Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України

На правах рукопису

УДК 512.643.2

КИРЧЕЙ
ІВАН ІГОРОВИЧ

ТЕОРІЯ СТОВПЦЕВИХ І РЯДКОВИХ ВИЗНАЧНИКІВ ТА ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ НАД ТІЛОМ З ІНВОЛЮЦЄЮ

Спеціальність 01.01.06 – алгебра і теорія чисел

ДИСЕРТАЦІЯ

на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фіз.–мат. наук,
професор Сявавко М. С.

Київ 2008

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Теорія визначників матриць із некомутуючими елементами, їх ще називають некомутативними визначниками, вже на протязі кількох століть приковує до себе увагу математиків. Хронологія робіт, в яких вводиться нове поняття некомутативного визначника, розпочинається ще від роботи А. Келі 1845 року, але продовжується й досі. Найбільш відоме означення некомутативного визначника, а саме визначника квадратної матриці над тілом, належить Ж. Дьйодонне, який його значення запропонував розглядати не в самому тілі, а в приєднаному до нього об'єкті – факторі по комутанту. Такого ж роду означення було введене Е. Стаді для квадратних матриць над тілом кватерніонів, а також узагальнювалося Й. С. Понізовським, який розглядав визначник квадратної матриці над довільним кільцем, а в якості приєднаного об'єкта - довільну комутативну півгрупу.

Кардинально інше означення некомутативного визначника недавно було запропоноване І. М. Гельфандом та В. С. Ретахом, які квадратній матриці n-го порядку над тілом зіставляють матрицю її квазідетермінантів того ж порядку. Таким чином, замість одного визначника вони вводять n^2 квазідетермінантів, переносячи з комутативного випадку не саме поняття визначника, а його відношення до мінорів порядку $n-1$.

Третій спосіб означення некомутативного визначника – розглядати його подібно комутативному випадку, як альтерновану суму мономів від елементів матриці, фіксуючи додатково порядок елементів у цих мономах. Найбільш ґрунтовно та успішно цей спосіб був розроблений в роботах Е. Г. Мура та Ф. Д. Дайсона, але тільки для певного класу матриць - а саме ермітових матриць над тілом. Певне узагальнення такого визначника для довільних квадратних матриць над тілом кватерніонів здійснив Л. Чен.

В той же час жоден із досі введених некомутативних визначників не узагальнює в повному обсязі, в сенсі збереження всіх властивостей та застосувань, визначник комплексної матриці. Більше того, деякі питання з теорії матриць над некомутативним кільцем досі залишаються відкритими, хоча аналогічні задачі знаходять свій розв'язок засобом визначника у комутативному випадку. Так досі нерозв'язаними залишалися такі актуальні проблеми лінійної алгебри над тілом, як аналітичне зображення класичної приєднаної матриці і, як наслідок, узагальнення правила Крамера для систем лінійних рівнянь над тілом. Розробці цих питань присвячена дана дисертаційна робота.

Актуальність досліджень, які проводяться в лінійній алгебрі над тілом (зокрема, тілом кватерніонів), зростає ще й унаслідок потреб теоретичної фізики, особливо в контексті квантової механіки та теорії поля, що відображено в роботах [41, 59, 65, 70, 75] С. Адлера, Ф. Гурсі, С. Де Лео, П. Ротеллі, Д. Фінкельштейна та інших. З появою суперсиметричних теорій і квантових груп [44] виникла насущна необхідність розглядати матриці, що містять антикомутуючі чи взагалі некомутативні елементи. Тому розгляд визначників таких матриць є важливим узагальненням поняття визначника. Усе це й обумовлює актуальність і вибір теми дисертаційного дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримані в рамках виконання держбюджетної теми Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: ”Розвиток диференціально-геометричних та аналітичних методів дослідження інваріантних рівнянь математичної і теоретичної фізики” (номер держреєстрації 0101U000451).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертації є означення та дослідження властивостей стовпцевих та рядкових визначників квадратних матриць над тілом з інволюцією, які б узагальнювали визначник Е. Г. Мура, уведений для ермітових матриць; встановлення критерію оборотності квадратних матриць над тілом у рамках побудованої теорії визначників та визначникове зображення оберненої матриці над тілом через аналог класичної приєднаної матриці; узагальнення правила Крамера для лівих та правих систем лінійних рівнянь над тілом з інволюцією, яке є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над своїм центром – полем нульової характеристики.

Для досягнення цієї мети здійснюється постановка та вирішення наступних задач:

- дати означення та дослідити властивості рядкових та стовпцевих визначників квадратних матриць над тілом з інволюцією, що є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над полем нульової характеристики;
- у рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників дати означення визначника ермітової матриці, що співпадає з визначником Мура, та дослідити його властивості виражені через стовпцеві та рядкові визначники;
- аналітично зобразити обернену до ермітової матриці над тілом з інволюцією через класичну приєднану;
- дати означення в рамках теорії стовпцевих та рядкових визначників та дослідити властивості подвійного визначника квадратної матриці над тілом з інволюцією;
- одержати визначникове зображення оберненої матриці через аналог класичної приєднаної для довільної оборотної квадратної матриці над тілом з інволюцією;

- аналітично зобразити розв'язки правої та лівої систем лінійних рівнянь над тілом, як узагальнення правила Крамера.

