathbf{rdet}_j\, \mathbf{A} \in \boldsymbol{F}$ для всех $i, j = \overline{1, n}$.

Докажем теперь равенство $\mathbf{cdet}_i\, \mathbf{A} = \mathbf{rdet}_i\, \mathbf{A}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Снова разобьем множество мономов определителя $\mathbf{cdet}_i\, \mathbf{A}$ на два подмножества по тому же правилу, что и для $\mathbf{rdet}_i\, \mathbf{A}$. Каждому моному первого подмножества определителя $\mathbf{cdet}_i\, \mathbf{A}$ отвечает такой моном определителя $\mathbf{rdet}_i\, \mathbf{A}$, что оба они, как произведения, отличаются только порядком размещения $n-k$ одинаковых множителей. Здесь k - количество циклов второго порядка. Цикл второго порядка отвечает произведению сопряжённых элементов, который равняется норме элемента. Поскольку множители мономов, как элементы поля $\boldsymbol{F}$, коммутируют, то эти мономы равны между собой.

Среди мономов второго подмножества определителя $\mathbf{cdet}_i\, \mathbf{A}$ таких, что индексы их множителей составляют подстановки с r независимыми циклами, можно найти один такой моном d_2, что он состоит из тех же множителей, что и моном d_2 из формулы (2.11), но их последовательность упорядочена справа согласно определению столбцового определителя.

Пусть ρ - количество циклов первого и второго порядка в подстановке индексов монома и $p = r - \rho$, также обозначим $i_{k_1} := i$, тогда

$$d_2 = (-1)^{n-r} a_{i_{k_r} i_{k_r + l_r}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_2} i_{k_2 + l_2}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} \times$$
$$\times a_{i i_{k_1 + l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1} i} = (-1)^{n-r} \alpha\, h_{\tau_p} \cdot \ldots \cdot h_{\tau_1}$$

где α - произведение множителей, индексы которых образуют подстановки первого и второго порядка. Тогда для всех $s = \overline{1, r}$ имеем

$$h_{\tau_s} = a_{i_{k_s} i_{k_s + l_s}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s + 1} i_{k_s}} = \overline{a_{i_{k_s} i_{k_s + 1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s + l_s} i_{k_s}}} = \overline{h_{\nu_s}}\,.$$

Среди мономов второго подмножества рассмотрим еще $2^p - 1$ мономов, которые имеют тот же знак, что и d_2, и каждый из которых является произведением скалярного множителя $(-1)^{n-r}\alpha$ на каждый из множителей h_{τ_s} или сопряжённого к нему $\overline{h_{\tau_s}}$ для всех $s = \overline{1, p}$, сохраняя их последовательность. Найдем по лемме 2.5.1 сумму C_3, - этих мономов вместе с мономом d_2, учитывая коммутативность следов элементов тела.

$$C_3 = (-1)^{n-r} \alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\tau_p}) \ldots \boldsymbol{t}(h_{\tau_1}) = (-1)^{n-r} \alpha\, \boldsymbol{t}(\overline{h_{\nu_p}}) \ldots \boldsymbol{t}(\overline{h_{\nu_1}}) =$$
$$= (-1)^{n-r} \alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1}) \ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}) = C_1\,.$$

Итак, каждой сумме 2^p мономов второго подмножества определителя $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}$ отвечает равная ей сумма 2^p мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$, и наоборот. И каждая такая сумма $C_3 \in \boldsymbol{F}$.

Таким образом, $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} \in \boldsymbol{F}$ для всех $i = \overline{1,n}$.

Теорема доказана.

Замечание 2.5.1. Поскольку, все столбцовые и строчные определители эрмитовой матрицы равны между собой, то для нее можем однозначно ввести понятие определителя матрицы, который будем раскрывать как строчный по любой строке, или как столбцовый по любому столбцу матрицы, $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} := \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}$ для всех $i = \overline{1,n}$, где $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ - произвольная эрмитовая матрица над телом $\boldsymbol{S}$.

Замечание 2.5.2. По лемме 2.2.1, раскрывая определитель $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}$ по некоторой k-й строке, получим

$$\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = -\sum_{\sigma \in S_n} a_{kj} \cdot \boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}^{kk}\left(\mathbf{a}_{.k}\right) + a_{kk} \cdot \boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A}^{kk}\,,\ l = \boldsymbol{min}\{I_n \setminus \{k\}\} \quad (2.13)$$

Сравнивая выражения (1.2) и (2.13) для эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ над телом кватернионов и учитывая, что оба они не зависят от индекса k, а также и l (поскольку, $\mathbf{A}^{kk}$ - эрмитовая), очевидно, что введенный определитель эрмитовой матрицы совпадает с определителем Мура и является его обобщением в ассоциативной композиционной алгебре $\boldsymbol{S}$. А множество всех строчных и столбцовых определителей произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией $\boldsymbol{S}$ является полным и естественным обобщением определителя Мура (введенного для эрмитовых матриц) на множестве квадратных матриц над телом $\boldsymbol{S}$.

2.6. Свойства строчных и столбцовых определителей эрмитовой матрицы над телом с инволюцией

Теорема 2.6.1. *Пусть* $\mathbf{P}(1,i)$ *- матрица перестановок, которая получается из единичной матрицы перестановкой ее* i*-й строки для некоторого* $i=\overline{2,n}$ *с ее первой строкой, и* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *- эрмитовая матрица над телом* $\boldsymbol{S}$. *Тогда* $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i)\cdot \mathbf{A}\right)=-\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$.

Доказательство. Матрица $\mathbf{P}(1,i)\cdot \mathbf{A}$ - это матрица, которая получается из эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ перестановкой ее i-й строки с ее первой строкой. Обозначим первую и i-ю строку матрицы $\mathbf{P}(1,i)\cdot \mathbf{A}$, соответственно как $\tilde{\mathbf{a}}_{1.}=\left(\tilde{a}_{11},\ldots,\tilde{a}_{1n}\right)$ и $\tilde{\mathbf{a}}_{i.}=\left(\tilde{a}_{i1},\ldots,\tilde{a}_{in}\right)$. Другие ее строки совпадают со строками матрицы $\mathbf{A}$.

Будем раскрывать определитель эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$, как строчный по первой строке. Рассмотрим произвольный моном d определителя $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}$. Пусть индексы его множителей составляют подстановку, которая в обычной форме записана прямым произведением r независимых циклов. Рассмотрим все возможные случаи размещения элемента ее i-й строки, как множителя, в мономе d.

1. Пусть элемент i-й строки расположен в мономе d так, что индекс i находится в том же цикле, что и индекс 1, т.е.,

$$d=(-1)^{n-r}a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s-1}i}\cdot a_{i\,i_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+1}1}\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_r,$$

где, для всех $k=\overline{2,r}$, h_k - произведения множителей, индексы которых образуют другие независимые циклы. Поскольку, по условию, $a_{1i_1}=\tilde{a}_{i\,i_1}$ для всех $i_1\in I_n$ и $a_{i\,i_s}=\tilde{a}_{1i_s}$ для всех $i_s\in I_n$, то среди мономов определителя $\mathbf{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A}\right)$ найдётся такой моном g, что выполняется равенство

$$g = (-1)^{n-r-1}\tilde{a}_{ii_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s-1}i}\cdot\tilde{a}_{1i_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+1}1}\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_r = -d.$$

Моном d противоположный моному g в силу того, что индексы монома g составляют подстановку, которая содержит $r+1$ независимый цикл, в то время как моном d содержит r независимых циклов.

2. Пусть теперь элемент i-й строки расположен в мономе d так, что его индекс i начинает независимый цикл, в который не входит индекс 1, т.е.,

$$d = (-1)^{n-r}a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k1}\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot a_{ii_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+m}i}\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p,$$

где для всех $\tau=\overline{1,\rho}$ и $t=\overline{1,p}$ таких, что $\rho+p=r-2$, u_τ и v_t - произведения множителей, индексы которых образуют, соответственно, ρ и p независимых циклов. Или такие произведения могут отсутствовать. Для d на множестве мономов определителя $\mathbf{rdet}_1\,\mathbf{A}$ существует следующий моном

$$d_1 = (-1)^{n-r}a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k1}\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot a_{ii_{s+m}}\cdot\ldots\cdot a_{i_si}\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p.$$

Обозначим $x := a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k1}$ и $y := a_{ii_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+m}i}$, тогда сопряжённый к y будет иметь вид $\overline{y} = a_{ii_{s+m}}\cdot\ldots\cdot a_{i_si}$. Рассмотрим сумму этих мономов:

$$d + d_1 = (-1)^{n-r}(x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot y + x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot\overline{y})\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p =$$

$$= (-1)^{n-r}\,\mathbf{t}(y)x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p =: C.$$

Среди мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A}\right)$ можно выбрать мономы g и g_1 такие, что отвечают мономам d и d_1, и индексы которых содержат $r-1$ независимый цикл.

$$g=(-1)^{n-r+1}\tilde{a}_{ii_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k1}\cdot\tilde{a}_{1i_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+m}i}\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p,$$

$$g_1=(-1)^{n-r+1}\tilde{a}_{ii_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k1}\cdot\tilde{a}_{1i_{s+m}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+1}i}\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p.$$

Найдем их сумму, учитывая, что $\tilde{a}_{ii_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k1}=a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k1}=x$, $\tilde{a}_{1i_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+m}i}=a_{ii_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+m}i}=y$, $\tilde{a}_{1i_{s+m}}\cdot\ldots\cdot a_{i_si}=a_{ii_{s+m}}\cdot\ldots\cdot a_{i_si}=\overline{y}$. Тогда получим

$$g+g_1=(-1)^{n-r+1}(x\cdot y+x\cdot\overline{y})\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=$$

$$=(-1)^{n-r+1}\boldsymbol{t}(y)x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=-C\,.$$

Итак, в этом случае сумме двух мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}$ отвечает противоположная к ней по знаку сумма двух соответствующих мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A}\right)$.

3. Пусть теперь элемент i-й строки размещенный в мономе d так, что его индекс i входят в иной независимый цикл, чем индекс 1, но не начинает его

$$d=(-1)^{n-r}a_{1i_1}\ldots a_{i_k1}u_1\ldots u_\rho a_{i_q\,i_{q+1}}\ldots a_{i_si}\,a_{i\,i_{s+1}}\ldots a_{i_{q-1}\,i_q}v_1\ldots v_p,$$

где для всех $\tau=\overline{1,\rho}$ и $t=\overline{1,p}$ таких, что $\rho+p=r-2$, u_τ и v_t - произведения множителей, индексы которых образуют ρ и p независимых циклов соответственно. Или такие произведения отсутствуют. Для d на множестве мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}$ найдём следующий моном

$$d_1 = (-1)^{n-r} a_{1i_1} \ldots a_{i_k 1} u_1 \ldots u_\rho a_{i_q\, i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1} i} a_{i\, i_s} \ldots a_{i_{q+1}\, i_q} v_1 \ldots v_p.$$

Снова обозначим $x := a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1}$, $\varphi := a_{i\, i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}\, i_q}$ и $\phi := a_{i_q\, i_{q+1}} \ldots a_{i_s i}$, $y := a_{i_q\, i_{q+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_s i}\, a_{i\, i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{q-1}\, i_q} = \phi\varphi$, тогда сопряжённый к y будет иметь вид $\overline{y} = a_{i_q\, i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1} i} a_{i\, i_s} \ldots a_{i_{q+1}\, i_q}$. Рассмотрим сумму этих мономов:

$$d + d_1 = (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y + x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y}) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =$$
$$= (-1)^{n-r}\, \boldsymbol{t}(y) x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =: C.$$

На множестве мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_i\big(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A}\big)$ снова можно выбрать мономы g и g_1, что отвечают мономам d и d_1, индексы которых содержат $r-1$ независимый цикл.

$$g = (-1)^{n-r+1} \tilde{a}_{ii_1} \ldots a_{i_k 1} \tilde{a}_{1i_s} \ldots a_{i_{q+1} i_q} a_{i_q\, i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1} i} u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p,$$
$$g_1 = (-1)^{n-r+1} \tilde{a}_{ii_1} \ldots a_{i_k 1} \tilde{a}_{1i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}\, i_q} a_{i_q\, i_{q+1}} \ldots a_{i_s\, i} u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p.$$

Кроме введенных выше обозначений, пусть $y_1 := \tilde{a}_{1i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}\, i_q} a_{i_q\, i_{q+1}} \ldots a_{i_s\, i}$, тогда $y_1 = \varphi \cdot \phi$. Поскольку $a_{1i_1} = \tilde{a}_{i\, i_1}$, $a_{i\, i_s} = \tilde{a}_{1 i_s}$, $a_{i\, i_s+1} = \tilde{a}_{1 i_s+1}$, тогда $\overline{y}_1 := \tilde{a}_{1i_s} \ldots a_{i_{q+1}\, i_q} a_{i_q\, i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1}\, i}$. Найдем сумму этих мономов

$$g+g_1=(-1)^{n-r+1}(x\cdot\overline{y_1}+x\cdot y_1)\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho v_1\cdot\ldots\cdot v_p=$$

$$=(-1)^{n-r+1}\boldsymbol{t}(y_1)x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=:C_1\,.$$

Поскольку, по лемме 2.5.2 $\boldsymbol{t}(y_1)=\boldsymbol{t}(\varphi\cdot\phi)=\boldsymbol{t}(\phi\cdot\varphi)=\boldsymbol{t}(y)$, то снова $C_1=-C$. Таким образом, возможны два случая: или произвольному моному определителя $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}$ отвечает противоположный к нему по знаку моном определителя $\boldsymbol{rdet}_i(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A})$, или паре мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}$ отвечает такая пара соответствующих мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_i(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A})$, что их суммы будут противоположны по знаку. Тогда и определители $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{rdet}_i(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A})$, как суммы таких мономов также отличаются только знаком.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.2. *Если* $\mathbf{P}(i,1)$ *- матрица перестановок и* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *- эрмитовая матрица, тогда* $\boldsymbol{cdet}_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}(i,1))=-\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$ *для всех* $i=\overline{2,n}$.

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 2.6.1.

Теорема 2.6.3. *Если матрица* $\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ *получается из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *заменой ее* j*-го строки -* i*-м строкой, тогда* $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})=0$ *для всех* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, что* $i\neq j$.

Доказательство. Будем считать, что эрмитовая матрица $\mathbf{A}$ имеет порядок выше третьего. Для эрмитовых матриц второго и третьего порядков утверждения теоремы легко получается непосредственной проверкой.

Рассмотрим произвольный моном d определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ для некоторых $i,j=\overline{1,n}$ таких, что $i\neq j$. Пусть индексы его множителей составляют подстановку, которая содержит r независимых циклов и обозначим $i_s := i$. Рассмотрим все возможные случаи размещения элемента i_s-й строки как множитель в мономе d.

1. Пусть элемент i_s-й строки расположен в мономе d так, что индекс i_s начинает независимый цикл

$$d = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{s+m} i_s} v_1 \dots v_p, \qquad (2.14)$$

где для всех $\tau = \overline{1,\rho}$ и $t = \overline{1,p}$ таких, что $\rho + p = r - 2$, u_τ и v_t - произведения множителей, индексы которых образуют, ρ и p независимых циклов соответственно. Или такие произведения могут отсутствовать. Для d среди мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ найдём еще три следующие мономы

$$d_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+m} i_s} \cdot a_{i_s i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$d_2 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1} i_s} \cdot a_{i_s i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$d_3 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1} i_s} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p.$$

Обозначим $a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} =: x$ и $a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{s+m} i_s} =: y$, тогда для сопряжённого к y получим $\overline{y} = a_{i_s i_{s+m}} \dots a_{i_{s+1} i_s}$. Учитывая, что по условию теоремы $a_{ji_1} = a_{i_s i_1}$, $a_{ji_{s-1}} = a_{i_s i_{s-1}}$, $a_{ji_{s+1}} = a_{i_s i_{s+1}}$, рассмотрим сумму этих мономов:

$$d + d_1 + d_2 + d_3 =$$

$$= (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y - y \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - \overline{y} \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho +$$

$$+ x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y}) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y -$$

$$- y \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - (\boldsymbol{t}(y) - y) \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \times$$

$$\times(\boldsymbol{t}(y)-y))\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=(-1)^{n-r}(x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot y-$$
$$-y\cdot x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho-\boldsymbol{t}(y)x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho+y\cdot x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho+$$
$$+\boldsymbol{t}(y)x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho-x\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot y)\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=0\,.$$

Итак, для монома d среди мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ обнаружились еще три таких, что их сумма вместе с d равняется нулю.

В случае, когда в формуле (2.14) $m=0$ или $m=1$, то, соответственно, получим мономы

$$\tilde{d}=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot a_{i_si_s}\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p\,,$$
$$\breve{d}=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot a_{i_si_{s+1}}\cdot a_{i_{s+1}i_s}\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p\,.$$

И для них на множестве мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ найдутся следующие мономы

$$\tilde{d}_1=(-1)^{n-r+1}a_{ji_s}\cdot a_{i_si_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p\,,$$
$$\breve{d}_1=(-1)^{n-r+1}a_{ji_{s+1}}\cdot a_{i_{s+1}i_s}\cdot a_{i_si_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p\,.$$

Учитывая, что $a_{ji_1}=a_{i_si_1}$, $a_{ji_s}=a_{i_si_s}$, $a_{ji_{s+1}}=a_{i_si_{s+1}}$ и то, что $a_{i_si_s}\in\boldsymbol{F}$, $a_{i_si_{s+1}}\cdot a_{i_{s+1}i_s}=\boldsymbol{n}(a_{i_si_{s+1}})\in\boldsymbol{F}$, получим

$$\tilde{d}+\tilde{d}_1=0,\qquad\qquad \breve{d}+\breve{d}_1=0.$$

Итак, в этом случае соответствующие пары мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ равняются нулю.

2. Пусть теперь элемент i_s-й строки расположен в мономе d так, что индекс i_s входит в другой независимый цикл, чем индекс j, но не начинает его

$$d = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{q-1} i_q} v_1 \dots v_p ,$$

где для всех $\tau = \overline{1,\rho}$ и $t = \overline{1,p}$ таких, что $\rho + p = r - 2$, u_τ и v_t - произведения множителей, индексы которых образуют, соответственно, ρ и p независимых циклов (или такие произведения отсутствуют). Среди мономов $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}$ снова можем выбрать еще три следующие

$$\widehat{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+1}} \dots a_{i_{q-1} i_q} a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_1} \dots a_{i_k j} \cdot u_1 \dots u_\rho v_1 \dots v_p ,$$

$$\widehat{d}_2 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s-1}} \dots a_{i_{q+1} i_q} a_{i_q i_{q-1}} \dots a_{i_{s+1} i_s} a_{i_s i_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho v_1 \dots v_p ,$$

$$\widehat{d}_3 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \dots a_{i_k j} u_1 \dots u_\rho a_{i_q i_{q-1}} \dots a_{i_{s+1} i_s} a_{i_s i_{s-1}} \dots \cdot a_{i_{q+1} i_q} v_1 \dots v_p .$$

Сделаем следующие обозначения. Пусть $a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} =: x$, $a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{q-1} i_q} =: y$, $a_{i_s i_{s+1}} \dots a_{i_{q-1} i_q} a_{i_q i_{q+1}} \dots a_{i_{s-1} i_s} =: y_1$, $a_{i_q i_{q+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s-1} i_s} =: \phi$, $a_{i_s i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{q-1} i_q} =: \varphi$, тогда $y = \phi \cdot \varphi$, $y_1 = \varphi \cdot \phi$ и $\overline{y} = a_{i_q i_{q-1}} \dots a_{i_{s+1} i_s} a_{i_s i_{s-1}} \dots a_{i_{q+1} i_q}$, $\overline{y_1} = a_{i_s i_{s-1}} \dots a_{i_{q+1} i_q} a_{i_q i_{q-1}} \dots a_{i_{s+1} i_s}$. Учитывая, что $a_{ji_1} = a_{i_s i_1}$, $a_{ji_{s-1}} = a_{i_s i_{s-1}}$, $a_{ji_{s+1}} = a_{i_s i_{s+1}}$, рассмотрим сумму:

$$d + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2 + \widehat{d}_3 =$$

$$= (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y - y_1 \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - \overline{y_1} \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho +$$

$$+ x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y}) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y -$$

$$-y_1 \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - (\boldsymbol{t}(y_1) - y_1) \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \times$$

$$\times (\boldsymbol{t}(y) - y)) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y - y_1 \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho -$$

$$-\boldsymbol{t}(y_1) x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + y_1 \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + \boldsymbol{t}(y) x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho -$$

$$-x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =$$

$$= (-1)^{n-r} (\boldsymbol{t}(\phi \cdot \varphi) - \boldsymbol{t}(\varphi \cdot \phi)) \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p \,\boldsymbol{.}$$

Поскольку, по лемме 2.5.2 $\boldsymbol{t}(\phi \cdot \varphi) = \boldsymbol{t}(\varphi \cdot \phi)$, то снова $d + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2 + \widehat{d}_3 = 0$.

3) Если же в выбранном мономе d индекс i_s находится в том же цикле, что и индекс j, то d, очевидно, совпадает с одним из следующих мономов: $d_1 \boldsymbol{,} \widetilde{d}_1 \boldsymbol{,} \breve{d}_1 \boldsymbol{,}$ или $\widehat{d}_1$. И как показано выше, для каждого из них на множестве мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ обнаружатся еще один или три таких ему соответствующие, что сумма этой пары или четверки мономов равняется нулю.

Поскольку, мы рассмотрели все возможные, в зависимости от размещения элемента i-й строки, типы монома d определителя $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ и для каждого из них обнаружился один или три таких соответствующих монома, что сумма этой пары или четверки мономов равняется нулю, тогда $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) = 0$ для некоторых $i, j = \overline{1,n}$ таких, что $i \neq j$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается и следующая теорема:

Теорема 2.6.4. *Если матрица* $\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j})$ *получается из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, *заменой ее* i*-го столбца -* j*-м столбцом, тогда* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j}) = 0$ *для всех* $i, j = \overline{1,n}$ *таких, что* $i \neq j$.

Следствие 2.6.1. *Если эрмитовая матрица* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *содержит две одинаковые строки (столбца), тогда* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = 0$.

Доказательство. Пусть у эрмитовой матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ ее i-я строка совпадает с ее j-й строкой, т.е., $a_{ik} = a_{jk}$ для всех $k \in I_n$ и $\{i,j\} \in I_n$, если $i \neq j$. Тогда $\overline{a_{ik}} = \overline{a_{jk}}$. А это означает, что $a_{ki} = a_{kj}$ для всех $k \in I_n$ и $\{i,j\} \in I_n$, когда $i \neq j$, поскольку матрица $\mathbf{A}$ - эрмитовая. Т.е., если у эрмитовой матрицы совпадают два ее строки, тогда также совпадают два ее соответствующие, - с теми же индексами, столбцы. Матрицу $\mathbf{A}$ можно представить также, как $\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$, - матрицу, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$ заменой ее j-й строки - i-й строкой. Тогда в силу теоремы 2.5. 3 и рассматривая определитель эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$, как строчный по j-й строке, получим $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) = 0$.

Следствие доказано.

Теорема 2.6.5. *Если* $\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{j.})$ *- матрица, которую получим из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *заменив ее* i*-ю строку ее* j*-й строкой умноженной слева на элемент* b *тела* $\boldsymbol{S}$, *тогда* $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{j.}) = 0$ *для всех* $i, j = \overline{1,n}$ *таких, что* $i \neq j$.

Доказательство. По теореме 2.4.3 для всех $i, j = \overline{1,n}$ таких, что $i \neq j$, получим $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{j.}) = b \cdot \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{j.})$ Но по теореме 2.6.3 $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{j.}) = 0$, как определитель по i-й строке матрицы $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{j.})$, которую получили с эрмитовой, заменив ее i-ю строку - j-й строкой.

Итак, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{j.}) = 0$.

Теорема доказана.

Теорема 2.6.6. *Если* $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)$ *- матрица, которую получим из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *заменив ее* i*-й столбец ее* j*-м столбцом умноженным справа на элемент* b *тела* $\boldsymbol{S}$, *тогда* $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)=0$ *для всех* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, что* $i\neq j$.

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 2.6.5, опираясь на теоремы 2.4.4 и 2.6.4.

Теорема 2.6.7. *Если* $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)$ *- матрица, которую получим из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *заменив ее* i*-й столбец ее* j*-м столбцом умноженным справа на элемент* b *тела* $\boldsymbol{S}$, *тогда* $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)=0$ *для всех* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, что* $i\neq j$.

Доказательство. Будем считать, что эрмитовая матрица $\mathbf{A}$ имеет порядок выше третьего. Для эрмитовых матриц второго и третьего порядков утверждения теоремы легко получается непосредственной проверкой.

Рассмотрим произвольный моном d определителя $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)$ для некоторых $i,j=\overline{1,n}$ таких, что $i\neq j$. Пусть индексы его множителей составляют подстановку, которая содержит r независимых циклов и обозначим $i_s:=i$. Рассмотрим все возможные случаи размещения элемента i_s-й строки, как множителя в мономе d.

1. Пусть элемент i_s-й строки расположены в мономе d так, что индекс i_s начинает независимый цикл

$$d=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\dots a_{i_kj}\,bu_1\dots u_\rho\, a_{i_si_{s+1}}\dots a_{i_{s+m}i_s}v_1\dots v_p, \qquad (2.15)$$

где для всех $\tau=\overline{1,\rho}$ и $t=\overline{1,p}$ таких, что $\rho+p=r-2$, u_τ и v_t - произведения множителей, индексы которых образуют, соответственно, ρ и p

независимых циклов (или такие произведения могут быть отсутствуют). Для d среди мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ обнаружатся еще три следующих монома

$$d_1 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1} i_s} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$d_2 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_s} \cdot a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{s+m} j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$d_3 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_s} \cdot a_{i_s i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1} j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p.$$

Обозначим $a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} =: x$ и $a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{s+m} i_s} =: y$, тогда сопряжённый к y имеет вид $\overline{y} = a_{i_s i_{s+m}} \ldots a_{i_{s+1} i_s}$. Учитывая, что по условию теоремы $a_{i_k j} = a_{i_k i_s}$, $a_{i_{s+m} j} = a_{i_{s+m} i_s}$, $a_{i_{s+1} j} = a_{i_{s+1} i_s}$, рассмотрим сумму этих мономов

$$d + d_1 + d_2 + d_3 =$$
$$= (-1)^{n-r} (x \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y + x \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y} - x \cdot y \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho -$$
$$- x \cdot \overline{y} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r} (x \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot (y + \overline{y}) -$$
$$- x \cdot (y + \overline{y}) \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r} (x \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \boldsymbol{t}(y) -$$
$$- x \cdot \boldsymbol{t}(y) \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = 0.$$

Таким образом, для монома d среди мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b)$ нашлись еще три таких, что их сумма вместе с d равняется нулю.

В случае, когда в формуле (2.15) $m = 0$ или $m = 1$, то, соответственно, получим мономы

$$\tilde{d} = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_s} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$\breve{d} = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_{s+1}} \cdot a_{i_{s+1} i_s} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p.$$

И для них на множестве мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b)$ найдём следующие мономы

$$\tilde{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_s} a_{i_s j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$\breve{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_s} \cdot a_{i_s i_{s+1}} \cdot a_{i_{s+1} j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

Учитывая, что $a_{i_k j} = a_{i_k i_s}$, $a_{i_s j} = a_{i_s i_s}$, $a_{i_{s+1} j} = a_{i_{s+1} i_s}$ и то, что $a_{i_s i_s} \in \boldsymbol{F}$, $a_{i_s i_{s+1}} a_{i_{s+1} i_s} = \boldsymbol{n}(a_{i_s i_{s+1}}) \in \boldsymbol{F}$, получим

$$\tilde{d} + \tilde{d}_1 = (-1)^{n-r} (a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_s} -$$
$$- a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_s} \cdot a_{i_s j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = 0,$$

$$\breve{d} + \breve{d}_1 = (-1)^{n-r} (a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \boldsymbol{n}(a_{i_s i_{s+1}}) -$$
$$- a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_s} \cdot \boldsymbol{n}(a_{i_s i_{s+1}}) \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = 0.$$

Итак, в этом случае соответствующие пары мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b)$ равняются нулю.

2. Пусть теперь элемент i_s-й строки расположены в мономе d так, что индекс i_s входит в другой независимый цикл, чем индекс j, но не начинает его

$$d = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \ldots a_{i_k j} b u_1 \ldots u_\rho a_{i_q i_{q+1}} \ldots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1} i_q} v_1 \ldots v_p,$$

где для всех $\tau = \overline{1,\rho}$ и $t = \overline{1,p}$ таких, что $\rho + p = r - 2$, u_τ и v_t - произведения множителей, индексы которых образуют, соответственно, ρ і p независимых циклов. Или такие произведения могут отсутствовать. Среди мономов $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i} \cdot b\right)$ снова можем выбрать еще три следующие

$$\widehat{d}_1 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \ldots a_{i_k j} b u_1 \ldots u_\rho a_{i_q i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1} i_s} a_{i_s i_{s-1}} \ldots a_{i_{q+1} i_q} v_1 \ldots v_p \;,$$

$$\widehat{d}_2 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \ldots a_{i_k i_s} a_{i_s i_{s-1}} \ldots \cdot a_{i_{q+1} i_q} a_{i_q i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1} j}\, b u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p \;,$$

$$\widehat{d}_3 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \ldots a_{i_k i_s} a_{i_s i_{s-1}} \ldots a_{i_{q+1} i_q} a_{i_q i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1} j}\, b u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p \;.$$

Обозначим $a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} =: x$, $a_{i_q i_{q+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s-1} i_s} =: \phi$, $a_{i_s i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{q-1} i_q} =: \varphi$, тогда сопряжённые к ним равняются $a_{i_s i_{s-1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{q+1} i_q} = \overline{\phi}$ и $a_{i_q i_{q-1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1} i_s} = \overline{\varphi}$. Учитывая, что по условию теоремы $a_{i_k j} = a_{i_k i_s}$, $a_{i_{s-1} j} = a_{i_{s-1} i_s}$, $a_{i_{s+1} j} = a_{i_{s+1} i_s}$, найдем сумму этих мономов

$$d + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2 + \widehat{d}_3 =$$

$$= (-1)^{n-r} (x b u_1 \ldots u_\rho \phi \varphi + x b u_1 \ldots u_\rho \overline{\varphi}\,\overline{\phi} -$$

$$- x \varphi \phi b u_1 \ldots u_\rho - x \overline{\phi}\,\overline{\varphi} b u_1 \ldots u_\rho) v_1 \ldots v_p =$$

$$= (-1)^{n-r} (x b u_1 \ldots u_\rho (\phi\varphi + \overline{\phi\varphi}) - x(\varphi\phi + \overline{\varphi\phi}) b u_1 \ldots u_\rho) v_1 \ldots v_p =$$

$$= (-1)^{n-r} (x b u_1 \ldots u_\rho\, \boldsymbol{t}(\phi\varphi) - x\, \boldsymbol{t}(\varphi\phi) b u_1 \ldots u_\rho) v_1 \ldots v_p \,.$$

Поскольку, по лемме 2.5.2 $\boldsymbol{t}(\phi \cdot \varphi) = \boldsymbol{t}(\varphi \cdot \phi) \in \boldsymbol{F}$, то снова $d + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2 + \widehat{d}_3 = 0$.

в) Если же в выбранном мономе d индекс i_s находится в том же цикле, что и индекс j, тогда d представляется в виде d_2 или d_3, $\widehat{d}_2$ или $\widehat{d}_3$, и или $\widetilde{d}_1$, или $\breve{d}_1$. И как показано выше, для каждого из них на множестве мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b)$ обнаружатся еще один или три таких ему соответствующие, что сумма такой пары или четверки мономов равняется нулю.

Поскольку, мы рассмотрели все возможные, в зависимости от размещения элемента i-й строки, типы монома d определителя $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b)$ и для каждого из них существует один или три таких соответствующих монома, что сумма этой пары или четверки мономов равняется нулю, тогда $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b) = 0$ для всех $i, j = \overline{1,n}$ таких, что $i \neq j$.

Теорема доказана.

Следствие 2.6.2. *Если матрица* $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i})$ *получается из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *заменой ее* i*-го столбца ее* j*-м столбцом, тогда* $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}) = 0$ *для всех* $i, j = \overline{1,n}$ *таких, что* $i \neq j$.

Доказательство следствия, очевидно, вытекает из теоремы 2.6.7, положив $b = 1$.

Теорема 2.6.8. *Если* $\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{j.})$ *- матрица, которую получим из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}$*, заменив ее* i*-ю строку* j*-й строкой умноженной слева на произвольный элемент* b *тела* $\boldsymbol{S}$*, тогда* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{j.}) = 0$ *для всех* $i, j = \overline{1,n}$ *таких, что* $i \neq j$.

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 2.6.7.

Следствие 2.6.3. *Если матрица* $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{j.})$ *получается из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *заменой ее* i*-й строки* j*-м строкой, тогда* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{j.}) = 0$ *для всех* $i, j = \overline{1,n}$ *таких, что* $i \neq j$.

Доказательство следствия, очевидно, следует из теоремы 2.6.8, положив $b=1$.

Лемма 2.6.1. *Если* $\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)$ *- матрица, которую получим из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$*, умножив справа ее* i*-й столбец на произвольный элемент* b *тела* $\boldsymbol{S}$*, тогда для произвольного* $i=\overline{1,n}$ *получим*

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)=\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}(b\cdot \mathbf{a}_{.i})=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\cdot b.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный моном d строчного определителя $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)$ для произвольного $i=\overline{1,n}$, где $\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.i}\cdot b)$ - матрица, которую получим из эрмитовой матрицы умножив ее i-й столбец справа на произвольный элемент b тела $\boldsymbol{S}$. Обозначим $i_{k_1}:=i$.

$$d=(-1)^{n-r}a_{i_{k_1}i_{k_1+1}}\ldots a_{i_{k_1+l_1}i_{k_1}}\,b\,a_{i_{k_2}i_{k_2+1}}\ldots a_{i_{k_2+l_2}i_{k_2}}\ldots\times$$
$$\times a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}=(-1)^{n-r}h_1\cdot b\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_r, \qquad (2.16)$$

где $h_s=a_{i_{k_s}i_{k_s+1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_s+l_s}i_{k_s}}$ для всех $s=\overline{1,r}$.

Если $l_s=1$, то $h_s=a_{i_{k_s}i_{k_s+1}}\cdot a_{i_{k_s+1}i_{k_s}}=\boldsymbol{n}(a_{i_{k_s}i_{k_s+1}})\in \boldsymbol{F}$, а если $l_s=0$, тогда $h_s=a_{i_{k_s}i_{k_s}}\in \boldsymbol{F}$. Пусть хотя бы при некотором s выполняется неравенство $l_s\geq 2$.

Индексы элементов матрицы $\mathbf{A}$ в мономе d образуют подстановку σ, которая согласно определению строчного определителя в обычной форме записана прямым произведением независимых циклов, а в нормальной форме является упорядоченной слева. Обозначим через $\sigma_s(i_{k_s}):=(i_{k_s}i_{k_s+1}\ldots i_{k_s+l_s})$ независимый цикл, который образуют индексы монома d и которому отвечает множитель h_s. Тогда $\sigma_s^{-1}\left(i_{k_s}\right)o=\left(i_{k_s} i_{k_s+l_s} \ldots i_{k_s+1}\right)$ - независимый цикл, обратный к $\sigma_s\left(i_{k_s}\right)$, и которому отвечает множитель $\overline{h_s}$. На множестве всех мономов определителя $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i} \cdot b\right)$, индексы которых образуют подстановки в обычной форме записанные прямым произведением независимых циклов $\sigma_s\left(i_{k_s}\right)$ или $\sigma_s^{-1}\left(i_{k_s}\right)$, сохраняя их последовательность по s от 1 к r, а в нормальной форме - упорядоченные слева согласно (2.2)-(2.3), найдутся еще 2^{p-1} таких мономов, (где $p=r-\rho$, а ρ – количество циклов первого и второго порядка), что их сумма C_1, - этих мономов вместе с d, по лемме 2.5.1 равняется:

$$C=(-1)^{n-r}\, b \cdot \alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1}) \ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}),$$

где $\alpha \in \boldsymbol{F}$ - произведение множителей, индексы которых составляют независимые циклы первого и второго порядка. Поскольку $\boldsymbol{t}(h_{\nu_k}) \in \boldsymbol{F}$ для всех $\nu_k \in \{1,\ldots,r\}$, и $k=\overline{1,p}$. Тогда все множители C, кроме b, являются элементами поля $\boldsymbol{F}$, а потому b коммутирует с ними. Поскольку это выполняется для произвольного d, то для $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i} \cdot b\right)$, как для суммы всех возможных мономов вида (2.16) выполняется равенство $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i} \cdot b\right)=\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} \cdot b=b \cdot \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}$.

Равенство $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(b \cdot \mathbf{a}_{.i}\right)=b \cdot \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}=b \cdot \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}$ очевидно справедливо в силу теоремы 2.4.3.

Лемма доказана.

Лемма 2.6.2. *Если* $\mathbf{A}_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{i.}\right)$ *- матрица, которую получим из эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$*, умножив слева ее* i*-ю строку на произ-*

вольный элемент b *тела* $\boldsymbol{S}$*, тогда для произвольного* $i=\overline{1,n}$ *получим* $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(b\cdot\mathbf{a}_{i.})=\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{a}_{i.}\cdot b)=b\cdot\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$

Доказательство аналогичное доказательству леммы 2.6.1.

Определение 2.6.1. Будем говорить, что i-я строка, $\mathbf{a}_{i.}=(a_{i1},\ldots,a_{in})$, матрицы $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ над телом $\boldsymbol{S}$ является *левой линейной комбинацией строк* $\mathbf{a}_{i_1.},\ldots,\mathbf{a}_{i_k.}$ с коэффициентами $c_1,\ldots,c_k$, где $i_k\in I_m$ и $c_l\in\boldsymbol{S}$ для произвольного $l=\overline{1,k}$, если $\mathbf{a}_{i.}=c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}$.