Об'єктом дослідження є матриці над тілом, яке є асоціативною композиційною алгеброю з діленням над своїм центром – полем нульової характеристики.

Предметом дослідження є некомутативні визначники квадратних матриць над тілом з інволюцією.

Методи дослідження: методи теорії некомутативних кілець та алгебр, теорії матриць над тілом.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна роботи полягає в таких основних положеннях.

1. Введені поняття та розроблена теорія нових матричних функціоналів, - стовпцевих і рядкових визначників квадратних матриць над тілом, яке є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над своїм центром – полем нульової характеристики.
2. У рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників введене поняття визначника ермітової матриці, що співпадає з визначником Мура, а також подвійного визначника квадратної матриці над тілом з інволюцією. Показано, що множина всіх стовпцевих та рядкових визначників є повним та природним узагальненням визначника Мура для довільної квадратної матриці над тілом. Подвійний визначник представлений як визначник, що задовольняє як аксіоми некомутативного визначника так і, засобом стовпцевих і рядкових визначників, властивість розкладу Лапласа по будь-якому стовпцю чи рядку матриці.

3. Одержано визначникове зображення оберненої матриці через класичну приєднану для оборотної ермітової матриці над тілом з інволюцією.
4. Одержано визначникове зображення оберненої матриці через аналог класичної приєднаної для довільної оборотної квадратної матриці над тілом з інволюцією.
5. Розв'язки правих та лівих систем лінійних рівнянь над тілом зображені як узагальнення правила Крамера.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором самостійно.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати в подальших наукових дослідженнях алгебри матриць з некомутуючими елементами, а також в дослідженнях, що застосовують некомутативні визначники, зокрема, в галузях теоретичної фізики та квантової механіки.

Апробація результатів дисертації. Основні результати, одержані в дисертаційній роботі, доповідалися і обговорювалися на: Міжнародній конференції з алгебри в Україні (м. Львів, 2003; м. Одеса, 2005; м. Кам'янець-Подільський, 2007), Міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (м. Київ, 1994, 2002, 2004, 2006), Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробагатька (м. Дрогобич, 2004, 2007), International Conference on Matrix Analysis and Applications (Nova Southeastern University, Fort Lauderdale, Florida, USA, 2003), Международной алгебраической конференции посвященной 250-летию Московского государственного университета (г. Москва, Россия, 2004), Международной алгебраической конференции посвященной 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина (г. Екатеринбург, Россия, 2005), ІІІ Всеукраїнській науковій конференції “Нелінійні проблеми аналізу” (м. Івано-Франківськ, 2003), Міжнародній школі-семінарі “Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування” (с.м.т. Верхнє Синьовидне Львівської обл., 1994; Ужгород, 2002), засіданнях семінару ім. В. Я. Скоробагатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (м. Львів, 2001-2008), засіданнях загальноінститутського математичного семінару Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (м. Львів, 2005, 2008), засіданнях Львівського міського наукового семінару з алгебри (м. Львів, 2001, 2004), засіданні семінару з алгебри Київського національного університету ім. Т.Г.Шевченка (м. Київ, 2004).

Публікації. Результати, що включені до дисертації, достатньо повно викладені у 17 публікаціях, в тому числі у шести статтях у фахових наукових виданнях із переліку, затвердженого ВАК України та одинадцяти тезах міжнародних та всеукраїнських конференцій.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.
ТЕОРІЯ НЕКОМУТАТИВНИХ ВИЗНАЧНИКІВ

Питання визначникового зображення оберненої матриці над тілом через аналог класичної приєднаної матриці і, як наслідок, розв'язок систем лінійних рівнянь над тілом за правилом Крамера й досі залишаються відкритими [45, 50, 51, 56, 95]. Ключовим у розв'язанні цієї задачі є означення некомутативного визначника, тобто визначника квадратної матриці з некомутуючими елементами, і в цьому плані історично склалося кілька підходів.

1.1. Аксіоми некомутативного визначника

Перший спосіб – це означення некомутативного визначника, як образу відображення, що задовольняє необхідну для означення та достатню групу з трьох аксіом, яка в сучасній літературі є загальновизнаною (див., наприклад, [37, 45, 51, 56]).

Позначимо через $\boldsymbol{M(n,K)}$ кільце квадратних матриць n-го порядку над кільцем $\boldsymbol{K}$.

Означення 1.1.1. Нехай функціонал $\boldsymbol{d}:\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{K})\to \boldsymbol{K}$ задовольняє наступні аксіоми.