Теорема 2.6.9. *Если* i*-ю строку эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *заменить левой линейной комбинацией ее других строк, то строчный определитель по* i*-й строке и столбцовый определитель по* i*-му столбцу такой матрицы равняется нулю для произвольного* $i=\overline{1,n}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_{i.}(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.})$ - матрица, которую получим из эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$, заменив ее i-ю строку левой линейной комбинацией ее других строк, где $i_l\in I_n\setminus\{i\}$ для всех $l=\overline{1,k}$ таких, что $k<n$, тогда по теореме 2.4.4 для произвольного $i=\overline{1,n}$ выполняются равенства

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.})=$$
$$=\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.})+\ldots+\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}),$$

а также

$$\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.})=$$
$$=\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.})+\ldots+\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}).$$

Но по теореме 2.6.5 $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_l \cdot \mathbf{a}_{i_l.}\right) = 0$ и по теореме 2.6.8 $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_l \cdot \mathbf{a}_{i_l.}\right) = 0$ для всех $l = \overline{1,k}$ и для произвольного $i = \overline{1,n}$, тогда $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$ и $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$.

Теорема доказана.

Определение 2.6.2. Будем говорить, что j-й столбец $\mathbf{a}_{.j} = \left(a_{1j}, \ldots, a_{mj}\right)^T$ матрицы $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ над телом $\boldsymbol{S}$ является *правой линейной комбинацией столбцов* $\mathbf{a}_{.j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{.j_k}$ для всех $j_k \in J_n$ с коэффициентами $c_1, \ldots, c_k$, где $c_l \in \boldsymbol{S}$ для произвольного $l = \overline{1,k}$, если $\mathbf{a}_{.j} = \mathbf{a}_{.j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} \cdot c_k$.

Теорема 2.6.10. *Если все элементы j-го столбца эрмитовой матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ заменить правой линейной комбинацией ее других столбцов, то столбцовый определитель по j-му столбцу и строчный определитель по j-й строке такой матрицы равняется нулю для произвольного $j = \overline{1,n}$.*

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 2.6.9.

Следствие 2.6.4. *Если i-я строка (столбец) эрмитовой матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ для произвольного $i = \overline{1,n}$ является левой линейной комбинацией ее других строк (является правой линейной комбинацией ее других столбцов), тогда $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = 0$.*

Доказательство. Согласно с условием теоремы $\mathbf{a}_{i.} = c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}$, где $c_l \in \boldsymbol{S}$ для всех $l = \overline{1,k}$ таких, что $k < n$. Это означает, что для произвольного $j \in I_n$ выполняется равенство $a_{ij} = c_1 \cdot a_{i_1 j} + \ldots + c_k \cdot a_{i_k j}$, тогда в силу того, что матрица $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ - эрмитовая, $a_{ji} = \overline{a_{ij}} = \overline{a_{i_1 j}} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \overline{a_{i_k j}} \cdot \overline{c_k}$, т.е.,

$$\mathbf{a}_{.i} = \mathbf{a}_{.i_1} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \mathbf{a}_{i_k .} \cdot \overline{c_k} ,$$

где $c_l \in \boldsymbol{S}$ для всех $l = \overline{1,k}$ таких, что $k < n$. Таким образом, если у эрмитовой матрицы i-я строка является левой линейной комбинацией ее строк с индексами $i_1,\ldots,i_k$, то тогда ее i-й столбец является правой линейной комбинацией ее других столбцов с теми же индексами $i_1,\ldots,i_k$.

Матрицу $\mathbf{A}$ можно представить также, как $\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1 .} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k .}\right)$ - матрицу, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$ заменой ее i-й строки - левой линейной комбинацией ее строк с индексами $i_1,\ldots,i_k$, тогда по теореме 2.6.9, получим

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1 .} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k .}\right) =$$
$$= \boldsymbol{rdet}\,\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1 .} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k .}\right) = 0 .$$

Аналогично, если матрицу $\mathbf{A}$ рассматривать, как матрицу $\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i_1} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \mathbf{a}_{i_k .} \cdot \overline{c_k}\right)$, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$ заменой ее i-го столбца - правой линейной комбинацией ее столбцов с индексами $i_1,\ldots,i_k$, тогда по теореме 2.6.10 получим

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i_1} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \mathbf{a}_{i_k .} \cdot \overline{c_k}\right) =$$
$$= \boldsymbol{cdet}\,\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i_1} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \mathbf{a}_{i_k .} \cdot \overline{c_k}\right) = 0 .$$

Следствие доказано.

Теорема 2.6.11. *Если к i-й строке эрмитовой матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ прибавить произвольную левую линейную комбинацию ее других строк, то строчный определитель по i-й строке и столбцовый определитель* *по i-му столбцу такой матрицы равняются определителю эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}$ *(для произвольного* $i=\overline{1,n}$*).*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.}+c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right)$ - матрица, которую получим из эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$, прибавив к ее i-й строке левую линейную комбинацию ее других строк, где $c_l\in\boldsymbol{S}$ для всех $l=\overline{1,k}$ таких, что $k<n$, тогда по теореме 2.4.5 для произвольного $i=\overline{1,n}$

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.}+c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right)=$$
$$=\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}+\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right),$$

а также

$$\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.}+c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right)=$$
$$=\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}+\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right).$$

Поскольку, по теореме 2.6.9 $\boldsymbol{rdet}_i\,A_{i.}\left(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right)=0$ и $\boldsymbol{cdet}_i\,A_{i.}\left(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right)=0$, то для эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ получим

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.}+c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right)=\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A},$$
$$\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(c_1\cdot\mathbf{a}_{i_1.}+\ldots+c_k\cdot\mathbf{a}_{i_k.}\right)=\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.6.12. *Если ко всем элементам* j *-го столбца эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *прибавить произвольную правую линейную комбинацию ее других столбцов, то столбцовый определитель по* j*-му столбцу и строчный определитель по* j*-й строке такой матрицы равняется определителю эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}$ *(для произвольного* $j=\overline{1,n}$*).*

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 2.6.11, опираясь на теоремы 2.4.6 и 2.6.10.

2.7. Диагонализация эрмитовой матрицы

Теорема 2.7.1. *Если* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *- эрмитовая матрица и* $\mathbf{P}_{ij}(b)$ *- элементарная унимодулярная матрица, тогда* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{ij}(b) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{ij}^{*}(b)\right)$ *для всех* $i, j = \overline{1, n}$ *таких, что* $i \neq j$.

Доказательство. Сначала заметим, что для произвольной квадратной матрицы $\mathbf{U} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ и эрмитовой $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, матрица $\mathbf{U}^{*}\mathbf{AU}$ - эрмитовая. Действительно, из свойств сопряжённой матрицы по лемме 2.3.2 получим $\left(\mathbf{U}^{*}\mathbf{AU}\right)^{*} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{A}^{*}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{AU}$.

Умножение матрицы $\mathbf{A}$ слева на элементарную унимодулярную матрицу $\mathbf{P}_{ij}(b)$ равносильно прибавлению к i-й строке матрицы $\mathbf{A}$ ее j-й строки умноженной слева на $b \in \boldsymbol{S}$. Умножение матрицы $\mathbf{A}$ справа на матрицу $\mathbf{P}_{ij}^{*}(b)$, в свою очередь, равносильное прибавлению к i-му столбцу матрицы $\mathbf{A}$ ее j-го столбца умноженного справа на $\overline{b}$. Таким образом,

$$\mathbf{P}_{ij}(b) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{ij}^{*}(b) =$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1i} + a_{1j}\overline{b} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} + b a_{j1} & \dots & \left(b a_{jj} + a_{ij}\right)\overline{b} + b a_{ji} + a_{ii} & \dots & a_{in} + b a_{jn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{ni} + a_{nj}\overline{b} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i\text{-я} \\ \\ \\ \end{array} \\
i\text{-й} &
\end{array}$$

Тогда, в силу теорем 2.4.5 и 2.4.6, получим

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_{ij}^{*}(b)\right)=\boldsymbol{cdet}_i\left(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_{ij}^{*}(b)\right)=$$

$$=\boldsymbol{cdet}_i\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1}+ba_{j1} & \ldots & a_{ii}+ba_{ji} & \ldots & a_{in}+ba_{jn}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\\ i\text{-й}\end{array}+$$

$$+\boldsymbol{cdet}_i\begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j}\overline{b} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1}+ba_{j1} & \ldots & \left(ba_{jj}+a_{ij}\right)\overline{b} & \ldots & a_{in}+ba_{jn}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nj}\overline{b} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\\ i\text{-й}\end{array}=$$

$$=\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}+\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(b\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)+\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\cdot\overline{b}+$$

$$+\boldsymbol{cdet}_i\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ ba_{j1} & \ldots & ba_{jj} & \ldots & ba_{jn}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot b\,.$$

Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ba_{j1} & \dots & ba_{jj} & \dots & ba_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right)_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{j.}\right)$ получается из матрицы $\mathbf{A}$ последовательным применением замены ее i-го столбца ее j-м столбцом, а потом замены i-й строки полученной матрицы ее j-й строкой умноженной слева на элемент $b \in \boldsymbol{S}$. Таким образом, ее i-й строкой является $b \cdot \mathbf{a}_{j.}$, а ее j-м строкой есть строка $\mathbf{a}_{j.}$, поэтому по теореме 2.6.8 $\boldsymbol{cdet}_i\left(\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right)_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{j.}\right) = 0$. Кроме того, по теореме 2.6.4 $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right) = 0$ и по теореме 2.6.8 $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{j.}\right) = 0$.

Итак, $\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{ij}(b) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{ij}^*(b)\right) = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.7.2. *Если* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *- эрмитовая матрица и* $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ *- произвольная унимодулярная матрица, тогда*

$$\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = \boldsymbol{det}\left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^*\right). \tag{2.17}$$

Доказательство. Отметим, что для произвольной унимодулярной матицы $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ существует такой ряд $\exists\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m\} \subset \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ элементарных унимодулярных матриц $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}(b_k)$, т.е. существует такое натуральное число $m \in \boldsymbol{N}$, что для произвольного $k = \overline{1, m}$ существует элемент тела $b_k \in \boldsymbol{S}$, и существуют индексы $i \in I_n$, $j \in I_n$ при этом $i \neq j$, что $\mathbf{U} = \mathbf{P}_m \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1$. Тогда $\mathbf{U}^* = \mathbf{P}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_m^*$.

Докажем формулу (2.17) индукцией по m.

а) Случай $m = 1$ доказывает теорема 2.7.1.

б) Пусть теорема выполняется для $m-1$, т.е., $\mathbf{U}=\mathbf{P}_{m-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1$ и

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}=\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{m-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_1{}^{*}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_{m-1}{}^{*}\right)$$

Обозначим $\mathbf{P}_{m-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_1{}^{*}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_{m-1}{}^{*}:=\widetilde{\mathbf{A}}$, как следует из теоремы 2.7.1, матрица $\widetilde{\mathbf{A}}$ - эрмитовая.

в) Докажем теперь равенство (2.17) для случая m. Пусть $\mathbf{U}=\mathbf{P}_m\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1$, тогда в силу теоремы 2.7.1

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_m\mathbf{P}_{m-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_1{}^{*}\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_{m-1}{}^{*}\mathbf{P}_m^{*}\right)=\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_m\cdot\widetilde{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{P}_m^{*}\right)=\boldsymbol{det}\,\widetilde{\mathbf{A}}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}.$$

Теорема доказана.

Лемма 2.7.1. *Если* $\mathbf{U}\in\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$, *тогда* $\left\{\mathbf{U}^{-1},\mathbf{U}^{*}\right\}\in\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$.

Доказательство. Пусть произвольная унимодулярная матрица факторизируется следующим образом

$$\mathbf{U}=\prod_{k=1}^{m}\mathbf{P}_k\,,\tag{2.18}$$

где $\mathbf{P}_k=\mathbf{P}_{ij}(b_k)$ - элементарные унимодулярные матрицы. Т.е., существует такое $m\in\boldsymbol{N}$, что для всех $k=\overline{1,m}$ существуют элементы $b_k\in\boldsymbol{S}$ и индексы $i\in I_n$ и $j\in I_n$ такие, что $i\neq j$, для которых выполняется равенство (2.18). Тогда

$$\mathbf{P}_k^{-1}=\mathbf{P}_{ij}^{-1}(b_k)=\mathbf{P}_{ij}(-b_k)\in\boldsymbol{SL(}n,\boldsymbol{S)}\text{ и }\prod_{k=m}^{1}\mathbf{P}_k^{-1}=\mathbf{U}^{-1}\in\boldsymbol{SL(}n,\boldsymbol{S)},$$

$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_{ij}^*(b_k) = \mathbf{P}_{ji}(\overline{b_k}) \in \boldsymbol{SL(n,S)} \text{ i. } \prod_{k=m}^{1} \mathbf{P}_k^* = \mathbf{U}^* \in \boldsymbol{SL(n,S)}$$

Лемма доказана.

Определение 2.7.1. Будем говорить, что *эрмитовая матрица* $\mathbf{A}$ *унимодулярно подобная эрмитовой матрице* $\mathbf{B}$, если существует такая унимодулярная матрица $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{S})$, что $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^*$.

Отношение “эрмитовая матрица $\mathbf{A}$ унимодулярно подобная эрмитовой матрице $\mathbf{B}$” будем обозначать: $\mathbf{A} \ \tilde{*}\ \mathbf{B}$.

Теорема 2.7.3. *Отношение унимодулярного подобия эрмитовых матриц является отношениям эквивалентности, а именно оно*

а) рефлексивное: $\mathbf{A} \ \tilde{*}\ \mathbf{A}$*;*

б) симметричное: $\mathbf{A} \ \tilde{*}\ \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B} \ \tilde{*}\ \mathbf{A}$*;*

в) транзитивное: $(\mathbf{A} \ \tilde{*}\ \mathbf{B},\ \mathbf{B} \ \tilde{*}\ \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{A} \ \tilde{*}\ \mathbf{C}$.

Доказательство. Пункт а) теоремы доказан теоремой 2.7.2.

Докажем пункт б). Пусть $\mathbf{A} \ \tilde{*}\ \mathbf{B}$. Это означает, что существует такая унимодулярная матрица $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{S})$, что $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^*$. Умножив это равенство слева на $\mathbf{U}^{-1}$ и справа на $(\mathbf{U}^*)^{-1}$, получим $\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{U}^*)^{-1}$. Поскольку, в силу леммы 2.7.1, $\mathbf{U}^{-1} \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{S})$ и $(\mathbf{U}^*)^{-1} \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{S})$, то утверждение пункта б) доказано.

Докажем пункт в). Поскольку, $\mathbf{A} \ \tilde{*}\ \mathbf{B}$ означает существование унимодулярной матрицы $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{S})$ такой, что $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^*$, а с $\mathbf{B} \ \tilde{*}\ \mathbf{C}$ вытекает существование $\mathbf{V} \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{S})$ такой, что $\mathbf{B} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}^*$. Тогда, умножив последнее равенство слева на матрицу $\mathbf{U}$ и справа на $\mathbf{U}^*$, получим

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^* = \mathbf{UV} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{UV} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{UV})^*, \tag{2.19}$$

Понятно, что матрица $\mathbf{UV} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, поэтому равенство (2.19) доказывает пункт в).

Теорема доказана.

Теорема 2.7.4. *Если* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *- эрмитовая матрица, тогда* $\mathbf{A}$ *унимодулярно подобная некоторой диагональной матрице с элементами поля* $\boldsymbol{F}$ *на главной диагонали, т.е., существует такая унимодулярная матрица* $\exists \mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, *что* $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^* = \boldsymbol{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, *где* $\boldsymbol{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *- диагональная матрица с элементами* $\mu_i \in \boldsymbol{F}$ *для всех* $i = \overline{1, n}$ *на главной диагонали. При этом* $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n$.

Доказательство. Рассмотрим первый столбец матрицы $\mathbf{A}$. Возможны следующие случаи:

1. Пусть $a_{11} \neq 0$, тогда положим $\mu_1 = a_{11} \in \boldsymbol{F}$. Умножая последовательно матрицу $\mathbf{A}$ слева на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}_{i1}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ для всех $i = \overline{2, n}$ получим матрицу, в которой все элементы первого столбца, кроме диагонального, нулевые.

Поскольку, $\overline{-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}} = -\dfrac{a_{1i}}{\mu_1}$, то $\mathbf{P}_{i1}^*\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right) = \mathbf{P}_{1i}\left(-\dfrac{a_{1i}}{\mu_1}\right)$. Умножая последовательно матрицу $\mathbf{A}$ справа на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}_{i1}^*\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ для всех $i = \overline{2, n}$ получим нулевыми все элементы первой строки, кроме диагонального. При этом, учитывая теорему 2.7.1, матрица $\mathbf{P}_{i1}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{i1}^*\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ остается эрмитовой.

2. Пусть $a_{11} = 0$ и существует такой индекс $i \in I_n$, что $a_{i1} \neq 0$. Тогда, умножив матрицу $\mathbf{A}$ слева на элементарную унимодулярную матрицу

$\mathbf{P}_{1i}(a_{1i})$ и справа на $\mathbf{P}_{i1}(a_{i1})$, получим матрицу $\widetilde{\mathbf{A}}$ с элементом $\widetilde{a}_{11} = \boldsymbol{n(}a_{i1}\boldsymbol{)}(2 + a_{ii}) \in \boldsymbol{F}$. Положим $\mu_1 = \widetilde{a}_{11}$. Тогда, снова умножая последовательно матрицу $\mathbf{A}$ слева на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}_{i1}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ и справа на матрицы $\mathbf{P}^*_{i1}\left(-\dfrac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ для всех $i = \overline{2,n}$, получим матрицу, в которой все элементы первой строки и столбца, кроме диагонального, являются нолями.

3. Пусть $a_{i1} = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, тогда положим $\mu_1 = a_{11}$.

Проведя описанную процедуру для каждого диагонального элемента и элементов соответствующих строк и столбцов, через конечное количество операций умножений эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$ слева на элементарные унимодулярные матрицы $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}(b_k)$ и справа на $\mathbf{P}^*_k = \mathbf{P}_{ij}(\overline{b_k})$ построим диагональную матрицу с элементами главной диагонали $\mu_i \in \boldsymbol{F}$ для всех $i = \overline{1,n}$. Положим $\mathbf{U} = \prod_k \mathbf{P}_k$, тогда по теореме 2.7.2

$$\boldsymbol{det(}\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^* \boldsymbol{)} = \boldsymbol{det\,(diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)\boldsymbol{)} = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n .$$

Теорема доказана.

Замечание 2.7.1. Аксиома 2 для определителя эрмитовой матрицы выполняется только для коммутирующих эрмитовых матриц, поскольку произведение эрмитовых матриц является эрмитовой матрицей только, когда множители коммутируют. Действительно, из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, где $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$ вытекает $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^* = \mathbf{BA} = \mathbf{AB}$, тогда

$$\begin{aligned}\boldsymbol{det}(\mathbf{AB}) &= \boldsymbol{det}\left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^*\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}^*\right) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)\boldsymbol{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_n)) = \\ &= \mu_1 \cdot \eta_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n \cdot \eta_n = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n \cdot \eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_n = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{det}\,\mathbf{B}.\end{aligned}$$

2.8. Выводы.

1. В первом подразделе показано, что основным телом над которым рассматривается объект исследований, – алгебра матриц, есть тело с инволюцией, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над полем нулевой характеристики. Единственным примером ассоциативной некоммутативной композиционной нерасщепляемой алгебры есть кватернионовая алгебра с делением.
2. Во втором подразделе вводятся новые понятия столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом. Показано, что каждый из них удовлетворяет свойство разложения Лапласа по соответствующей строке или столбцу. А в целом множество всех строчных и столбцовых определителей разрешает провести разложение по любой строке (2.5) или столбцу (2.10). Доказаны леммы, которые раскрывают левые и правые алгебраические дополнения.
3. В третьем подразделе вводятся основные понятия алгебры матриц над телом. Рассматриваются свойства сопряжённой и транспонированной матриц.
4. В четвертом подразделе исследуются свойства строчных и столбцовых определителей произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией. В частности, показано, что эти определители, как матричные функционалы, являются аддитивными по любой строке или столбцу, т.е., удовлетворяют аксиому 3^*, а также аксиому 3. В тот же время, в целом они не удовлетворяют ни аксиому 2, ни ключевую для определения определителя аксиому 1. Поэтому для произвольной квадратной матрицы над ассоциатив-

ной композиционной нерасщепляемой алгеброй введенные матричные функционалы еще не являются определителями в полном смысле.

5. В пятом подразделе доказано равенство между собой всех столбцовых и строчных определителей эрмитовой матрицы над телом с инволюцией и доказано, что свое значение они принимают в поле – центре данного тела. Это значение, в силу его однозначности, принимается как определитель эрмитовой матрицы. Показано, что для эрмитовой матрицы над телом этот определитель совпадает с определителем Мура, а всё множество столбцовых и строчных определителей является его полным и естественным обобщениям для произвольных квадратных матриц над телом с инволюцией.
6. В шестом подразделе исследуются свойства определителя эрмитовой матрицы, выраженные через её столбцовые и строчные определителей.
7. В седьмом подразделе вводится понятие унимодулярного подобия эрмитовых матриц над телом. Доказано, что это подобие является отношением эквивалентности для эрмитовых матриц. Доказано, что любая эрмитовая матрица над телом с инволюцией унимодулярно подобна диагональной матрице, элементы которой принадлежат полю. Показано, что при определенных условиях определитель эрмитовой матрицы удовлетворяет аксиому 2.

Основные результаты раздела изложены в роботах [9-11, 14, 15].

РАЗДЕЛ 3
АНАЛОГ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАТРИЦЫ НАД ТЕЛОМ

3.1. Классическая присоединенная матрица для эрмитовой над телом

Определение 3.1.1. Пусть $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Матрица $(L\mathbf{A})^{-1}$ называется *левой обратной* к матрице $\mathbf{A}$, если $(L\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Определение 3.1.2. Пусть $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Матрица $(R\mathbf{A})^{-1}$называется *правой обратной* к матрице $\mathbf{A}$, если $\mathbf{A} \cdot (R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}$.

Определение 3.1.3. Эрмитовую матрицу над телом $\boldsymbol{S}$ будем называть *невырожденной*, если ее определитель не равняется нулю, и *вырожденной* в противоположном случае.

Теорема 3.1.1. *Для эрмитовой невырожденной матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ существует единая правая обратная матрица $(R\mathbf{A})^{-1}$ и единая левая обратная матрица $(L\mathbf{A})^{-1}$, и они равны между собой, $(R\mathbf{A})^{-1} = (L\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$. При этом*

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{n1} \\ R_{12} & R_{22} & \cdots & R_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{1n} & R_{2n} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\left(L\mathbf{A}\right)^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \cdots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & L_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где R_{ij} и L_{ij} - соответственно правое и левое алгебраические дополнения элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$ для всех $i, j = \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \left(R\mathbf{A}\right)^{-1}$. Найдем элементы матрицы $\mathbf{B}$, непосредственно перемножая матрицы и применив формулу (2.5). Для всех $i = \overline{1, n}$ получим

$$b_{ii} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot R_{ij} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}} = 1,$$

а при условии $i \neq j$,

$$b_{ij} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot R_{js} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}\left(\mathbf{a}_{i.}\right),$$

где $\mathbf{A}_{j.}\left(\mathbf{a}_{i.}\right)$ - матрица, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$, заменив ее j-ю строку i-й строкой. По теореме 2.6.3 $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}\left(\mathbf{a}_{i.}\right) = 0$ для всех $i, j = \overline{1, n}$ таких, что $i \neq j$.

Итак, $b_{ij} = 0$ для всех $i, j = \overline{1, n}$ таких, что $i \neq j$.

Таким образом, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ - единичная матрица, а потому матрица $\left(R\mathbf{A}\right)^{-1}$ есть правой обратной к эрмитовой матрице $\mathbf{A}$.

Пусть теперь $\mathbf{D} = \left(L\mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Снова найдем элементы матрицы $\mathbf{D}$, непосредственно перемножая матрицы и воспользовавшись формулой (2.10). Для всех $i = \overline{1, n}$ получим

$$d_{ii} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}} = 1,$$

а при условии $i \neq j$ имеем,

$$d_{ij} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \sum_{s=1}^{n} L_{si} \cdot a_{sj} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right),\ \left(i \neq j\right),$$

где $\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)$ - матрица, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$, заменив ее i-й столбец j-м столбцом. По теореме 2.6.4 $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right) = 0$ для всех $i, j = \overline{1, n}$ таких, что $i \neq j$.

Итак, $d_{ij} = 0$ для всех $i, j = \overline{1, n}$ таких, что $i \neq j$.

Таким образом, $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ - единичная матрица, а потому матрица $\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}$ является левой обратной к матрице $\mathbf{A}$.

Равенство матриц $\left(L\mathbf{A}\right)^{-1} = \left(R\mathbf{A}\right)^{-1}$ следует (см., например [27]) из условия единственности обратной матрицы для оборотной матрицы из кольца $\boldsymbol{M}\left(n, \boldsymbol{S}\right)$. Равенство матриц можно также доказать, показав равенство их соответствующих элементов.

Рассмотрим два соответствующих элемента этих матриц, размещенных на пересечении i-й строки и j-го столбца, $\left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} L_{ij}$ и $\left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} R_{ij}$, для некоторых $i, j = \overline{1, n}$. Левое алгебраическое дополнение

L_{ij} является суммой мономов - произведений элементов матрицы $\mathbf{A}^{ij}$, каждый из которых начинается справа элементом i-го столбца. Рассмотрим произвольный такой моном

$$d_1 = (-1)^{n-r} a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \ldots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \ldots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} \times$$
$$\times a_{j i_{k_1+l_1}} \ldots a_{i_{k_1+1} i} = (-1)^{n-r} h_r \cdot \ldots \cdot h_2 \cdot a_{j i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1} i},$$

где $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+l_s}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}}$ для всех $s = \overline{2, r}$. Если $l_s = 1$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}} = \boldsymbol{n}(a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}) \in \boldsymbol{F}$, а если $l_s = 0$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s}} \in \boldsymbol{F}$ для всех $s = \overline{2, r}$. Если же $l_1 = 1$, тогда положим $i_{k_1+1} = j$.

Пусть τ - количество циклов первого и второго порядков в подстановке, которую образуют индексы элементов монома d_1. Произведение элементов матрицы, индексы которых образуют циклы первого и второго порядков, принимает своё значение в поле $\boldsymbol{F}$. Обозначим его через $\alpha \in \boldsymbol{F}$. Через $u_i := h_{s_i}$ для всех $i = \overline{1, p}$, где $p = r - \tau$, обозначим произведения элементов, индексы которых образуют циклы больше чем второго порядка, тогда

$$d_1 = (-1)^{n-r} \alpha u_p \cdot \ldots \cdot u_1 \cdot a_{j i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1} i} \cdot$$

Среди слагаемых суммы L_{ij} рассмотрим еще $2^p - 1$ таких, которые имеют одинаковый знак и являются произведениями выражения $(-1)^n \alpha \cdot a_{j i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1} i}$ слева на каждый из множителей вида u_k или $\overline{u_k}$ для всех $k = \overline{1, p}$, сохраняя их ниспадающую последовательность по k. Воспользовавшись леммой 2.5.2, найдем сумму C_1, - этих слагаемых вместе с d_1.

$$C_1 = (-1)^{n-r}\ \alpha\, t(u_p) \cdot \ldots \cdot t(u_1) \cdot a_{j\, i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1}\, i}.$$

Рассмотрим правое алгебраическое дополнение R_{ij}, что является суммой мономов - произведений элементов матрицы $\mathbf{A}^{ij}$, каждый из которых начинается слева элементом j-й строки. Среди них можно выбрать такой d_2, который соответствует моному d_1,

$$d_2 = (-1)^{n-r} a_{j\, i_{k_1+l_1}} \ldots a_{i_{k_1+1} i} a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \ldots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_r}\, i_{k_r+l_r}} \ldots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} =$$

$$= (-1)^{n-r}\ \alpha\, a_{j\, i_{k_1+l_1}} \ldots a_{i_{k_1+1}\, i} u_1 \ldots u_p,$$

где $\alpha \in \boldsymbol{F}$ - произведение элементов, индексы которых образуют циклы первого и второго порядков, а u_i - произведения элементов матрицы, индексы которых образуют циклы более чем второго порядка для всех $i = \overline{1, p}$, где $p = r - \tau$.

Среди слагаемых суммы R_{ij} снова рассмотрим еще $2^p - 1$ таких, которые имеют одинаковый знак и являются произведениями выражения $(-1)^n \alpha \cdot a_{j\, i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1}\, i}$ справа на каждый из множителей вида u_k или $\overline{u_k}$ для всех $k = \overline{1, p}$, сохраняя их упорядоченность по k. Найдем сумму C_2, - этих слагаемых вместе с d_2, воспользовавшись леммой 2.5.2,

$$C_2 = (-1)^{n-r}\ \alpha\, t(u_p) \cdot \ldots \cdot t(u_1) \cdot a_{j\, i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1}\, i}.$$

Очевидно, что $C_1 = C_2$. Итак, любой сумме 2^p соответствующих мономов левого алгебраического дополнения L_{ij} отвечает равная ей сумма 2^p соответствующих мономов правого алгебраического дополнения R_{ij}. Отсюда, для всех $i, j = \overline{1, n}$ получим равенство $(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} L_{ij} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} R_{ij}$, которое означает $(L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1} := \mathbf{A}^{-1}$.

Теорема доказана.

Замечание 3.1.1. Как следует из теоремы 3.1.1, можно однозначно построить классическую присоединенную $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ к эрмитовой матрице $\mathbf{A}$. Т.е., в случае, когда $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ - эрмитовая матрица, то ее классическую присоединенную можно представить, как матрицу, элементы которой являются левыми алгебраическими дополнениями $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}] = (L_{ij})_{n \times n}$ или правыми алгебраическими дополнениями $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}] = (R_{ij})_{n \times n}$ матрицы $\mathbf{A}$. И над телом $\boldsymbol{S}$ для эрмитовой невырожденной матрицы $\mathbf{A}$ выполняется формула известная из линейной алгебры над полем комплексных чисел:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}.$$

Теорема 3.1.2. *Матрица обратная к эрмитовой матрице над телом $\boldsymbol{S}$ есть эрмитовой.*

Доказательство. Утверждение теоремы, очевидно, следует из свойства произведения сопряженных матриц. А именно, для эрмитовой матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ по лемме 2.3. 2-в) выполняется следующее

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = I = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^* = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^* \mathbf{A}^* = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^* \mathbf{A}.$$

Откуда, $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^* = \mathbf{A}^{-1}$. А это и означает, что матрица $\mathbf{A}$ есть эрмитовой.

Приведем также другое доказательство теоремы в рамках и средствами теории столбцовых и строчных определителей.

Пусть $\mathbf{A}^{-1} = \left(d_{ij}\right)_{n\times n}$ - матрица, обратная к невырожденной эрмитовой матрице $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Рассмотрим ее в виде правой обратной матрицы $(R\mathbf{A})^{-1}$. Элементами ее главной диагонали есть $d_{ii} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} R_{ii}$ для всех $i = \overline{1,n}$. Согласно лемме 2.2.1, $R_{ii} = \boldsymbol{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii}$, где $k = \boldsymbol{min}\{l \mid \forall l = \overline{1,n},\ l \neq i\}$. Поскольку, для всех $i = \overline{1,n}$ подматрица $\mathbf{A}^{ii}$ матрицы $\mathbf{A}$ также является эрмитовой матрицей, тогда для всех $i = \overline{1,n}$ и индекса $k = \boldsymbol{min}\{l \mid \forall l = \overline{1,n},\ l \neq i\}$ получим соотношение $\boldsymbol{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{ii} \in \boldsymbol{F}$. Отсюда, $d_{ii} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\,\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{ii} \in \boldsymbol{F}$ для всех $i = \overline{1,n}$, т.е., все элементы главной диагонали - элементы поля $\boldsymbol{F}$.

Рассмотрим теперь элементы матрицы $(R\mathbf{A})^{-1}$ симметричные относительно главной диагонали, $d_{ij} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} R_{ij}$ и $d_{ji} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} R_{ji}$, для некоторых $i, j = \overline{1,n}$ таких, что $i \neq j$. Из теоремы 3.1.1, из равенства правой и левой обратных к эрмитовой матрице следует равенство их соответствующих элементов $R_{ij} = L_{ij}$ для всех $i, j = \overline{1,n}$. Рассмотрим произвольный моном g левого алгебраического дополнения L_{ij}

$$g = (-1)^{n-r} a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \ldots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \ldots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} a_{j\, i_{k_1+l_1}} \ldots a_{i_{k_1+1} i}.$$

Среди мономов правого алгебраического дополнения R_{ji} найдем соответствующий ему моном f такой, что

$f =$

$= (-1)^{n-r} a_{ii_{k_1+1}} \dots a_{i_{k_1+l_1} j} a_{i_{k_2} i_{k_2+1}} \dots a_{i_{k_2+l_2} i_{k_2}} \dots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \dots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} =$

$= (-1)^{n-r} \overline{a_{i_{k_1+1} i}} \dots \overline{a_{j i_{k_1+l_1}}}\, \overline{a_{i_{k_2+1} i_{k_2}}} \dots \overline{a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}}} \dots \overline{a_{i_{k_r+1} i_{k_r}}} \dots \overline{a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}}} =$

$= (-1)^{n-r} \overline{a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \dots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \dots a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \dots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}}\, a_{j i_{k_1+l_1}} \dots a_{i_{k_1+1} i}} =$

$= \overline{g}\,.$

Таким образом, для каждого монома левого алгебраического дополнения L_{ij} среди мономов правого алгебраического дополнения R_{ji} можем найти сопряженный к нему, поэтому $R_{ij} = L_{ij} = \overline{R_{ji}}$**.**

Отсюда, $d_{ij} = \overline{d_{ji}}$ для всех $\boldsymbol{i}, j = \overline{1, n}$ таких, что $i \neq j$.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.3. *Если* $\mathbf{A}$ *- невырожденная эрмитовая матрица над телом* $\boldsymbol{S}$*, тогда* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{-1} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}$.

Доказательство. Поскольку, матрица $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ - невырожденная эрмитовая, то, как следует из теоремы 2.7.3, существуют такие элементы поля $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \boldsymbol{F}$ и такая унимодулярная матрица $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, что $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \mathbf{U}^*$ и $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Тогда для эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, получим

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \mathbf{U}^*\right)^{-1} = \left(\mathbf{U}^*\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{diag}\left(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\right) \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

По лемме 2.7.1 $\left\{\mathbf{U}^{-1}, \left(\mathbf{U}^*\right)^{-1}\right\} \subset \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, тогда по теореме 2.7.3 и в силу симметричности унимодулярного подобия, получим

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{diag}\left(\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1}\right)\right) = \lambda_1^{-1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n^{-1} = \left(\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Замечание 3.1.2. Поскольку, $(R\mathbf{A})^{-1} \equiv (L\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$, и по теореме 3.1.2 матрица $\mathbf{A}^{-1}$ - эрмитовая, то матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$, а следовательно $\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ являются эрмитовыми коммутирующими матрицами. Тогда, согласно замечанию 2.7.1 о мультипликативности определителя эрмитовой матрицы для коммутирующих эрмитовых матриц, получим

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]\cdot\mathbf{A} = \boldsymbol{diag}\left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A},\ldots,\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right).$$

Откуда, $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]) = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{n-1}$.

Подытожим этот подраздел критерием оборотности эрмитовой матрицы над телом с инволюцией $\boldsymbol{S}$:

Теорема 3.1.4. *Пусть* $\mathbf{A}$ *- эрмитовая матрица над телом* $\boldsymbol{S}$*, следующие утверждения эквивалентны:*

а) матрица $\mathbf{A}$ *обратимая, т.е.,* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})$*;*

б) $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\neq 0$*;*

в) строки матрицы $\mathbf{A}$ *линейно независимые слева;*

г) столбцы матрицы $\mathbf{A}$ *линейно независимые справа.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений а) и б) следует из теорем 3.1.1 и 3.1.3. Эквивалентность утверждений б) и в) и б) и г) следует, соответственно, из теорем 2.6.9 и 2.6.10 и следствия 2.6.4.

Теорема доказана.

Замечание 3.1.2. Из теоремы 3.1.4 следует выполнение определителем эрмитовой матрицы аксиомы 1 определение 1.1.1. Итак, учитывая замечания 2.4.1 и 2.5.1 определитель произвольной эрмитовой матрицы над телом $\boldsymbol{S}$ удовлетворяет аксиомы 1 и 3 определение 1.1.1 некоммутативного определителя.

3.2. Свойства правой и левой соответствующих эрмитовых матриц над телом

Определение 3.2.1. Пусть $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ матрица над телом $\boldsymbol{S}$. Будем называть матрицу $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ ее *левой соответствующей эрмитовой,* а $\mathbf{A}\mathbf{A}^* \in \boldsymbol{M}(m, \boldsymbol{S})$ - ее *правой соответствующей эрмитовой матрицей.*

Множество $m\times n$-матриц над телом $\boldsymbol{S}$ обозначим через $\boldsymbol{S}^{m\times n}$.

Теорема 3.2.1. *Если j-й столбец матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ для любого $j = \overline{1,n}$ умножить справа на произвольный элемент $b \in \mathbf{S}$, тогда определитель ее левой соответствующей эрмитовой матрицы умножается на норму этого элемента $\boldsymbol{n}(b)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)$ - матрица, которую получим из матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$, умножив справа ее j-й столбец $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ для любого $j = \overline{1,n}$ на произвольный элемент $b \in \mathbf{S}$. Тогда для ее сопряженной матрицы получим

$$\left(\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)\right)^* = \mathbf{A}^*_{j.}\left(\overline{b}\cdot \mathbf{a}_{j.}\right),$$

где матрица $\mathbf{A}^*_{j.}\left(\overline{b}\cdot \mathbf{a}_{j.}\right)$ получается из матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{n\times m}$, умножив ее j-ю строку на элемент $\overline{b}$, сопряженный к элементу b. Рассмотрим произведение этих матриц.

$$\mathbf{A}^*_{j.}\left(\bar{b}\cdot \mathbf{a}_{j.}\right)\cdot \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)=$$

$$=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{k1}}a_{k1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{k1}}a_{kj}\cdot b & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{k1}}a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{m}\bar{b}\cdot\overline{a_{kj}}a_{k1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m}\bar{b}\cdot\overline{a_{kj}}a_{kj}\cdot b & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m}\bar{b}\cdot\overline{a_{kj}}a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{kn}}a_{k1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{kn}}a_{kj}\cdot b & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{kn}}a_{kn} \end{pmatrix} & j\text{-я} \\ j\text{-й} & \end{array}$$

Матрица $\mathbf{A}^*_{j.}\left(\bar{b}\cdot \mathbf{a}_{j.}\right)\cdot \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)$ - эрмитовая, j-й столбец которой умножается справа на b, а j-я строка - слева на $\bar{b}$.Тогда, по теореме 2.4.3 и по лемме 2.6.1, получим

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*_{j.}\left(\bar{b}\cdot \mathbf{a}_{j.}\right)\cdot \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)\right)=\bar{b}\cdot \boldsymbol{rdet}_j\left(\mathbf{A}^*\cdot \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)\right)=$$
$$=\bar{b}\cdot \boldsymbol{rdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)\cdot b=\bar{b}\cdot \boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)\cdot b=\boldsymbol{n}(b)\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2.2. *Если i-ю строку матрицы $\mathbf{A}\in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ для любого $i=\overline{1,n}$ умножить слева на произвольный элемент $b\in \boldsymbol{S}$, тогда определитель ее правой соответствующей эрмитовой матрицы умножается на норму этого элемента $\boldsymbol{n}(b)$.*

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 3.2.1.