Аксіома 1. (Виродженість.) $\boldsymbol{d}(\mathbf{A})=0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{A}$ *вироджена (необоротна) матриця.*

Аксіома 2. (Мультиплікативність.) $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\boldsymbol{d}(\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{d}(\mathbf{B})$.

Аксіома 3. (Інваріантність.) *Якщо матриця* $\tilde{\mathbf{A}}$ *одержується з квадратної матриці* $\mathbf{A}$ *через додавання до її довільного рядка, помноженого зліва на елемент кільця, її інший рядок, або через додавання до її довільного стовпця, помноженого справа на елемент кільця, її інший стовпець, тоді* $\boldsymbol{det}\,\tilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$.

Тоді значення функціоналу $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}) \in \boldsymbol{K}$ називають *визначником квадратної матриці* $\mathbf{A}$ n*-го порядку над кільцем* $\boldsymbol{K}$.

Позначимо через $\mathbf{I}$ - одиничну матрицю, $\mathbf{E}_{ij}$ - матрицю на перетині i-го рядка та j-го стовпця якої знаходиться 1, а всі інші елементи є нулями. Тоді матриця $\mathbf{P}_{ij}(b) = \mathbf{I} + b \cdot \mathbf{E}_{ij}$ при $i \neq j$ відрізняється від одиничної елементом $b \in \boldsymbol{K}$, що знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця для всіх $i, j = \overline{1, n}$.

Замість аксіоми 3 також використовують [45] еквівалентну їй наступну аксіому.

Аксіома 3'. *Для довільного елемента* $b \in \boldsymbol{K}$ *та для всіх* $i, j = \overline{1, n}$ *таких, що* $i \neq j$, *маємо рівність* $\boldsymbol{d}(\mathbf{P}_{ij}(b)) = 1$.

Означення 1.1.2. Група всіх невироджених (оборотних) квадратних матриць порядку n над кільцем $\boldsymbol{K}$ називається *повною лінійною групою* і позначається $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{K})$. Матриці $\mathbf{P}_{ij}(b)$ (для всіх $i \neq j$ та всіх $b \in \boldsymbol{K}$) породжують підгрупу $\boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{K})$, яка називається *унімодулярною групою*, а її елементи називають *унімодулярними матрицями*.

Має місце теорема.

Теорема 1.1.1. [45] *Нехай* $\boldsymbol{d}$ *задовольняє аксіоми 1, 2, 3, тоді образ* $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{K}))$ *є комутативною підмножиною* $\boldsymbol{K}$.

Як уже випливає з цієї теореми тільки засобом такого визначника, визначника що задовольняє аксіоми 1, 2, 3, неможливо аналітично зобразити класичну приєднану матрицю $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ для довільної оборотної матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{K})$ над кільцем $\boldsymbol{K}$. Оскільки, з одного боку елементи матриці $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ за означенням класичної приєднаної є алгебричними доповненнями, тобто визначниками відповідних підматриць матриці $\mathbf{A}$, що за теоремою 1.1.1 означає, що вони належать комутативній підмножині кільця $\boldsymbol{K}$. А з іншого - елементи приєднаної матриці для довільної матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{K})$ в загальному є довільними елементами кільця.

Розглянемо аксіому адитивності визначникового відображення відносно її довільного рядка.

Аксіома 3*. *Нехай для квадратних матриць* $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $\mathbf{C} = (c_{ij})$, *де* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} \subset \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{K})$, *існує такий індекс* $r \in I_n = \{1, \ldots, n\}$, *що:*

$$a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}, \text{ коли } i \neq r,$$

$$a_{rj} + b_{rj} = c_{rj} \text{ для всіх } j = \overline{1, n},$$

тоді $\boldsymbol{d}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{d}(\mathbf{B}) = \boldsymbol{d}(\mathbf{C})$.

Має місце теорема, яку довів Фрімен Дайсон.

Теорема 1.1.2. [49] *Нехай* $\boldsymbol{K}$ *кільце з одиницею і без дільників нуля. Якщо на матричному кільці* $\boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{K})$ *з* $n > 1$ *існує відображення* d, *що задовольняє аксіоми 1, 2, 3*, тоді* $\boldsymbol{K}$ *є комутативним кільцем.*

Враховуючи цей факт, - те, що над кільцем не існує визначникового відображення, яке б задовольняло аксіоми 1, 2, 3*, він запропонував вважати аксіому 1 необхідною й ключовою для означення некомутативного визначника.

1.1.1. Визначник Е. Стаді. Одним із найбільш відомих прикладів визначника, як образу відображення, що задовольняє аксіоми 1, 2, 3, є визначник Стаді. Він увів його (у роботі [86]) для квадратних матриць над тілом кватерніонів $\boldsymbol{H}$. Його ідея полягала в тому, щоб квадратну матрицю n-го порядку над тілом кватерніонів трансформувати в комплексну квадратну матрицю порядку $2n$.