Теорема 3.2.3. *Если матрица $\mathbf{A}\in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ имеет два одинаковые столбца, тогда определитель ее левой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ равняется нулю.*

Доказательство. Пусть в матрице $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ ее s-й и t-й столбцы являются одинаковыми, т.е. $a_{is} = a_{it}$ для всех $i \in I_m$ таких, что $s \neq t$, где $\{s,t\} \subset J_n$. Тогда у сопряженной матрицы $\mathbf{A}^*$ будут одинаковыми s-я и t-я строки. Рассмотрим их произведение матриц – эрмитовую матрицу $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} =$$

$$\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{s1}} & \cdots & \overline{a_{t1}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{1s}} & \cdots & \overline{a_{ss}} & \cdots & \overline{a_{ts}} & \cdots & \overline{a_{ms}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{1t}} & \cdots & \overline{a_{st}} & \cdots & \overline{a_{tt}} & \cdots & \overline{a_{mt}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{sn}} & \cdots & \overline{a_{tn}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & \cdots & a_{st} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & \cdots & a_{ts} & \cdots & a_{tt} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mt} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k1}} \cdot a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k1}} \cdot a_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k1}} \cdot a_{kt} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k1}} \cdot a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ks}} \cdot a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ks}} \cdot a_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ks}} \cdot a_{kt} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ks}} \cdot a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kt}} \cdot a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kt}} \cdot a_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kt}} \cdot a_{kt} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kt}} \cdot a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{km}} \cdot a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{km}} \cdot a_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{km}} \cdot a_{kt} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{km}} \cdot a_{kn} \end{pmatrix}$$

Поскольку, для произвольного $k \in I_m$ имеем равенство $a_{ks} = a_{kt}$, то $\sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kl}} \cdot a_{ks} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kl}} \cdot a_{kt}$ для всех $l = \overline{1,n}$. Таким образом, у эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ s-й и t-й столбцы также являются одинаковыми, тогда по следствию 2.6.1 ее определитель равняется нулю, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} = 0$**.**

Теорема доказана.

Теорема 3.2.4. *Если матрица* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *содержит два одинаковые строки, тогда определитель ее левой соответствующей эрмитовой матрицы равняется нулю.*

Доказательство теоремы аналогичное доказательству теоремы 3.2.3.

Теорема 3.2.5. *Если* i*-й столбец матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *заменить ее* j*-м столбцом, (при этом* $i \neq j$*), умноженным справа на произвольный элемент* $b \in \boldsymbol{S}$*, тогда определитель ее левой соответствующей эрмитовой матрицы равняется нулю.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.\,j} \cdot b\right)$ - матрица, которую получим из матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$, заменив ее i-й столбец ее j-м столбцом умноженным справа на произвольный элемент $b \in \boldsymbol{S}$, при этом $i \neq j$ для всех $j, i = \overline{1, n}$. Тогда ее сопряженной будет матрица $\mathbf{A}^*_{i\,.}\left(\overline{b} \cdot \mathbf{a}_{j\,.}\right)$, которую получим из матрицы $\mathbf{A}^* \in \boldsymbol{S}^{n \times m}$, заменив ее i-ю строку ее j-й строкой умноженной слева на элемент $\overline{b}$. Тогда по теореме 3.2.1, получим

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*_{i\,.}\left(\overline{b} \cdot \mathbf{a}_{j\,.}\right) \cdot \mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.\,j} \cdot b\right)\right) = \boldsymbol{n}(b) \cdot \boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*_{i\,.}\left(\mathbf{a}_{j\,.}\right) \cdot \mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.\,j}\right)\right).$$

Поскольку, матрица $\mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.\,j}\right)$ имеет два одинаковых столбца, а именно $a_{k\,i} = a_{k\,j}$ для всех $k = \overline{1, m}$, тогда по теореме 3.2.3 ее левая соответствующая эрмитовая матрица равняется нулю, $\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*_{i\,.}\left(\mathbf{a}_{j\,.}\right) \cdot \mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.\,j}\right)\right) = 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2.6. *Если i-ю строку матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ заменить ее j-й строкой, (где $i \neq j$), умноженной слева на произвольный элемент $b \in \boldsymbol{S}$, тогда определитель ее правой соответствующей эрмитовой матрицы равняется нулю.*

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 3.2.5 и следует из теорем 3.2.2 и 3.2.4.

Теорема 3.2.7. *Если произвольный столбец матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ является правой линейной комбинацией ее других столбцов, тогда определитель ее левой соответствующей эрмитовой матрицы равняется нулю.*

Доказательство. Пусть j-й столбец матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ является правой линейной комбинацией ее k других столбцов с индексами $j_1,\ldots,j_k$ и с коэффициентами $b_1,\ldots,b_k$, где $j_l \in \{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}$ и $b_l \in \mathbf{S}$ для всех $l = \overline{1,k}$ и $k < n$.

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i_1} \cdot b_1 + \ldots + a_{1j_k} \cdot b_k & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_1} \cdot b_1 + \ldots + a_{mj_k} \cdot b_k & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ j\text{ - й} \end{array}$$

Тогда j-я строка матрицы $\mathbf{A}^*$ является левой линейной комбинацией строк $j_1,\ldots,j_k$ с коэффициентами $\overline{b_1},\ldots,\overline{b_k}$,

$$\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{ccc} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{b_1} \cdot \overline{a_{1j_1}} + \ldots + \overline{b_k} \cdot \overline{a_{1j_k}} & \cdots & \overline{b_1} \cdot \overline{a_{mj_1}} + \ldots + \overline{b_k} \cdot \overline{a_{mj_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ j\text{-я} \\ \\ \\ \end{array}$$

Рассмотрим правую соответствующую эрмитовую матрицу $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{s=1}^{m} \overline{a_{s1}} \cdot a_{s1} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m} \overline{a_{s1}} \cdot \left(a_{sj_1} \cdot b_1 + \ldots + a_{sj_k} \cdot b_k\right) & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m} \overline{a_{s1}} \cdot a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\overline{b_1} \overline{a_{sj_1}} + \ldots + \overline{b_k} \cdot \overline{a_{sj_k}}\right) a_{s1} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\overline{b_1} \cdot \overline{a_{sj_1}} + \ldots + \overline{b_k} \cdot \overline{a_{sj_k}}\right)\left(a_{sj_1} b_1 + \ldots + a_{sj_k} b_k\right) & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\overline{b_1} \cdot \overline{a_{sj_1}} + \ldots + \overline{b_k} \overline{a_{sj_k}}\right) a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{m} \overline{a_{sn}} \cdot a_{s1} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m} \overline{a_{sn}} \left(a_{sj_1} b_1 + \cdots + a_{sj_k} b_k\right) & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m} \overline{a_{sn}} \cdot a_{sn} \end{pmatrix}$$

$$j\text{ - й}$$

Матрица $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ - эрмитовая и ее j-й столбец является правой линейной комбинацией столбцов $j_1, \ldots, j_k$, тогда по следствию 2.6.4, получим

$$\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2.8. *Если произвольная строка матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *является левой линейной комбинацией ее других строк, тогда определитель ее соответствующей правой эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ *равняется нулю.*

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 3.2.7.

3.3. Критерии вырожденности соответствующих эрмитовых матриц

Определение 3.3.1. Вектор - строки

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_{1.} = (a_{11}, \ldots, a_{1n}),\\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m.} = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}),\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $a_{ij} \in \boldsymbol{S}$ для всех $i \in I_m$ и $j \in J_n$, будем называть *линейно зависимыми слева*, если найдутся такие коэффициенты $b_1, \ldots, b_m$ - элементы тела $\boldsymbol{S}$, не все равны нулю, что левая линейная комбинация этих вектор - строк равняется нулевой вектор - строке,

$$b_1 \cdot \mathbf{a}_{1.} + \ldots + b_m \cdot \mathbf{a}_{m.} = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Определение 3.3.2. Вектор - строки (3.3) называются *линейно независимыми слева*, если равенство (3.4) возможно только, когда все коэффициенты $b_1, \ldots, b_m$ равняются нулю.

Определение 3.3.3. Вектор - столбцы

$$\mathbf{a}_{.1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_{.n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3...5}$$

где $a_{ij} \in \boldsymbol{S}$ для всех $i \in I_m$ и $j \in J_n$, будем называть *линейно зависимыми справа*, если найдутся такие коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$, - элементы тела $\boldsymbol{S}$

не все равны нулю, что правая линейная комбинация этих вектор - столбцов равняется нулевому вектор - столбцу,

$$\mathbf{a}_{\cdot j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{\cdot j_n} \cdot c_n = \mathbf{0}. \qquad (3.6)$$

Определение 3.3.4. Вектор - столбцы (3.5) называются *линейно независимыми справа*, если равенство (3.6) возможно только, когда все коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ равняются нулю.

Для вектор-столбцов и векторов-строк над телом $\boldsymbol{S}$ выполняются (см., например [34]) критерии линейной зависимости аналогичные коммутативному случаю:

Теорема 3.3.1. [34] *Для того, чтобы вектор - строки (3.3) были линейно зависимыми слева, необходимо и достаточно, чтобы один из них был левой линейной комбинацией других.*

Теорема 3.3.2. [34] *Для того, чтобы вектор - столбцы (3.5) были линейно зависимыми справа, необходимо и достаточно, чтобы один из них был правой линейной комбинацией других вектор - столбцов.*

Определение 3.3.5. *Главным минором эрмитовой матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ будем называть определитель ее главной подматрицы, которая является эрмитовой матрицей k-го порядка, где $k \leq n$, с элементами, которые лежат на пересечении строк с индексами $i_1, \ldots i_k$ и соответствующих им столбцов с индексами $i_1, \ldots i_k$, при этом матрицу минора строим так, что $i_1 < \ldots < i_s < \ldots < i_k$, где $i_s \in I_n$ при $s = \overline{1, k}$.

Определение 3.3.6. Пусть эрмитовая матрица $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ имеет главный минор r-го порядка, где $r \leq n$, отличный от нуля, а все главные миноры $r+1$-го порядка и высших, если они существуют, равняются нулю, тогда натуральное число r будем называть *рангом по главным минорам* эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$. Главный минор r-го порядка, отличный от нуля, будем называть *базисным*, а строки и столбцы на пересечении которых он стоит, - *базисными*.

Определение 3.3.7. Пусть строки и столбцы с индексами $i_1,\ldots,i_r$, где $r \le n$, эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ являются базисными, тогда строки с индексами $i_1,\ldots,i_r$ назовем *базисными* для матрицы $\mathbf{A}^*$, а столбцы с индексами $i_1,\ldots,i_r$, назовем *базисными* для матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$.

Теорема 3.3.3. (о базисном главном миноре левой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$). *Базисные столбцы матриц* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *являются линейно независимыми справа, а базисные строки матриц* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}^* \in \boldsymbol{S}^{n\times m}$ *- линейно независимые слева.*

Доказательство. Если бы базисные строки матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ были линейно зависимыми слева, тогда по теореме 3.2.1 один из них являлся бы левой линейной комбинацией других. Вычитая от этой строки указанную линейную комбинацию, получим строку, которая целиком состоит из нулей. Тогда по теореме 2.4.1 базисный минор матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ равнялся бы нулю, что противоречило бы его определению.

Аналогично, если бы базисные столбцы матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ были линейно зависимыми справа, то по теореме 3.2.2 один из них являлся бы правой линейной комбинацией других столбцов. Вычитая от этого столбца указанную линейную комбинацию, получим столбец, который целиком состоит из нулей. Тогда по теореме 2.4.1 базисный минор матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ равнялся бы нулю, что противоречило бы его определению.

Предположив, что базисные столбцы матрицы $\mathbf{A}$ будут линейно зависимыми справа, по теореме 3.3.2 получим, что один из них является правой линейной комбинацией других. Тогда по теореме 3.2.7 определитель эрмитовой матрицы, составленной из базисных строк и базисных столбцов матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, равнялся бы нулю, что противоречит определению базисных столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Аналогично, предположив, что базисные строки матрицы $\mathbf{A}^*$ будут линейно зависимыми слева, по теореме 3.3.1 получим, что один из них является левой линейной комбинацией других. Тогда по теореме 3.2.8 определитель эрмитовой матрицы, составленной из базисных строк и базисных столбцов матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, равнялся бы нулю, что противоречит определению базисных строк матрицы $\mathbf{A}^*$.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.4. *Произвольный столбец матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *является правой линейной комбинацией ее базисных столбцов.*

Доказательство. Пусть столбцы с индексами $i_1, \ldots, i_r$ являются базисными для матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$, тогда базисный главный минор ее левой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ содержится на пересечении столбцов и строк с теми же индексами $i_1, \ldots, i_r$. Обозначим матрицу $\mathbf{A}^*\mathbf{A} =: \mathbf{D} = \left(d_{ij}\right)_{n\times n}$, а также через $\mathbf{M}$ обозначим матрицу, которая отвечает базисному главному минору матрицы $\mathbf{D}$. Дополним эрмитовую матрицу $\mathbf{M}$ $r+1$-й строкой и столбцом, которые состоят из соответствующих элементов ее j-й строки и j-го столбца, при этом $j \in \{i_1, \ldots, i_r\}$. Обозначим полученную матрицу $\mathbf{D}_j$.

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & \cdots & d_{i_1 i_r} & d_{i_1 j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_r i_1} & \cdots & d_{i_r i_r} & d_{i_r j} \\ d_{j i_1} & \cdots & d_{j i_r} & d_{jj} \end{pmatrix}$$

Поскольку, матрица $\mathbf{D}_j$ - эрмитовая и содержит два одинаковые столбцы, то по следствию 2.6.1 ее определитель равняется нулю,

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{D}_j = \boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{D}_j = \sum_{l=1}^{r} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} + L_{jj} \cdot d_{jj} = 0,$$

где $L_{i_l j}$ - левое алгебраическое дополнение элемента $d_{i_l j}$ матрицы $\mathbf{D}_j$. Поскольку, $L_{jj} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{M}$, а по определению базисного главного минора $\boldsymbol{det}\,\mathbf{M} \neq 0$, тогда для произвольного $j \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ получим

$$d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{M}\right)^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j}\,. \tag{3.7}$$

Пусть теперь $j \notin \{i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_r\}$, при этом $i_k < j < i_{k+1}$. Рассмотрим матрицу $\mathbf{D}_j$, которую получим, дополнив матрицу $\mathbf{M}$ j-й строкой и j-м столбцом.

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & \cdots & d_{i_1 i_k} & d_{i_1 j} & d_{i_1 i_{k+1}} & \cdots & d_{i_1 i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_k i_1} & \cdots & d_{i_k i_k} & d_{i_k j} & d_{i_k i_{k+1}} & \cdots & d_{i_k i_r} \\ d_{j i_1} & \cdots & d_{j i_k} & d_{jj} & d_{j i_{k+1}} & \cdots & d_{j i_r} \\ d_{i_{k+1} i_1} & \cdots & d_{i_{k+1} i_k} & d_{i_{k+1} j} & d_{i_{k+1} i_{k+1}} & \cdots & d_{i_{k+1} i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_r i_1} & \cdots & d_{i_r i_k} & d_{i_r j} & d_{i_r i_{k+1}} & \cdots & d_{i_r i_r} \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{D}_j$ и в этом случае является эрмитовой. Ее определителем является главный минор $r+1$-го порядка матрицы $\mathbf{D}$, который по определением базисного главного минора равняется нулю,

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{D}_j = \boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{D}_j = \sum_{l=1}^{r} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} + L_{jj} \cdot d_{jj} = 0\,.$$

Поскольку, $L_{jj} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{M}$, а по определению базисного главного минора $\boldsymbol{det}\,\mathbf{M} \neq 0$, тогда для произвольного $j = \overline{1,n}$ такого, что $j \notin \{i_1,\ldots,i_r\}$, получим

$$d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} (\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j}, \qquad . \tag{3.8}$$

Объединив выражения (3.7) и (3.8), для всех $j = \overline{1,n}$ имеем равенство

$$d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} (\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j}\,.$$

Пусть $-(\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} = \mu_l$, тогда $d_{jj} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot d_{i_l j}$. Поскольку, $d_{jj} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} \cdot a_{kj}$ и $d_{i_l j} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k i_l}} \cdot a_{kj}$, то

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} \cdot a_{kj} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k i_l}} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \overline{a_{k i_l}} \cdot a_{kj}\,.$$

Отсюда, для всех $k = \overline{1,m}$ получим $\overline{a_{kj}} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \overline{a_{k i_l}}$. В свою очередь, использовав свойство инволюции, имеем $a_{kj} = \sum_{l=1}^{r} a_{k i_l} \cdot \overline{\mu_l}$. Это означает, что произвольный j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$ является правой линейной комбинацией ее базисных столбцов с коэффициентами $\overline{\mu_1},\dots,\overline{\mu_r}$, т.е. $\mathbf{a}_{.j_1}\cdot\overline{\mu_1}+\ldots+\mathbf{a}_{.j_r}\cdot\overline{\mu_r}=\mathbf{a}_{.j}$ для произвольного $j\in J_n$.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.5. *Произвольная строка матрицы* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ *является левой линейной комбинацией ее базисных строк.*

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 3.3.4, рассматривая ее правую соответствующую эрмитовую матрицу $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Теорема 3.3.6. (Критерий вырожденности левой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$). *Для того чтобы определитель эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ *были линейно зависимыми справа.*

Доказательство. (Необходимость). Если определитель эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ равняется нулю, тогда ее базисный главный минор имеет порядок $r<n$. Тогда хотя бы один из столбцов матрицы $\mathbf{A}$ не является базисным. По теореме 3.3.4 этот столбец является правой линейной комбинацией ее базисных столбцов. В эту комбинацию можем включить и остальные столбцы, поставив возле них справа нули. Таким образом, один из столбцов матрицы $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ является правой линейной комбинацией ее других столбцов, тогда по теореме 3.3.2 столбцы матрицы $\mathbf{A}$ линейно зависимые.

(Достаточность). Если столбцы матрицы $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ линейно зависимы справа, тогда по теореме 3.3.2 один из них является правой линейной комбинацией других ее столбцов. Отсюда по теореме 3.2.7 получим, что определитель левой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ равняется нулю.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.7. (Критерий вырожденности правой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{AA}^*$). *Для того чтобы определитель эрмитовой матрицы $\mathbf{AA}^*$ равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы строки матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ были линейно зависимыми слева.*

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 3.2.7.

3.4. Ранг матрицы над телом

Определение 3.4.1. Будем говорить, что матрица $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ имеет *столбцовый ранг* r, если r - максимальное число линейно независимых справа столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Определение 3.4.2. Будем говорить, что матрица $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ имеет *строчный ранг* r, если r - максимальное число линейно независимых слева строк матрицы $\mathbf{A}$.