Довільну квадратну матрицю $\mathbf{M} \in \boldsymbol{M(n,H)}$ можна однозначно подати у вигляді: $\mathbf{M} = \mathbf{A} + j \cdot \mathbf{B}$, де $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} \subset \boldsymbol{M(n,C)}$, $\boldsymbol{C}$ - поле комплексних чисел.

Означення 1.1.3. Означимо гомоморфізм $\varphi(\mathbf{M}) = \varphi(\mathbf{A} + j \cdot \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\overline{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B} & -\overline{\mathbf{A}} \end{pmatrix}$, тоді $\boldsymbol{Sdet}\,\mathbf{M} := \boldsymbol{det_C}\,\varphi(\mathbf{M})$ - *визначник Стаді* для квадратної матриці $\mathbf{M}$ над тілом кватерніонів $\boldsymbol{H}$, де $\overline{\mathbf{A}}$ - матриця, елементи якої спряжені до відповідних елементів матриці $\mathbf{A}$.

Крім того, вводиться ін’єктивний гомоморфізм $\phi: \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{M}(2n,\boldsymbol{R})$ із кільця комплексних квадратних матриць n-го порядку в кільце дійсних квадратних матриць порядку $2n$:

$$\phi(\mathbf{C} + i\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{C} \end{pmatrix},$$

Має місце теорема.

Теорема 1.1.3. [86, 45] *Для довільної комплексної матриці* $\mathbf{N}$ *маємо*

$$\boldsymbol{det_R}\,\phi(\mathbf{N}) = |\boldsymbol{det_C}\,\mathbf{N}|^2 \ge 0,$$

і для довільної матриці $\mathbf{M}$ *над тілом кватерніонів:*

$$\boldsymbol{det_C}\,\varphi(\mathbf{M}) = \sqrt{\boldsymbol{det_R}\,\phi(\varphi(\mathbf{M}))} \ge 0\,.$$

1.1.2. Визначник Ж. Дьйодоннѐ. Інший не менш відомий приклад визначникового функціоналу, що задовольняє аксіоми 1, 2 і 3, був уведений

Жаном Дьйодоннѐ. Він розглядав [55] його для квадратних матриць над довільним тілом $\boldsymbol{S}$.

Має місце теорема.

Теорема 1.1.4.[1, 55] *Довільна оборотна матриця* $\forall \mathbf{A} \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{S})$ *може бути зображена у вигляді* $\mathbf{A} = \mathbf{D}(x) \cdot \mathbf{B}$, *де*

$$\mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S}).$$

Наступна теорема стверджує, що $\boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ є комутантом групи $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{S})$.

Теорема 1.1.5.[1, 45, 55] $\boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S}) = [\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{S}), \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{S})]$.

Теорема 1.1.6. [1,45, 55] *Нехай* $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S} - \{0\}$ *- мультиплікативна група тіла* $\boldsymbol{S}$. *Тоді*

$$\mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

є комутатором у групі $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{S})$, *тобто,* $\mathbf{D}(x) \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ *тоді і тільки тоді, коли* x *є комутатором в* $\boldsymbol{S}^*$.

У розкладі $\mathbf{A} = \mathbf{D}(x) \cdot \mathbf{B}$ ні x, ні $\mathbf{B}$ не є однозначними, але довільному елементу $x \in \boldsymbol{S}$ однозначно ставиться у відповідність його канонічний образ $x[\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{S}^*]$ фактор-групи $\boldsymbol{S}^*/[\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{S}^*]$ по комутативній підгрупі $[\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{S}^*]$ тіла $\boldsymbol{S}$. Це було використано Дьйодоннѐ в його роботі [55]. Його ціллю було показати, як визначник можна виразити в термінах теорії груп.

Теорема 1.1.7. [1, 45, 55] *Для довільного тіла* $\boldsymbol{S}$ *існує ізоморфізм:*

$$\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})/[\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S}),\boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{S})] \to \boldsymbol{S}^*/[\boldsymbol{S}^*,\boldsymbol{S}^*].$$

З цієї основної теореми Дьйодоннѐ випливає його означення визначника:

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} := \boldsymbol{det}(\mathbf{D}(x)\cdot\mathbf{B}) = x[\boldsymbol{S}^*,\boldsymbol{S}^*].$$

Якщо $\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{H}$ - тіло кватерніонів, тоді, означивши гомоморфізм $\omega : \boldsymbol{H}^*/[\boldsymbol{H}^*,\boldsymbol{H}^*] \to \boldsymbol{R}_+$:

$$\omega\left(x[\boldsymbol{H}^*,\boldsymbol{H}^*]\right) = \|x\|,$$

одержимо $\boldsymbol{Ddet}\,\mathbf{A} := \omega\left(x[\boldsymbol{H}^*,\boldsymbol{H}^*]\right) = \|x\|$ - *нормалізований визначник Дьйодоннѐ.* Тут $\|x\|$ - евклідова норма в тілі кватерніонів $\boldsymbol{H}$.