Известно (см., например [34, 38]), что для произвольной матрицы $\mathbf{A}$ над телом столбцовый ранг равняется ее строчному рангу, поэтому можем дать определение *ранга* матрицы над телом, как максимального числа линейно независимых слева строк или линейно независимых справа столбцов.

Теорема 3.4.1. *Ранг по главным минорам левой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ над телом $\boldsymbol{S}$ равняется ее рангу и рангу матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$.*

Доказательство**.** Пусть r - ранг по главным минорам левой соответствующей эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, тогда по теореме 3.3.3 r базисных m-мерных столбцов матрицы $\mathbf{A}$ являются линейно независимыми справа. В правом векторном пространстве m-мерных столбцов $R\boldsymbol{S}^m$ над телом $\boldsymbol{S}$ рассмотрим линейную оболочку $\boldsymbol{L}$ базисных столбцов матрицы $\mathbf{A}$. Поскольку, по теоремой 3.3.4 произвольный столбец матрицы $\mathbf{A}$ однозначно выражается через правую линейную комбинацию ее базисных столбцов, то базисные столбцы являются базисом линейной оболочки $\boldsymbol{L}$.

Поскольку, в конечномерном пространстве число элементов базиса не зависит от базиса, тогда любые $r+1$ векторов линейной оболочки $\boldsymbol{L}$, а отсюда, любые $r+1$ столбцов матрицы $\mathbf{A}$ - линейно зависимые справа и r - максимальное число линейно независимых справа столбцов матрицы $\mathbf{A}$. А это означает, что ранг матрицы $\mathbf{A}$ равняется r.

Аналогично, по теореме 3.3.3 r базисных n-мерных столбцов матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ являются линейно независимыми справа. В правом векторном пространстве n-мерных столбцов $R\boldsymbol{S}^n$ над телом $\boldsymbol{S}$ рассмотрим линейную оболочку $\boldsymbol{L}_1$ базисных столбцов матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Поскольку, по теореме 3.3.4 произвольный столбец матрицы $\mathbf{A}$ однозначно выражается через правую линейную комбинацию ее базисных столбцов, то, как было показано в теореме 3.2.7, и произвольный столбец матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ однозначно выражается через правую линейную комбинацию ее базисных. Отсюда, базисные столбцы матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ является базисом линейной оболочки $\boldsymbol{L}_1$, а ее размер равняется r. Тогда любые $r+1$ векторов линейной оболочки $\boldsymbol{L}_1$, а отсюда любые $r+1$ столбцы матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ - линейно зависимы справа.

Итак, r - максимальное число линейно независимых справа столбцов матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. А поэтому ранг матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ равняется r.

Теорема доказана.

Теорема 3.4.2. *Ранг по главным минорам правой соответствующей эрмитовой матрицы* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ *над телом* $\boldsymbol{S}$ *равняется ее рангу и рангу матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$.

Доказательство аналогичное доказательству теоремы 3.4.1.

Теорема 3.4.3. *Для произвольных матриц* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *над телом* $\boldsymbol{S}$ *ранг произведения* $\mathbf{AB}$ *не больше ни ранга матрицы* $\mathbf{A}$*, ни ранга матрицы* $\mathbf{B}$.

Доказательство. Из определения произведения матриц следует, что строки матрицы $\mathbf{AB}$ являются левыми линейными комбинациями строк матрицы $\mathbf{B}$ и потому максимальное число линейно независимых слева строк матрицы $\mathbf{AB}$ не может быть большим числа линейно независимых слева строк матрицы $\mathbf{B}$. Итак, строчный ранг матрицы $\mathbf{AB}$ не больший строчного ранга матрицы $\mathbf{B}$.

Аналогично, столбцы матрицы $\mathbf{AB}$ являются правыми линейными комбинациями столбцов матрицы $\mathbf{A}$, и поэтому столбцовый ранг матрицы $\mathbf{AB}$ не больше столбцового ранга матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема доказана.

3.5. Свойства двойного определителя квадратных матриц над телом

Лемма 3.5.1. *Пусть* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, тогда* $\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Очевидно, что матрицы $\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ являются эрмитовыми матрицами порядка $2n$ над телом $\boldsymbol{S}$. Обозначим матрицу $\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} =: \mathbf{B} = (b_{ij})$. Не теряя общности, будем раскрывать определитель эрмитовой матрицы, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{B}$, как строчный $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{B}$, для произвольного $i = \overline{1, 2n}$. Произвольный моном d строчного определителя $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{B}$ для всех $i = \overline{1, 2n}$ равняется нулю в следующих трех случаях.

1) Среди множителей монома d есть элемент $b_{mj}=0$ для произвольных $m\geq n+1$ и $j\geq n+1$.
2) Среди множителей монома d есть элемент $b_{mj}=0$ для всех $m\leq n$ и $j\leq n$ таких, что $m\neq j$.
3) Среди множителей монома d есть элемент $b_{mm}=-1$ для некоторого $1\leq m\leq n$. Наличие среди множителей монома d элемента $b_{mm}=-1$ для некоторого $1\leq m\leq n$, вследствие упорядоченности его элементов согласно определению 2.2.4 с необходимостью вызывает принадлежность ему и других элементов $b_{kk}=-1$ для всех $k=\overline{m,n}$, а за ними с необходимостью следует элемент $b_{n+1j}=0$ из случая 1 при $j\geq n+1$.

Единственным случаем невырожденности монома d есть случай, когда он является произведением ненулевых элементов вида $b_{kl}=a^{*}_{k-n,l}$ и $b_{lk}=a_{l,k-n}$, когда $k\geq n+1$ и $l\leq n$, где $a^{*}_{k-n,l}$ - элемент матрицы $\mathbf{A}^{*}$, а $a_{l,k-n}$ - элемент матрицы $\mathbf{A}$. При этом вследствие упорядоченности справа эти элементы выбираются из подматриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{*}$ и размещаются в мономе d так, что их индексы образуют подстановку, которая в нормальной форме записывается прямым произведением независимых циклов в парных степенях. Кроме того, элементы подматриц чередуются как множители в мономе d следующим образом:

а) если $i\leq n$, то элементы размещаются в мономе так, что индекс элемента подматрицы $\mathbf{A}$ начинает каждый цикл индексов монома, а за ним идет элемент подматрицы $\mathbf{A}^{*}$, дальше элементы подматриц продолжают чередоваться;

б) если $i \geq n+1$, то индекс элемента подматрицы $\mathbf{A}^*$ начинает каждый цикл, за ним идет элемент подматрицы $\mathbf{A}$ и дальше элементы подматриц продолжают чередоваться.

Рассмотрим теперь эрмитовую матрицу $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix} =: \boldsymbol{C} = \left(c_{ij}\right)$. Произвольный моном $\tilde{d}$ строчного определителя $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{C}$ для всех $i = \overline{1,2n}$ равняется нулю в следующих трех случаях.

1) Среди множителей монома $\tilde{d}$ есть элемент $c_{mj} = 0$ для некоторых $m \leq n$ и $j \leq n$.
2) Среди множителей монома $\tilde{d}$ есть элемент $c_{mj} = 0$ для некоторых $m \geq n+1$ и $j \geq n+1$ таких, что $i \neq j$.
3) Среди множителей монома $\tilde{d}$ есть элемент $c_{mm} = -1$ для произвольного $m = \overline{n+1,\, 2n}$. Наличие среди множителей монома $\tilde{d}$ элемента $c_{mm} = -1$ для произвольного $m = \overline{n+1,\, 2n}$, вследствие упорядоченности его элементов согласно определению строчного определителя с необходимостью вызывает принадлежность ему и элемента $c_{kk} = 0$, когда $1 \leq k \leq n$.

Единственным случаем невырожденности монома $\tilde{d}$ является случай, когда он является произведением ненулевых элементов вида $c_{kl} = a^*_{k-n,l}$ и $c_{lk} = a_{l,k-n}$, когда $k \geq n+1$ и $l \leq n$, где $a^*_{k-n,l}$ - элементы матрицы $\mathbf{A}^*$, а $a_{l,k-n}$ - элементы матрицы $\mathbf{A}$. При этом порядок множителей в невырожденном мономе $\tilde{d}$, очевидно, тождественен порядку множителей невырожденного монома d.

Таким образом, строчные определители $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{C}$ для произвольного $i = \overline{1,2n}$ отличаются только в построении вырожденных мономов из случаев 1)-3), поэтому $\boldsymbol{rdet}_i\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{rdet}_i\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$. А отсюда, вследствие эрмитовости данных матриц и следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, тогда* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Доказательство. Рассмотрим эрмитовые матрицы порядка $2n$:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

По лемме 3.5.1 определители этих матриц равны между собой,

$$\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Произвольную квадратную матрицу $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ можно представить в виде произведения $m \le n^2$ элементарных унимодулярных матриц порядка $2n$. То есть, существуют такие элементарные унимодулярные матрицы порядка $2n$, $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}^{(k)}(a_{ij})$, для некоторого $k = \overline{1, m}$, где $m \le n^2$, а a_{ij} - ненулевые элементы подматрицы $\mathbf{A}$ для всех $i = \overline{1, n}$ та $j = \overline{n+1, 2n}$, что имеем следующую факторизацию

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \prod_k \mathbf{P}_k .$$

Итак, $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{SL(n, S)}$, тогда по теореме 2.7.2, получим:

$$(-1)^n \, \boldsymbol{det}\, \mathbf{AA}^* = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{AA}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{I} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^*\mathbf{A} \end{pmatrix} = (-1)^n \, \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}^*\mathbf{A}\,.$$

Теорема доказана.

Определение 3.5.1. Для квадратной матрицы $\mathbf{A}$ над телом $\boldsymbol{S}$ определитель ее соответствующей эрмитовой матрицы будем называть ее *двойным (double) определителем*: $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} := \boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{det}\left(\mathbf{AA}^*\right)$.

Замечание 3.5.1. Теорема 3.5.1 обобщает из тела кватернионов на тело $\boldsymbol{S}$ соответствующую теорему о свойствах двойного определителя с [50]. Кроме того, предлагается обозначать двойной определитель произвольной матрицы $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, как $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}$, поскольку обозначение $\|\mathbf{A}\|$, которое использует Л. Чен, принято применять для понятия нормы матрицы. В теореме 3.5.2 мы также следовали [50], доказывая ее в рамках построенной теории столбцовых и строчных определителей.

Определение 3.5.2. [2, 3] Упорядоченное поле называется *максимальным*, если каждое алгебраическое упорядоченное расширение поля $\boldsymbol{F}$ совпадает с $\boldsymbol{F}$.

Утверждение 3.5.1. [2] *Произвольный положительный элемент максимального упорядоченного поля имеет в* $\boldsymbol{F}$ *квадратный корень.*

Теорема 3.5.2. *Пусть тело* $\boldsymbol{S}$ *является композиционной ассоциативной алгеброй с делением над максимальным упорядоченным полем* $\boldsymbol{F}$, *тогда для произвольных квадратных матриц над телом* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \subset \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *имеем равенство*

$$\boldsymbol{ddet}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{B}\,.$$

Доказательство. По теореме 2.7.4 эрмитовая матрица $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ унимодулярно подобна диагональной матрице, т.е., для матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ существует такая унимодулярная матрица $\mathbf{U}\in\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$, что $\mathbf{U}^*\cdot\mathbf{A}^*\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}=\boldsymbol{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_i\in\boldsymbol{F}$ для всех $i=\overline{1,n}$. Тогда,

$$\boldsymbol{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\mathbf{U}^*\cdot\mathbf{A}^*\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{U})^*\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}\,.$$

Пусть $\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}=(q_{ij})\in\boldsymbol{M(}n,\boldsymbol{S)}$, тогда для всех $i=\overline{1,n}$

$$\alpha_i=\sum_k\overline{q_{ki}}q_{ki}=\sum_k\boldsymbol{n(}q_{ki}\boldsymbol{)}\in\boldsymbol{F}_+\,, \tag{3.9}$$

где $\boldsymbol{F}_+$ - множество неотрицательных элементов поля $\boldsymbol{F}$. Из максимальной упорядоченности поля $\boldsymbol{F}$ согласно утверждению 3.5.1 следует, что для всех $i=\overline{1,n}$ существует $\sqrt{\alpha_i}\in\boldsymbol{F}_+$. Кроме того, поскольку $\boldsymbol{(}\mathbf{U}^*\boldsymbol{)}^{-1}=\boldsymbol{(}\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{)}^*$, то для эрмитовой матрицы $\boldsymbol{(}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{)}^*\boldsymbol{(}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{)}$ в силу теоремы 2.7.1, существует такая унимодулярная матрица $\mathbf{W}\in\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$, что

$$\mathbf{W}^*\boldsymbol{(}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{)}^*\boldsymbol{(}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{)}\mathbf{W}=\boldsymbol{diag(}\beta_1,\ldots,\beta_n\boldsymbol{)}.$$

Тогда, по теореме 3.5.1 и по лемме 2.7.1, получим

$$\boldsymbol{ddet(}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\boldsymbol{)}=\boldsymbol{det(}\mathbf{B}^*\boldsymbol{(}\mathbf{A}^*\mathbf{A}\boldsymbol{)}\mathbf{B}\boldsymbol{)}=\boldsymbol{det(}\mathbf{B}^*\boldsymbol{(}\mathbf{U}^*\boldsymbol{)}^{-1}\mathbf{U}^*\boldsymbol{(}\mathbf{A}^*\mathbf{A}\boldsymbol{)}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{)}=$$

$$=\boldsymbol{det}\left(\left(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\right)^*\boldsymbol{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\right)=$$

$$=\boldsymbol{det}\Big(\boldsymbol{(diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\,\boldsymbol{)}^*\,\boldsymbol{(diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\,\boldsymbol{)}\Big)=$$

$$=\boldsymbol{det}\Big(\boldsymbol{(diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\,\boldsymbol{)(diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\,\boldsymbol{)}^*\Big)=$$

$$=\boldsymbol{det}\Big(\boldsymbol{diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\boldsymbol{(}\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\,\boldsymbol{)(}\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\,\boldsymbol{)}^*\,\boldsymbol{diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\Big)=$$

$$=\boldsymbol{det}\Big(\boldsymbol{diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\mathbf{W}^{-1}\,\boldsymbol{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_n)\boldsymbol{(}\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{)}^*\,\boldsymbol{diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\Big)=$$

$$=\boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{(}\,\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{)}^T\,\boldsymbol{diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\boldsymbol{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_n)\boldsymbol{diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\Big(\boldsymbol{(}\,\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{)}^T\Big)^*\right)=$$

$$=\boldsymbol{det}\Big(\boldsymbol{diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\boldsymbol{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_n)\boldsymbol{diag}\big(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_n}\big)\Big)=$$

$$=\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_n\cdot\beta_1\cdot\ldots\cdot\beta_n=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{det}\,\mathbf{B}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}.$$

Теорема доказана.

Замечание 3.5.2. Как следует из формулы (3.9) и в силу теоремы 2.7.4, если тело $\boldsymbol{S}$ есть композиционной ассоциативной нерасщепляемой алгеброй над максимальным упорядоченным полем $\boldsymbol{F}$, то двойной определитель произвольной матрицы $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ является неотрицательным, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\geq 0$.

Теорема 3.5.3. *Если* $\mathbf{U}\in\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$ *- произвольная унимодулярная матрица, тогда её двойной определитель равняется единице,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{U}=1$.

Доказательство. По теореме 2.7.4 для произвольной унимодулярной матрицы $\mathbf{U}\in\boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$, получим $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{U}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{U}^*\mathbf{U}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{U}^*\mathbf{IU}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{I}=1$.

Теорема доказана.

Замечание 3.5.3. В силу теоремы 3.5.3 унимодулярную матрицу над телом $\boldsymbol{S}$ можно определить, как матрицу, двойной определитель которой равняется 1.

Замечание 3.5.4. Из теорем 3.2.7, 3.2.8, 3.5.2 и 3.5.3 следует, что если тело $\boldsymbol{S}$ является композиционной ассоциативной нерасщепляемой алгеброй над максимальным упорядоченным полем $\boldsymbol{F}$, то двойной определитель $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}$ произвольной матрицы $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ удовлетворяет аксиомы 1, 2, 3 определения 1.1.1. Когда $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{H})$, то, использовав соотношение с [45, 51], которое устанавливает зависимость между определителями Мура, Стаде и Дьёдонне, а также замечание 2.5.2, получим следующее соотношение между двойным определителем и некоммутативными определителями Мура, Стаде и Дьёдонне:

$$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{Sdet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{Ddet}^2\,\mathbf{A}.$$

3.6. Детерминантное представление обратной матрицы над телом с инволюцией через аналог классической присоединенной

Определение. 3.6.1. Пусть $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Для всех $j = \overline{1, n}$ ее двойной определитель можно разложить по j-му столбцу следующим образом, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{L}_{ij} a_{ij}$, тогда $\mathbb{L}_{ij}$ будем называть *левым двойным алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$.

Определение. 3.6.2. Пусть $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Для всех $i = \overline{1, n}$ ее двойной определитель можно разложить по i-й строке следующим образом, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right) = \sum\limits_{j} a_{ij} \mathbb{R}_{ij}$, тогда $\mathbb{R}_{ij}$ будем называть *правым двойным алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$.

Теорема 3.6.1. *Для того чтобы произвольная матрица* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, *тогда существуют единственные ее левая обратная матрица* $(L\mathbf{A})^{-1}$ *и правая обратная* $(R\mathbf{A})^{-1}$ *такие, что* $(L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$ и

$$\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*}=\frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix}\mathbb{L}_{11} & \mathbb{L}_{21} & \dots & \mathbb{L}_{n1}\\ \mathbb{L}_{12} & \mathbb{L}_{22} & \dots & \mathbb{L}_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbb{L}_{1n} & \mathbb{L}_{2n} & \dots & \mathbb{L}_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (3.10)$$

$$\left(R\mathbf{A}\right)^{-1}=\mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}=\frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix}\mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{21} & \dots & \mathbb{R}_{n1}\\ \mathbb{R}_{12} & \mathbb{R}_{22} & \dots & \mathbb{R}_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbb{R}_{1n} & \mathbb{R}_{2n} & \dots & \mathbb{R}_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (3.11)$$

при этом $\mathbb{L}_{ij}=\boldsymbol{cdet}_{j}\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.j}\left(\mathbf{a}^{*}_{.i}\right)$ *и* $\mathbb{R}_{ij}=\boldsymbol{rdet}_{i}\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\,\boldsymbol{)}_{i.}\left(\mathbf{a}^{*}_{j.}\right)$ *для всех* $i,j=\overline{1,n}$.

Доказательство. (Необходимость). Пусть существует обратная $\mathbf{A}^{-1}$ для произвольной матрицы $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M(}\,n,\boldsymbol{S)}$. Тогда в силу теоремы 3.4.3 получим

$$\boldsymbol{rank}\,\mathbf{A}\geq\boldsymbol{rank(}\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}=\boldsymbol{rank}\,\mathbf{I}=n.$$

Отсюда, в силу того, что матрица $\mathbf{A}$ n-ого порядка, $\boldsymbol{rank}\,\mathbf{A}=n$. Поскольку по теореме 3.4.1 $\boldsymbol{rank}\,\mathbf{A}=\boldsymbol{rank}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$, то столбцы эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$ линейно независимые справа. Тогда, по теореме 3.1.4 $\boldsymbol{det(}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}=\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\neq 0$.