Дьйодоннѐ показав [55], що довільний визначниковий функціонал $\boldsymbol{d}$, який задовольняє аксіоми 1, 2, 3 означення 1.1.1, має вигляд $\boldsymbol{d}(\mathbf{M}) = \boldsymbol{Ddet}^r\,\mathbf{M}$, де $r \in \boldsymbol{R}$ - дійсне число, і для довільної матриці $\mathbf{M} \in \boldsymbol{GL}(n,\boldsymbol{H})$, зокрема, $\boldsymbol{Sdet}\,\mathbf{M} = \boldsymbol{Ddet}^2\,\mathbf{M}$.

З інших властивостей визначника Дьйодоннѐ відмітимо те, що цей визначник, як функція від деякого рядка матриці, не є лінійним. Позначимо цю функцію через $\boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.})$, де $\mathbf{a}_{i.}$ - i-й рядок матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, тоді справедливою є теорема:

Теорема 1.1.8. [1, 45, 55] $\boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.} + \mathbf{a}'_{i.}) \subset \boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.}) + \boldsymbol{D}(\mathbf{a}'_{i.})$.

У випадку $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{H})$ одержимо нерівність трикутника: $\boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.} + \mathbf{a}'_{i.}) \le \boldsymbol{D}(\mathbf{a}_{i.}) + \boldsymbol{D}(\mathbf{a}'_{i.})$.

Слід відмітити, що визначник Дьйодоннѐ має широке застосування в теорії матриць над тілом, що відображено в багатьох роботах, зокрема [46, 47, 57, 61, 66, 74, 82, 83].

1.1.3. Зображення оберненої матриці Й.С. Понізовським. У роботі [37] Й. С. Понізовський, узагальнюючи підхід запропонований Дьйодонне квадратній матриці над кільцем $\boldsymbol{K}$ гомоморфно ставить у відповідність елемент деякої комутативної підгрупи, який і називає визначником. Побудований таким чином визначник, як і визначник Дьйодонне, є коректно означеним, оскільки повністю задовольняє аксіоми 1, 2, 3 некомутативного визначника. І в той же час, як зауважує сам автор „такі властивості звичайних визначників як розклад по мінорах рядка чи стовпця при нашому означенні визначника не мають змісту [37, стор. 4]“. Власне, із цього, очевидно, випливає неможливість введення поняття алгебричного доповнення елемента матриці і, як наслідок, неможливість побудови приєднаної матриці в рамках тільки цієї теорії визначників. Й.С.Понізовським аналітичне зображення оберненої матриці представлено наступним чином:

$$\mathbf{M}^{-1} = \varphi_{\boldsymbol{D}}^{-1}\left(\mathbf{M}_{\boldsymbol{D}}^{-1}\right),$$

де $\boldsymbol{D}$ - точне неособливе зображення кільця $\boldsymbol{K}$ над полем $\boldsymbol{P}$ степені d, $\mathbf{M}$ - матриця порядку n над кільцем $\boldsymbol{K}$, $\mathbf{M}_{\boldsymbol{D}}$ - матриця порядку nd над $\boldsymbol{P}$, яка одержується із $\mathbf{M}$ заміною кожного елемента матрицею, що відповідає йому в зображенні $\boldsymbol{D}$ і $\varphi_{\boldsymbol{D}}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}_{\boldsymbol{D}}$. Якщо зображення $\boldsymbol{D}$ - точне й неособливе, то відображення $\varphi_{\boldsymbol{D}} : \boldsymbol{K}_n \to \boldsymbol{P}_{nd}$ є ізоморфізмом, тут $\boldsymbol{K}_n$ - кільце квадратних матриць порядку n над $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{P}_{nd}$ - кільце квадратних матриць порядку nd над полем $\boldsymbol{P}$. При цьому зображення $\boldsymbol{D}$ називають неособливим, якщо воно містить оборотні матриці. І як вказує автор „якщо задана конкретна матриця $\mathbf{M}$ над $\boldsymbol{K}$ і фактично задано точне зображення $\boldsymbol{D}$ над полем $\boldsymbol{P}$, то можна фактично обчислити $\mathbf{M}^{-1}$ [37, стор. 11]“. Але, очевидно, що таке аналітичне зображення оберненої матриці не представляє *саме* визначникове зображення оберненої матриці через класичну приєднану.

1.2. Квазідетермінанти Гельфанда-Ретаха

Другий спосіб означення визначника матриці над тілом – це розглядати його як певну раціональну функцію від елементів матриці. Таким чином будували свої визначники А. Гейтінг [63] та А. Р. Річардсон [84]. Та найбільшого успіху тут досягли Гельфанд І. М. та Ретах В. С. У своїх роботах [4, 5, 64], вони стверджують, що” питання про означення єдиного детермінанта квадратної матриці в загальній некомутативній ситуації не має сенсу, якщо розглядати детермінанти зі значеннями в кільці [4, стор. 5]” і квадратній матриці n-го порядку над тілом замість одного визначника ставлять у відповідність n^2 побудованих ними квазідетермінантів, переносячи з комутативного випадку не саме поняття визначника, а його відношення до мінорів порядку $n-1$.