(Достаточность) Поскольку, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}=\boldsymbol{det(}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}\neq 0$, то по теореме 3.1.1 для правой соответствующей эрмитовой $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$ существует обратная матрица $\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}$. Умножая ее справа на матрицу $\mathbf{A}^{*}$, получим левую обратную к $\mathbf{A}$, $\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*}$. Действительно,

$$\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}=\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{I}.$$

Раскрывая $\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}$ как левую обратную и используя формулу (2.10), получим:

$$\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}=\left(L\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)\right)^{-1}\mathbf{A}^*=$$

$$=\frac{1}{\boldsymbol{det}\,\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}}\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} & L_{2n} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \sum\limits_k L_{k1}a_{k1}^* & \sum\limits_k L_{k1}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_k L_{k1}a_{kn}^* \\ \sum\limits_k L_{k2}a_{k1}^* & \sum\limits_k L_{k2}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_k L_{k2}a_{kn}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_k L_{kn}a_{k1}^* & \sum\limits_k L_{kn}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_k L_{kn}a_{kn}^* \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{cdet}_1\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.1}\left(\mathbf{a}_{.1}^*\right) & \boldsymbol{cdet}_1\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.1}\left(\mathbf{a}_{.2}^*\right) & \dots & \boldsymbol{cdet}_1\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.1}\left(\mathbf{a}_{.n}^*\right) \\ \boldsymbol{cdet}_2\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.2}\left(\mathbf{a}_{.1}^*\right) & \boldsymbol{cdet}_2\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.2}\left(\mathbf{a}_{.2}^*\right) & \dots & \boldsymbol{cdet}_2\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.2}\left(\mathbf{a}_{.n}^*\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{cdet}_n\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.n}\left(\mathbf{a}_{.1}^*\right) & \boldsymbol{cdet}_n\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.n}\left(\mathbf{a}_{.2}^*\right) & \dots & \boldsymbol{cdet}_n\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.n}\left(\mathbf{a}_{.n}^*\right) \end{pmatrix}$$

Поскольку для всех $j=\overline{1,n}$ j-й столбец матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ имеет вид $\begin{pmatrix} \sum\limits_i a_{1i}^*a_{ij} \\ \vdots \\ \sum\limits_i a_{ni}^*a_{ij} \end{pmatrix}$, то справедливым является соотношение

$$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \sum_i \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)\cdot a_{ij} = \sum_i \mathbb{L}_{ij}\cdot a_{ij}\,. \tag{3.12}$$

Откуда получим формулу (3.10).

Докажем теперь формулу (3.11) для детерминантного представления правой обратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$. По определению 3.5.1 и по условию теоремы $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) \neq 0$, тогда по теореме 3.1.1 для эрмитовой $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ существует обратная матрица $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1}$. Умножая ее слева на матрицу $\mathbf{A}^*$, получим правую обратную матрицу к матрице $\mathbf{A}$, $(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1}$. Действительно, $\mathbf{A}(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1} = \mathbf{I}$.

Раскрывая $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1}$, как правую обратную, и используя формулу (2.5), получим:

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(R\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \ldots & a^*_{1n} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & \ldots & a^*_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^*_{n1} & a^*_{n2} & \ldots & a^*_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{det}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & \ldots & R_{n1} \\ R_{12} & R_{22} & \ldots & R_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{1n} & R_{2n} & \ldots & R_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum\limits_k a^*_{1k}R_{1k} & \sum\limits_k a^*_{1k}R_{2k} & \ldots & \sum\limits_k a^*_{1k}R_{nk} \\ \sum\limits_k a^*_{2k}R_{1k} & \sum\limits_k a^*_{2k}R_{2k} & \ldots & \sum\limits_k a^*_{2k}R_{nk} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_k a^*_{nk}R_{1k} & \sum\limits_k a^*_{1k}R_{1k} & \ldots & \sum\limits_k a^*_{nk}R_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{rdet}_1(\mathbf{AA}^*)_{1\,.}\left(\mathbf{a}^*_{1.}\right) & \boldsymbol{rdet}_2(\mathbf{AA}^*)_{2\,.}\left(\mathbf{a}^*_{1.}\right) & \ldots & \boldsymbol{rdet}_n(\mathbf{AA}^*)_{n\,.}\left(\mathbf{a}^*_{1\,.}\right) \\ \boldsymbol{rdet}_1(\mathbf{AA}^*)_{1\,.}\left(\mathbf{a}^*_{2.}\right) & \boldsymbol{rdet}_2(\mathbf{AA}^*)_{2\,.}\left(\mathbf{a}^*_{2\,.}\right) & \ldots & \boldsymbol{rdet}_n(\mathbf{AA}^*)_{n\,.}\left(\mathbf{a}^*_{2\,.}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{rdet}_1(\mathbf{AA}^*)_{1\,.}\left(\mathbf{a}^*_{n.}\right) & \boldsymbol{rdet}_2(\mathbf{AA}^*)_{2\,.}\left(\mathbf{a}^*_{n\,.}\right) & \ldots & \boldsymbol{rdet}_n(\mathbf{AA}^*)_{n\,.}\left(\mathbf{a}^*_{n\,.}\right) \end{pmatrix}$$

Поскольку для всех $i=\overline{1,n}$ i-я строка матрицы $\mathbf{AA}^*$ имеет вид $\left(\sum_j a_{ij}a^*_{j1}\ldots\sum_j a_{ij}a^*_{jn}\right)$, тогда справедливо соотношение

$$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}=\boldsymbol{det}\,(\,\mathbf{AA}^*\,)=\boldsymbol{rdet}_i(\,\mathbf{AA}^*\,)=\sum_j a_{ij}\cdot\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{G}_{i\,.}\left(\mathbf{a}^*_{j\,.}\right)=\sum_j a_{ij}\cdot\mathbb{R}_{ij}\,.$$

Откуда и получаем формулу (3.11).

Равенство $(L\mathbf{A})^{-1}=(R\mathbf{A})^{-1}$ следует из единственности обратной матрицы над телом.

Теорема доказана.

Замечание 3.6.1. В теореме 3.6.1 предлагается классический метод детерминантного представления обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ для произвольной $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M(n,S)}$, двойной определитель которой не равняется нулю, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\neq 0$, через матрицу, которая является аналогом классической присоединенной. То есть, ее классическую присоединенную можно представить, как матрицу, элементы которой являются левыми двойными алгебраическими дополнениями $\left(\mathbb{L}_{ij}\right)_{n\times n}$, - формула (3.10), или правыми двойными алгебраическими дополнениями $\left(\mathbb{R}_{ij}\right)_{n\times n}$, - формула (3.11), матрицы $\mathbf{A}$. Обозначим ее $\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]$, тогда в теле $\boldsymbol{S}$ выполняется формула:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}.$$

Теорема 3.6.2. *Пусть* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(}n\boldsymbol{, S)}$ *и тело* $\boldsymbol{S}$ *является композиционной ассоциативной нерасщепляемой алгеброй над максимальным упорядоченным полем* $\boldsymbol{F}$ *, тогда выполняются равенства,*

1) $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^{-1} = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{-1}$*;*

2) $\boldsymbol{ddet}\left(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]\right) = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{n-1}$.

Доказательство. Из теоремы 3.5.2 получим

$$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{I} = \boldsymbol{ddet}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = 1 \ .$$

Отсюда, очевидно, вытекает равенство 1) теоремы.

Докажем теперь равенство 2). Использовав представление обратной матрицы (3.10), получим

$$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]] \cdot \mathbf{A} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_1\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.1}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right) \cdot a_{i1} & \dots & \sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_1\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.1}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right) \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_n\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.n}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right) \cdot a_{i1} & \dots & \sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_n\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.n}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right) \cdot a_{in} \end{pmatrix}. \qquad (3.13)$$

За соотношением (3.12) для всех $j = \overline{1\boldsymbol{,}n}$ имеем

$$\sum_i \boldsymbol{cdet}_j\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right) \cdot a_{ij} = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \ .$$

Итак, все элементы главной диагонали матрицы (3.13) равняются $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}$. При условии $j \neq k$ выражение $\sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_j\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right) \cdot a_{ik}$ представляет разложение по j-у столбцу столбцового определителя по j-у столбцу матрицы, которую получим из эрмитовой матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, заменив ее j-й столбец ее k-м столбцом. За теоремой 2.6.4 такой определитель равняется нулю. Поэтому для всех $j \neq k$ имеем $\sum_i \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}(\mathbf{a}^*_{.i}) \cdot a_{ik} = 0$.

Таким образом, $\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]] \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{diag}(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}, \ldots, \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})$. Отсюда, получим

$$\boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]] \cdot \mathbf{A}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{diag}(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}, \ldots, \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})) = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^n .$$

Поскольку, тело $\boldsymbol{S}$ - композиционная ассоциативная нерасщепляемая алгебра над максимальным упорядоченным полем $\boldsymbol{F}$, то за теоремой 3.5.2 имеем

$$\boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]] \cdot \mathbf{A}) = \boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]) \cdot \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^n .$$

Отсюда, $\boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]) = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^{n-1}$.

Теорема доказана.

Этот подраздел подытожим более общим критерием оборотности произвольной квадратной матрицы над телом $\boldsymbol{S}$:

Теорема 3.6.3. *Пусть* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) матрица $\mathbf{A}$ *обратимая;*

б) $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*;*

в) ее соответствующие эрмитовые матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ *невырожденные;*

г) столбцы матрицы $\mathbf{A}$ *линейно независимые справа;*

д) строки матрицы $\mathbf{A}$ *линейно независимые слева;*

е) $\boldsymbol{rank}\,\mathbf{A} = n$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений а) и б) следует из теоремы 3.6.1. Эквивалентность утверждений б) и в) следует из теоремы 3.5.1 и определения невырожденности эрмитовой матрицы. Из теорем 3.3.6 и 3.3.7 следует, соответственно, эквивалентность утверждений в) и г), а также в) и д). Из теорем 3.4.1 и 3.4.2, очевидно, следует эквивалентность утверждения е) с утверждениями д) и г).

Теорема доказана.

3.7. Правило Крамера для систем линейных уравнений над телом

3.7.1. Решение правой системы линейных уравнений. Рассмотрим правую систему линейных уравнений над телом $\boldsymbol{S}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{3.14}$$

с матрицей коэффициентов $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(}n\boldsymbol{,}\,\boldsymbol{S)}$, столбцом свободных элементов $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$, где $y_i \in \boldsymbol{S}$ для всех $i = \overline{1, n}$, и столбцом неизвестных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Матрица $\mathbf{A}$ является основной матрицей системы линейных уравнений (3.14), тогда ее расширенная матрица имеет вид:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \end{pmatrix}$$

Для систем линейных уравнений над телом имеет место теорема Кронекера-Капелли:

Теорема 3.7.1. [34] *Для того чтобы система линейных уравнений над телом была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы равнялся рангу ее основной матрицы.*

Теорема 3.7.2. *Если двойной определитель основной матрицы* $\mathbf{A}$ *правой системы линейных уравнений (3.14) над телом* $\boldsymbol{S}$ *не равняется нулю,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, *тогда система имеет и при этом единственное решение, которое задается формулой для всех* $j = \overline{1, n}$:

$$x_j = \frac{\boldsymbol{cdet}_j\,(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}(\mathbf{f})}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}, \tag{3.15}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$ *- вектор-столбец.*

Доказательство. Докажем существование решения системы, т.е., покажем, что система линейных уравнений (3.14) совместная.

Поскольку, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} \neq 0$, то базисный минор матрицы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ имеет порядок n, это означает, что все n столбцов матрицы $\mathbf{A}$ являются базисными. В силу теоремы 3.3.3 столбцы основной матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимые справа и ранг ее равняется n. Первые n столбцов расширенной матрицы $\mathbf{A}_1$ совпадают с соответствующими столбцами основной матрицы. Следовательно, они также линейно независимые справа. Поскольку правое векторное пространство n-мерных столбцов $R\boldsymbol{S}^n$ имеет размер n, то $n+1$ произвольных n-мерных столбцов линейно зависимые справа. Тогда $n+1$ столбцов расширенной матрицы $\mathbf{A}_1$ также линейно зависимые справа, а n - максимальное число линейно независимых справа столбцов матрицы $\mathbf{A}_1$**.** Таким образом, ранг расширенной матрицы системы линейных уравнений (3.14) также равняется n и по теореме 3.7.1 система линейных уравнений (3.14) является совместной.

Докажем единственность решения системы (3.14). Пусть столбец $\mathbf{x}$ является решением системы, т.е., существует такой n-мерный столбец $\mathbf{x}$ над телом $\boldsymbol{S}$, который превращает уравнение (3.14) в тождественность. Поскольку, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A} \neq 0$, то в силу теоремы 3.6.1 существует матрица $\mathbf{A}^{-1}$ - обратная к матрице $\mathbf{A}$. Будем рассматривать ее, как левую обратную $(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*}$. Умножив тождественность (3.14) слева на $(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*}$, получим

$$\mathbf{x} = (L\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y} = \left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*} \cdot \mathbf{y} \qquad (3.16)$$

Поскольку, матрица $(L\mathbf{A})^{-1}$ задается однозначно, то столбец $\mathbf{x}$, который задается соотношением (3.16), является единственным решением системы линейных уравнений (3.14) над телом $\boldsymbol{S}$.

Пусть $\mathbf{f} := \mathbf{A}^{*} \cdot \mathbf{y}$, где $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ - n-мерный столбец над телом $\boldsymbol{S}$. Запишем решение системы линейных уравнений (3.14) покомпонентно, рассматривая матрицу $\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}$, как левую обратную, тогда из равенства (3.16) получим для всех $j = \overline{1, n}$

$$x_j = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^{-1} \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot f_i\,,$$

где L_{ij} - левое алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$.

Сумма записанная справа, в силу леммы 2.2.2, отвечает столбцовому определителю по j-у столбцу матрицы, которую получим из матрицы $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$, заменив ее j-й столбец, столбцом $\mathbf{f}$, тогда для всех $j = \overline{1, n}$

$$x_j = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \boldsymbol{cdet}_j\,\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\boldsymbol{)}_{.j}\left(\mathbf{f}\right), \ ,$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$.

Теорема доказана.

Замечание 3.7.1. Формулы (3.15) являются очевидным и естественным обобщением правила Крамера для правой системы линейных уравнений над телом $\boldsymbol{S}$. Еще большую аналогию к формулам Крамера можно получить в следующем частичном случае.

Теорема 3.7.3. *Если основная матрица* $\mathbf{A}$ *правой системы линейных уравнений (3.14) над телом* $\mathbf{S}$ *невырожденная эрмитовая, тогда система имеет и при этом единственное решение, который задается формулой для всех* $j = \overline{1,n}$*:*

$$x_j = \frac{\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{y}\right)}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3.7.2, можно показать, что система совместная. Найдем ее решение.

Поскольку, эрмитовая матрица $\mathbf{A}$ - невырожденная, то $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \neq 0$, и в силу теоремы 2.8.1 существует единственная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ - обратная к матрице $\mathbf{A}$. Будем рассматривать ее, как левую обратную $\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}$. Умножив уравнение (3.14) слева на $\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}$, получим

$$\mathbf{x} = \left(L\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y}. \tag{3.17}$$

Столбец $\mathbf{x}$, который задается соотношением (3.17), в силу теоремы 3.1.1, является единственным решением системы линейных уравнений

(3.14) над телом $\boldsymbol{S}$, когда ее основная матрица является невырожденной эрмитовой. Запишем его покомпонентно, тогда для всех $j=\overline{1,n}$:

$$x_j = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot y_i \,,$$

где L_{ij} - левое алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$. Поскольку, сумма записанная справа, по лемме 2.2.2, отвечает столбцовому определителю по j-му столбцу матрицы, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$, заменив ее j-й столбец столбцом $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^T$, тогда для всех $j=\overline{1,n}$ получим

$$x_j = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\, \boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{y}).$$

Теорема доказана.

3.7.2. Решение левой системы линейных уравнений. Рассмотрим левую систему линейных уравнений над телом $\boldsymbol{S}$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{y}, \tag{3.18}$$

с матрицей коэффициентов $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(}n, \boldsymbol{S)}$, строкой свободных элементов $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, где $y_i \in \boldsymbol{S}$ для всех $i=\overline{1,n}$, и столбцом неизвестных $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$. Матрица $\mathbf{A}$ является основной матрицей системы линейных уравнений (3.18), тогда ее расширенная матрица $\mathbf{A}_1$ имеет вид:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

Теорема 3.7.4. *Если двойной определитель основной матрицы* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n, S)}$ *левой системы линейных уравнений (3.18) над телом* $\boldsymbol{S}$ *не равняется нулю,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*, тогда система имеет и при этом единственное решение, который задается следующей формулой для всех* $i = \overline{1, n}$,

$$x_i = \frac{\boldsymbol{rdet}_i(\mathbf{AA}^*)_{i.}(\mathbf{z})}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}, \tag{3.19}$$

где $\mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}^*$ *- вектор-строка.*

Доказательство. Показав, аналогично доказательству теоремы 3.7.2, что система совместная и имеет единственное решение, найдем его представление по формуле (3.19).

Поскольку, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, то в силу теоремы 3.6.1 существует матрица $\mathbf{A}^{-1}$ - обратная к матрице $\mathbf{A}$. Будем рассматривать ее, как правую обратную $(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{AA}^*\right)^{-1}$. Умножив уравнение (3.18) справа на $(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{AA}^*\right)^{-1}$, получим

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot (R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}^*\left(\mathbf{AA}^*\right)^{-1}. \tag{3.20}$$

Пусть $\mathbf{z} := \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}^*$, где $\mathbf{z} = (z_1, \quad z_2, \quad \ldots \quad z_n)$ - n-мерная вектор - строка над телом $\boldsymbol{S}$. Запишем решение, которое задается формулой (3.20), покомпонентно, рассматривая матрицу $\left(\mathbf{AA}^*\right)^{-1}$ как правую обратную, тогда для всех $i=\overline{1,n}$ имеем

$$x_i = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{AA}^*\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n} z_j \cdot R_{ij}\,,$$

где R_{ij} - правое алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы $\mathbf{AA}^*$. Поскольку, сумма записанная справа, по лемме 2.2.1, отвечает строчному определителю по i-й строке матрицы, которую получим из матрицы $\mathbf{AA}^*$ заменой ее i-й строки строкой $\mathbf{z}$, то для всех $i=\overline{1,n}$ имеем

$$x_i = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{-1}\boldsymbol{rdet}_i\,\boldsymbol{(}\,\mathbf{AA}^*\,\boldsymbol{)}_{i.}(\mathbf{z}),$$

где $\mathbf{z} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{A}^*$.

Теорема доказана.

Замечание 3.7.2. Формулы (3.19) являются очевидным и естественным обобщением правила Крамера для левой системы линейных уравнений над телом $\boldsymbol{S}$. Еще большую аналогию формул Крамера можно получить в частичном случае, когда основная матрица системы - эрмитовая.

Теорема 3.7.5. *Если основная матрица $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M(}n,\boldsymbol{S)}$ левой системы линейных уравнений (3.16) над телом $\mathbf{S}$ невырожденная эрмитовая, тогда система имеет и при этом единственное решение, которое задается следующей формулой для всех $i=\overline{1,n}$:*

$$x_i = \frac{\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{y})}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3.7.2, можно показать, что система совместная и имеет единственное решение. Найдем его аналитическое представление.