Нехай I_n, J_n - впорядковані множини індексів із n елементів. Нехай $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)$, $i \in I_n$, $j \in J_n$, - матриця формальних некомутативних елементів a_{ij}. Індукцією за n означуються n^2 раціональних виразів $\left|\mathbf{A}\right|_{pq}$, $p \in I_n$, $q \in J_n$, які називаються *квазідетермінантами порядку* pq.

Для $n=1$**,** тобто, для одноелементної матриці $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)$, означується єдиний вираз $\left|\mathbf{A}\right|_{ij}=a_{ij}$. Припустивши, що означені квазідетермінанти всіх матриць порядків менше, ніж n, означуються квазідетермінанти матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})$, коли $i \in I_n$, $j \in J_n$:

$$|\mathbf{A}|_{pq} = a_{pq} - \sum_{\substack{i \neq p \\ j \neq q}} a_{pj} \cdot \left|\mathbf{A}^{pq}\right|_{ij}^{-1} \cdot a_{iq}\ , \qquad (1.1)$$

де $\mathbf{A}^{pq}$ - матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$, викресливши її рядок p та стовпець q.

Показано, що для квадратних матриць над тілом квазідетермінант $|\mathbf{A}|_{pq}$ може бути означений і у випадку, коли не визначені деякі з квазідетермінантів матриці $\mathbf{A}^{pq}$. Для матриць над тілом справедлива

Теорема 1.2.1. [5] *Нехай* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *матриця над тілом. Квазідетермінант* $|\mathbf{A}|_{pq}$ *визначений, якщо визначений і відмінний від нуля хоча б один із квазідетермінантів матриці* $\mathbf{A}^{pq}$. *В цьому випадку у формулі (1.1) сумування проводиться по всім парам* (i, j), $i \neq p$, $j \neq q$, *для яких квазідетермінант* $\left|\mathbf{A}^{pq}\right|_{ij}$ *визначений і відмінний від нуля.*

Якщо елементи a_{ij} комутують, то $|\mathbf{A}|_{pq} = (-1)^{p+q} \dfrac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}^{pq}}$.

І. М. Гельфанд та В. С. Ретах демонструють широкий спектр властивостей та застосувань квазідетермінантів, закликаючи при цьому не боятися їх не поліноміальної, а “лоранівської” залежності від елементів матриці. Розглянемо ті їх результати, що відносяться до оборотності матриць та розв’язування систем лінійних рівнянь над тілом. Мають місце теореми:

Теорема 1.2.2. [5] *Нехай визначений квазідетермінант* $|\mathbf{A}|_{ij}$ *матриці* $\mathbf{A}$. *Наступні умови, рівносильні:*

1) $\left|\mathbf{A}\right|_{ij} = 0$*,*

2) i*- й рядок матриці* $\mathbf{A}$ *є лівою лінійною комбінацією інших рядків цієї матриці;*

3) j*- й стовпець матриці* $\mathbf{A}$ *є правою лінійною комбінацією інших стовпців цієї матриці.*

Теорема 1.2.3. [4] 1) *Обернена матриця* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ *існує тоді і тільки тоді, коли*

а) якщо квазідетермінант $\left|\mathbf{A}\right|_{ij}$*, для довільних* $i, j = \overline{1, n}$ *визначений, то* $\left|\mathbf{A}\right|_{ij} \neq 0$*;*

б) для кожного “рядкового“ індексу p *знайдеться індекс* q *такий, що квазідетермінант* $\left|\mathbf{A}\right|_{pq}$ *визначений;*

в) для кожного “стовпцевого“ індексу s *знайдеться індекс* r *такий, що квазідетермінант* $\left|\mathbf{A}\right|_{rs}$ *визначений.*

2) Якщо визначена обернена матриця $\mathbf{B} = \left(b_{ij}\right)_{n \times n}$*, тоді для довільних* $i, j = 1, \ldots, n$ *елемент* b_{ij} *дорівнює* $\left|\mathbf{A}\right|_{ij}^{-1}$*, якщо квазідетермінант* $\left|\mathbf{A}\right|_{ij}$ *визначений, і нулю в протилежному випадку.*

Ця теорема розкриває запропонований І. М. Гельфандом та В. С. Ретахом метод побудови оберненої матриці над тілом. Оскільки введені квазідетермінанти також не задовольняють властивість розкладу Лапласа по будь-якому рядку чи стовпцю, то очевидно, що для зображення оберненої матриці в цьому випадку використовується інша структуру аніж приєднана матриця.

Розглядається [5] ліва система лінійних рівнянь над тілом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = \xi_1, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = \xi_{n1}. \end{cases}$$

З теореми 1.2.3 випливає, що її розв'язок задається формулою:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{A}|_{ji}^{-1} \xi_j .$$

Приводиться й інший варіант розв'язку цієї системи – правило Крамера для квазідетермінантів.

Теорема 1.2.4.[5] *Нехай* $\mathbf{A}_j(\xi)$ *- матриця, яка одержується з матриці* $\mathbf{A}$ *заміною* j*-го стовпця на стовпець* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$. *Тоді*

$$|\mathbf{A}|_{ij} x_j = |\mathbf{A}_j(\xi)|_{ij} .$$

При цьому права частина не залежить від вибору j.

1.3. Визначник як альтернована сума мономів від елементів матриці

"Класичний" спосіб означення визначника подібно комутативному випадку, як альтернованої суми мономів від елементів матриці взятих по одному з кожного рядка та стовпця, є найбільш очевидним. Але для матриць із некомутуючими елементами при спробі його введення виникає проблема порядку розміщення елементів у кожному з мономів. Для багатьох математиків цей недолік канонічного означення став ознакою того, що такий спосіб є непридатним у загальній некомутативній ситуації. Звичайно, що при використанні цього методу були свої недоліки, але є і вагомі здобутки.

1.3.1. Визначник А. Келі. В 1845 році, через два роки після відкриття Гамільтоном кватерніонів, Артур Келі вперше таким способом дав [48] означення визначника квадратної матриці над тілом кватерніонів. Він вибрав для нього розклад через перший стовпець. Якщо позначити його визначник як $\boldsymbol{Cdet}$, то

$$\boldsymbol{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

і

$$\boldsymbol{Cdet}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1\left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) - a_2\left(b_1 c_3 - b_3 c_1\right) + a_3\left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right).$$

Але наскільки коректним є це означення? Келі відмітив, що якщо два рядки 2×2 матриці одинакові, то

$$\boldsymbol{Cdet}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0\,.$$

Однак, коли одинакові два стовпці такої матриці, то $\boldsymbol{Cdet}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ba$,

і, внаслідок некомутативності, визначник у загальному не дорівнює нулю. Усе ж ця причина не відштовхнула, ні Келі, ні інших його послідовників від дослідження цього визначника, втім, без жодного успіху у сфері його застосувань. Більше того, як показано в роботі [45] визначник Келі не задовольняє жодній з указаних вище аксіом.

1.3.2. Визначник Е. Г. Мура. Найбільш вдалої побудови визначника як суми мономів від елементів матриці досягнув Е. Г. Мур. Він зауважив, що можна досягнути успіху при означенні визначника матриць із некомутуючими елементами за таким принципом, коли застосувати його для певного класу матриць, а саме для ермітових. Це відкриття він зробив у роботі [77], яка була довгий час забута і результати, якої пізніше узагальнив та виклав у більш сучасній термінології відомий фізик і математик Ф. Д. Дайсон [56], зауваживши важливість застосування визначника Мура в теоретичній фізиці.

Означення 1.3.1. Нехай $\boldsymbol{K}$ є кільцем з інволюцією $q \to q^*$, це означає, що оператор $*$ задовольняє умову $\left(q^*\right)^* = q$ для всіх $q \in \boldsymbol{K}$. Елемент $q = q^*$, $q \in \boldsymbol{K}$, називається *скаляром кільця*. $\boldsymbol{K}$ *є кільцем із комутуючими скалярами*, якщо кожний скаляр комутує з усіма елементами в кільці $\boldsymbol{K}$.

Множина скалярів утворює підкільце $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{K}$.

Означення 1.3.2. Говорять, що кільце $\boldsymbol{K}$ володіє *властивістю скалярного добутку*, якщо скалярний добуток $(q, r) = qr + r^* q^*$ є симетричним, що означає: $(q, r) = (r, q)$.

Означення визначника Мура вводиться не тільки для ермітових матриць над кільцем $\boldsymbol{K}$ із комутуючими скалярами та властивістю скалярного добутку, але й для майже ермітових (самоспряжених) матриць.

Означення 1.3.3. Матриця $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ над кільцем $\boldsymbol{K}$ із комутуючими скалярами та властивістю скалярного добутку називається майже ермітовою, якщо існує такий індекс $k \in I_n$, що $a_{ji} = a_{ij}^*$, коли $i \neq k$ та $j \neq k$.

Означення 1.3.4. Нехай $k \in I_n$ задовольняє означення 1.3.3. Індукцією по n майже ермітовій матриці $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ над кільцем $\boldsymbol{K}$ із комутуючими скалярами та властивістю скалярного добутку ставиться у відповідність вираз, $\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A}$, який називається *визначником Мура*:

$$\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A} = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{kj} a_{kj}\, \boldsymbol{Mdet}\big(\mathbf{A}(k \to j)\big), & n > 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Тут $\varepsilon_{kj} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } k = j \\ -1, \textit{ якщо } k \neq j \end{cases}$, а через $\mathbf{A}(k \to j)$ позначено матрицю, яка одержується з матриці $\mathbf{A}$, спочатку замінивши її j-й стовпець її k-м стовпцем, а потім викресливши k-й рядок та k-й стовпець.