Поскольку, эрмитовая матрица $\mathbf{A}$ - невырожденная, то $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \neq 0$, и в силу теоремы 3.1.1 существует матрица $\mathbf{A}^{-1}$ - обратная к матрице $\mathbf{A}$. Будем рассматривать ее, как правую обратную $(R\mathbf{A})^{-1}$. Умножив уравнение (3.16) справа на $(R\mathbf{A})^{-1}$, получим

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot (R\mathbf{A})^{-1}. \tag{3.21}$$

Запишем решение, которое задается формулой (3.21), покомпонентно для всех $i = \overline{1,n}$:

$$x_i = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot R_{ij},$$

где R_{ij} - правое алгебраическое дополнение элемента b_{ij} матрицы $\mathbf{A}$.

Поскольку, сумма записана справа, по леммой 2.2.1, отвечает строчному определителю по i-й строке матрицы, которую получим из матрицы $\mathbf{A}$ заменой ее i-й строки строкой $\mathbf{y}$, то для всех $i = \overline{1,n}$ имеем $x_i = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\, \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{y})$.

Теорема доказана.

3.8. Выводы

1. В первом подразделе получено детерминантное представление матрицы обратной к эрмитовой над телом с инволюцией через классическую присоединенную. Доказана теорема об определите-

ле матрицы обратной к эрмитовой. Показано, что определитель эрмитовой матрицы удовлетворяет ключевую аксиому 1.

2. Во втором подразделе вводятся понятия левой и правой соответствующих эрмитовых матриц для произвольной матрицы над телом. Исследованы свойства, которые устанавливают зависимость между произвольной матрицей над телом и соответствующими ей эрмитовыми матрицами.
3. В третьем подразделе доказаны теоремы о базисных минорах соответствующих эрмитовых матриц над телом с инволюцией и установлены критерии вырожденности этих матриц в зависимости от исходной произвольной матрицы. Вводится понятие ранга по главным минорам для эрмитовой матрицы, зависимость между этим рангом для соответствующих эрмитовых матриц и рангом исходной матрицы установлена в четвертом подразделе.
4. В пятом подразделе доказана теорема о равенстве определителей левой и правой соответствующих эрмитовых матриц для произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией, на основании которой вводится понятие двойного определителя квадратной матрицы над телом. Показано, что этот определитель удовлетворяет аксиомы 1 и 3 определения 1.1.1 некоммутативного определителя, а также свойство разложения Лапласа определителя по любой строке или столбцу. А если тело $\boldsymbol{S}$ является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над максимальным упорядоченным полем $\boldsymbol{F}$, в частности является телом кватернионов, то двойной определитель также удовлетворяет еще и аксиому 2. Над телом кватернионов установлена зависимость между двойным определителем и другими известными некоммутативными определителями.

5. В шестом подразделе установлены критерии обратимости квадратной матрицы над телом в рамках теории столбцовых и строчных определителей. Впервые для квадратной матрицы с некоммутирующими элементами получено детерминантное представление обратной матрицы через матрицу, которая является аналогом классической присоединенной. Доказано теорему о двойных определителях обраной и аналога классической присоединённой матриць.
6. В седьмом подразделе впервые решения правой и левой систем линейных уравнений над телом находятся по формулами, которые обобщают правило Крамера.

Основные результаты раздела изложены в роботах [8 -11, 14-25, 27-29].

ВЫВОДЫ

1. Введены новые понятия столбцовых и строчных определителей квадратных матриц над телом, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над своим центром - полем нулевой характеристики. На основании исследованных свойств этих определителей показано, что для произвольных квадратных матриц над телом с инволюцией они являются полным и естественным обобщениям определителя Мура, который рассматривался только для эрмитовых матриц.
2. Для произвольной квадратной матрицы над данным телом эти определители, как матричные функционалы, не удовлетворяют аксиомы некоммутативного определителя, а потому являются пред-определителями. Но, введенный в рамках теории столбцовых и строчных определителей, определитель эрмитовой матрицы удовлетворяет ключевую аксиому некоммутативного определителя, а также свойство разложения Лапласа по любой строке или столбцу матрицы. Это разрешает ввести понятие правого или левого алгебраического дополнения произвольного элемента эрмитовой матрицы и получить детерминантное представление матрицы обратной к эрмитовой через классическую присоединенную.
3. На основании теории столбцовых и строчных определителей для произвольной квадратной матрицы над телом вводится понятие двойного определителя. Двойной определитель представлен как определитель, который удовлетворяет как аксиомы некоммутативного определителя, так и свойство разложения Лапласа по любому столбцу или строке матрицы над телом, которое является ассоциативной композиционной нерасщепляемой алгеброй над своим центром - максимальным упорядоченным полем.

4. Установлен критерий оборотности произвольной квадратной матрицы над телом с инволюцией в терминах теории столбцовых и строчных определителей. Получено детерминантное представление обратной матрицы над телом с инволюцией через аналог классической присоединенной.
5. Решения левой и правой систем линейных уравнений над телом с инволюцией находятся по формулам, которые обобщают правило Крамера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Артин Э. Геометрическая алгебра. - М.: Наука. 1969, 284 с.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. - М.: Наука. 1965, 300 с.
3. Ван-дер-Варден Б. Л. Алгебра.- М.: Наука, 1979.
4. Гельфанд И. М., Ретах В. С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами // Функциональный анализ и его приложения. - 1991.-**25**, Вып. 2. - С. 13-35.
5. Гельфанд И. М., Ретах В. С. Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов // Функциональный анализ и его приложения. –1992.- **26**, Вып. 4. - С. 33-45.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
7. Жевлаков К.А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца близкие к ассоциативным. - М.: Наука, 1978.
8. Кирчей И. И. Дробово-рациональная регуляризация системы линейных уравнений над телом кватернионов // Мат. методы и физико-механические поля. – 1996 - **39**, -№ 2. - С. 89-95.
9. Кирчей И. И. Классическая присоединенная матрица для эрмитовой над телом // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2001 – **44**, №3. - С. 33-48.
10. Кирчей И. И. Матрица, обратная к эрмитовой над телом // Вестник Львов.ун-ту. Сэр. прикл. математика и информатика. – 2002. – Вип. 4. - С. 120-125.
11. Кирчей И. И. Аналог классической присоединенной матрицы над телом с инволюцией // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2003. – **46**, №4. - С. 81-91.
12. Кирчей И. И. Представление обобщенной обратной Мура-Пенроуза через аналог присоединенной матрицы // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2004. – **47**, №4. - С. 6-11.

13. Кирчей И. И. Детерминантное изображение матрицы Дразина // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2006. – **49**, №2. – С.58–64.
14. Кирчей И. И.. Правило Крамера над кватернионовой алгеброй с делением// Вестник Киевского университета. Серия физико-математические науки. - 2006. - №1. - С. 28-34.
15. Кирчей И. И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // Фундамент. и прикл. матем. – 2007. - **13:4**. - С. 67-94.
16. Кирчей И. И. О системах линейных уравнений в алгебре кватернионов // Международная школа-семинар “Цепные дроби, их обобщение и применение” (18-25. 9. 1994, Верхнее Синевидное). Тезиса докладов. – Львов, 1994. - С. 4.
17. Кирчей И. И. J- дробовая регуляризация системы линейных уравнений над телом кватернионов // Тезиса докладов IV Международной научной конференции им. академика М. Кравчука (11-14. 04. 1995, г. Киев). – Киев. - 1995. - С. 122.
18. Кирчей И. И. Обратная матрица над телом // IX Международная научная конференция им. академика М. Кравчука (16-19. 04. 2002, г. Киев). Материалы конференции. - Киев, 2002. - С. 297.
19. Кирчей И. И. Аналог классической присоединенной матрицы над телом // Международная школа-семинар “Цепные дроби, их обобщение и применение” (19-24. 08. 2002, г. Ужгород). Тезиса докладов. - Ужгород, 2002. - С. 36.
20. Кирчей И. И. Нормальное решение систем линейных уравнений над телом // III Всеукраинская научная конференция (9-12. 09. 2003, г. Ивано-Франковск). Тезиса докладов. - Ивано-Франковск, 2003. - С. 46.
21. Кирчей И. И. Правило Крамера над телом кватернионов // X Международная научная конференция им. академика М. Кравчука (13-16.04. 2004, г. Киев). Материалы конференции. - Киев, 2004. - С. 302.

22. Kyrchei I. I. Determinantal representation of Moore-Penrose inverse // Конференция “Функциональные методы в теории приближений, теории операторов, стохастичному анализе и статистике II”, посвящённая памяти А. Я. Дороговцева (4-8. 10. 2004, г. Киев). Тезиса докладов. - Киев, 2004. - С.77.
23. Кирчей И. И. Обобщенная обратная матрица над телом // Международная конференция им. В. Я. Скоробагатька (27.09 - 1.10.2004, г. Дрогобыч). Тезиса докладов. - Львов, 2004. - С.92.
24. Kyrchei I.I. Generalization of Cramer's rule over a skew field // Международная агебраическая конференция, посвящённая 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (26.05 – 2.06 2004, г. Москва, Россия). Тезисы докладов. - Москва, 2004. - С.226- 228.
25. Kyrchei I.I. The least square solution of system of linear equations over the quaternion skew field // Международная алгебраическая конференция (29.08. – 3.09.2005, г. Екатеринбург, Россия). Тезисы докладов. - Екатеринбург, 2005. - С. 128-129.
26. Кирчей И.И. Аналог правила Крамера для нормального решениа систем линейных уравнений // Материалы международного симпозиума "Вопросы оптимизации вычислений (ПОО-XXXII)” (23-28 .09. 2005, г. Ялта) - Киев, 2005. - С. 189.
27. Kyrchei I. Determinantal representation of the inverse matrix over the quaternion skew field // 5th International Algebraic Conference in Ukraine (20-27.06. 2005, Odessa), Abstracts. - Odessa, 2005. - P. 120.
28. Кирчей И.И. Детерминантное изображение обобщенной обратной Мура - Пенроуза // XI Международная научная конференция им. академика М. Кравчука (18-20. 05. 2006, г. Киев). Материалы конференции. - Киев, 2006. - С. 452.

29. Kyrchei I. Determinantal representation of the Moore-Penrose inverse matrix over quaternion skew field // 6th International Algebraic Conference in Ukraine (1-7. 07. 2007, Kamyanets-Podilsky). Abstracts. - Kamyanets-Podilsky, 2007. - P. 120 - 121.

30. Кирчей И. И. Детерминантное изображение матрицы Дразина. / Работы международного симпозиума "Вопросы оптимизации вычислений (ПОО-XXXIII)” (23-28. 09. 2007, г. Ялта) - Киев, 2007. - С. 121-122.

31. Кирчей И. И. Правило Крамера для системы обобщенных нормальных уравнений // Международная конференция им. В. Я. Скоробагатька (24-28. 09. 2007, г. Дрогобыч). Тезиса докладов. - Львов, 2007. - С.126.

32. Ланкастер П. Теория матриц. - М.: Наука, 1978.

33. Ленг С. Алгебра.- М.: Мир, 1968.

34. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. - М.:Наука, 1970.

35. Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т.1, Под общ. ред. Л. А. Скорнякова - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит. 1990. - 592 с.

36. Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т.2, Под общ. ред. Л.А.Скорнякова - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит. 1990. - 480 с.

37. Понизовский И. С. Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца// Математический сборник - 1958 - **45** (87) №1. - С. 3-16,

38. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. - М.: Наука. - 1983.

39. Сявавко М. С. Обобщение формул Крамера // Укр. мат. журнал. - 2001 - **53**, №3. - С. 25-43.

40. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. - 655 с.

41. Adler S. Quaternionic quantum mechanics and quantum Fields. - New York: Oxford UP. - 1995.

42. Albert A. A. Structure of algebras. AMS Colloquium Publications. Vol. **24.** - Rhode Island: Providence, 1961.

43. Amitsur S. A., Rowen L. H., Tignol J.-P. Division algebras of degree 4 and 8 with involution// Israel J. Math. – 1979. – **33**. - P. 133-148.

44. Artin M., Shelter W., Tate J. Quantum deformations of $\boldsymbol{GL_n}$ // Comm. On Pure and Appl. Math.- 1991. - **44** - P.879-895.

45. Aslaksen H. Quaternionic determinants // Mathematics Intelligencer. - 1996. - **18(3) -** P.57-65.

46. Brenner J. L. Applications of the Diedonne determinant // Linear Algebra and its Applications. - 1968 - **1** -P.511- 536,.

47. Brenner J. L. Matrices of quaternions // Pacific Journal of Mathematics. – 1951 - **1** - P.329- 335.

48. Cayley A. On certain results relating to quaternions // Phil. Mag.-1845. - V.**26.** - P.41-145; reprinted in The Collected Mathematical Papers. – Cambridge University Press, Cambridge. - 1989. - **1** - P.123-126.

49. Chen L. Definition of determinant and Cramer solutions over quaternion field // Acta Math. Sinica (N. S.).– 1991 – **7** – P. 171-180.

50. Chen L. Inverse matrix and properties of double determinant over quaternion field // Science of China. Ser.A - 1991. - **34** - P. 528-540.

51. Cohen N., De Leo S. The quaternionic determinant // The Electronic Journal Linear Algebra. - 2000. - **7 -** P.100-111.

52. Cohn P. M. The similarity reduction of matrices over a skew field // Math. Z. - 1973. - **132** - P.151- 163.

53. Cohn P. M. Skew field constructions. London: Cambridge U. P. 1977.

54. Costa C., Serodio R. A footnote on quaternion block-tridiagonal systems // Electronic Transactions on Numerical Analysis. - 1999 - **9** -P. 53-55.

55. Diedonne J. Les determinantes sur une corps non commutatif // Bull. Soc. Math. France. - 1943. - **71 -** P.27-45.

56. Dyson F. J. Quaternion determinants // Helv Phys. Acta. - 1972. - **45** - P.289-302.

57. Eilenberg S., Niven I. The fundamental theorem of algebra for quaternions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1944 -50. - P. 246-248.

58. Elduque A., Perez-Izquierdo J. M. Composition algebras of degree two // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1999- **42** – P.641-653.

59. Finkelstein D., Jauch J. M., D. Speiser. Notes on Quaternion Quantum Mechanics. Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics II. Dordrecht: Hooker Reidel. -1979.- P.367-421.

60. Foata D. A noncommutative version of the matrix inversion formula // Adv. in Math. - 1996. - **31** (3) - P. 330-349.

61. Fonseca C. M. On determinant preservers over skew fields // Portugallae Mathematica. – 1998. – **55,** N. 2. - P.209-218.

62. Hijikata H., Pizer A. K., Shemanske T. R. Orders in quaternion algebras // J. Reine Angew. Math. - 1989. - **394** - P.59-106, .

63. Heyting A. Die Theorie der linearen Gleichungenin einer Zahlenspezies mit nicht-kommutativer Multiplikation // Math. Ann. - 1927. - **98** - P.465-490.

64. Gelfand I., Retakh V. Quasideterminants // J. Selecta Math. -1997. -**3** (4) - P.517-546.

65. Gursey F., Tze C. H. On the Role of Division, Fordan and Related Algebras in Particle Physics. Singapore: World Scientific. 1996.

66. Johnson N. W., Weiss A. I. Quaternionic modular groups // Linear Algebra and its Applications. - 1999. - **295** - P.159- 189.

67. Knus M. A., Parimala R., Sridharan R. On compositions and triality // J. Reine Angew. Math. - 1994. - **457 -** P.45-70.

68. Knus M., Merkurjev A., Rost M., Tignol J.-P. The Book of Involutions, AMS Colloquium Publ. V. **44.** Rhode Island: Providence. 1998.

69. Lee H. S. Eigenvalues and canonical forms for matrices with quaternion coefficients // Proc. Royal Irish Academy, Section A. - 1949. - **52** - P. 253-260.

70. De Leo S., Scolarici G. Right eigenvalue equation in quaternionic quantum mechanics // J.Math. Phys. - 2000. - **36** - P.2971- 2995.

71. D. W. Lewis. Sums of squares in central simple algebras// Math. Zeitschrift – 1985. – **190.** - P. 497-498.

72. Lewis D. W. Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton's quaternions // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2006. – **57**. P. 41-64.

73. Lewis D. W. Congruence of skew-Hermitian matrices // IMS Bulletin. - 1997. - **39** - P. 6-9.

74. Madan Lal Mehta. Determinants of quaternion matrices// J. Math. Phys. Sci. - 1974. - **8** - P.559- 570.

75. Marchiafava, Piccinni P., Pontecorvo M. Quaternionic structures in mathematics and physics. New Jersey: World Scientific, River Edge. 2001.

76. McCrimon K. Nonassociative algebra with scalar involution// Pacific Journal of Math. -1985. - **116(1) -** P.85-108.

77. Moore E. H. On the determinant of a hermitian matrix of quaternionic elements // Bull. Amer. Math. Soc. - 1922. - **28** - P.161- 162.

78. Moore E. H. General Analysis Part 1. Memoirs of Amer. Phil. Soc. Philadelphia. 1935.

79. Niven I. M. Equations in quaternions // Amer. Math. Monthly – 1941.- **48. -** P.654-661.

80. Ore O. Linear equations in noncommutative rings // Ann. Math. - 1936. - **32 -** P. 463-477.

81. Van Praag P. Une caractérisation des corps de quaternions // Bull. Soc. Math. Belgique. - 1968. - **10** - P.283–285.

82. Van Praag P. Les formes hermitiennes quaternioniennes et le déterminant d'Eliakim Hastings Moore // Bull. Soc. Math. Belgique. - 1990 - Sér. A. **42** - P.767-775.
83. Pierce R. S. Associative Algebras. Springer-Verlag. New York. 1982.
84. Richardson A. R. Hypercomplex determinants // Massenger of Math. - 1926. - **55** - P.145-152.
85. Schafer R. D. An Introduction to Nonassociative Algebras. Academic Press. New-York. 1966.
86. Study E. Zur Theorie der linearen Gleichungen // Acta Math. -1920. - **42** - P.1-61.
87. Szeto G. On generalized quaternion algebras // Internat. J. Math. Sci. – 1980. – **3**, N 2. - P. 27-45.
88. Tignol J. P. Pfaffiens et Déterminant de E.H. Moore // Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin. - 1999. - **6** - P.537-539.
89. Tian Y. Matrix representations of octonions and their applications//Advances in App. Clifford Algebras. – 2000. - **10**, N 1. - P. 61-90.
90. Tian Y. Similarity and consimilarity of elements in the real Cayley-Dickson algebras // Advances in App.Clifford Algebras. - 1999. - **9**, N.1. - P.61-76.
91. Vigneras M.-F. Arithmetiques des algebras de quaternions. Lecture Notes in Mathematics 800. Springer. Berlin. 1980.
92. Ward J. P. Quaternions and Cayley numbers: Algebra and applications// Mathematics and its applications. Kluwer. Dordrecht. - V. **403.** - 1997.
93. Wiegmann N. A. Some theorems on matrices with real quaternion elements // Canad. J. Math. - 1955. – **7**. - P. 191-201.
94. Wolf L. A. Similarity of matrices in which the elements are real quaternions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1936. – **42**. - P. 737-743.
95. Zhang F. Quaternions and matrices of quaternions // Linear Algebra and its Applications. - 1997. - **251** - P.21- 57.