Інше означення визначника Мура для ермітової матриці еквівалентне означенню 1.3.4 приводиться [45] в термінах підстановок.

Означення 1.3.5. Нехай $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ - матриця над кільцем $\boldsymbol{K}$ із комутуючими скалярами та властивістю скалярного добутку. Визначником ермітової матриці називається вираз

$$\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} |\sigma|\, a_{n_{11}n_{12}} \dots a_{n_{1l_1}n_{11}}\, a_{n_{21}n_{22}} \dots a_{n_{2l_2}n_{21}} \dots a_{n_{r1}n_{r2}} \dots a_{n_{rl_r}n_{r1}},$$

де S_n - симетрична група на множині $I_n = \{1,\dots,n\}$, $\sigma \in S_n$ - підстановка n-ї степені, $|\sigma|$ - знак її парності. Циклічне зображення підстановки σ в нормальній формі має вигляд:

$$\sigma = \left(n_{11}\dots n_{1l_1}\right)\left(n_{21}\dots n_{2l_2}\right)\dots\left(n_{r1}\dots n_{rl_r}\right),$$

де $n_{i1} < n_{ij}$ для всіх $j > 1$ при цьому $n_{11} > n_{21} > \dots > n_{r1}$.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1.3.1. [56] *Нехай* $\boldsymbol{K}$ *- кільце з комутуючими скалярами й властивістю скалярного добутку і нехай* $\mathbf{A}$ *- ермітова матриця з елементами з* $\boldsymbol{K}$. *Тоді значення* $\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A}$, *визначене рівністю (1.2) є незалежним від* k**,** *а також* $\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A}$ *є скаляром.*

Теорема 1.3.2. [56] *Якщо* $\mathbf{A}$ *- майже ермітова матриця над кільцем* $\boldsymbol{K}$ *і має два однакові рядки чи стовпці, тоді* $\boldsymbol{Mdet}\,\mathbf{A} = 0$.

З цих теорем Дайсон доводить виконання аксіом 1 і 3* для визначника Мура та аксіоми 2 при певних строгих обмеженнях на вихідне кільце $\boldsymbol{K}$. У своїй роботі він також приводить перелік невирішених проблем, пов'язаних із визначником Мура, зокрема наступні:

1) Яка залежність між визначниками Мура та Дьйодонне?
2) Яким найбільш природнім шляхом можна узагальнити означення визначника Мура для матриць, що не є самоспряженими?

Перше з наведених питань на даний час уже знайшло своє вирішення. Що стосується другої проблеми, то повна й обґрунтована відповідь на нього є однією з цілей даної роботи. Іншою спробою задовільної відповіді на це питання є визначник Лонгхуан Чена.

1.3.3. Визначник Л. Чена. Для довільної квадратної матриці $\mathbf{A}$ над тілом кватерніонів $\boldsymbol{H}$ Л. Чен означав [49, 50] визначник наступним чином:

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{n_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s n_1} a_{n_2 j_2} \ldots a_{j_t n_2} \ldots a_{n_r k_2} \ldots a_{k_l n_r},$$

$$\sigma = (n_1 i_2 i_3 \ldots i_s)(n_2 j_2 j_3 \ldots j_t) \ldots (n_r k_2 k_3 \ldots k_l),$$

$$n_1 > i_2, i_3, \ldots, i_s;\ n_2 > j_2, j_3, \ldots, j_t;\ \ldots;\ n_r > k_2, k_3, \ldots, k_l,$$

$$n = n_1 > n_2 > \ldots > n_r \geq 1,$$

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(s-1)+(t-1)+\ldots+(l-1)} = (-1)^{n-r}.$$

Треба відмітити, що його визначник порушує застереження Дайсона - не задовольняє ключову аксіому 1. Але для ермітової матриці $\mathbf{A}$ його визначник, як і визначник Мура, є скаляром, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \in \boldsymbol{R}$, де $\boldsymbol{R}$ - поле дійсних чисел. Крім того, для довільної кватерніонової матриці $\mathbf{A}$ вводиться поняття подвійного визначника, який позначається $\|\mathbf{A}\|$.

Означення 1.3.4. Для довільної матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{H}_{n\times m}$, $\|\mathbf{A}\| \equiv \left|\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right|$ називається її *подвійним визначником*.

Тут через $\boldsymbol{H}_{n\times m}$ позначається множина $n \times m$-матриць над тілом кватерніонів $\boldsymbol{H}$. Мають місце теореми, які розкривають властивості подвійного визначника:

Теорема 1.3.4. [50] *Для довільної* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{H}_{n\times n}$ *маємо* $\|\mathbf{A}\| = \left\|\mathbf{A}^{*}\right\|$.

Теорема 1.3.5. [50] *Для довільних* $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} \in \boldsymbol{H}_{n\times n}$,

$$\|\mathbf{AB}\| = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|.$$

Теорема 1.3.6. [50] *Для довільної* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{H}_{n\times m}$ *маємо* $\|\mathbf{A}\| \geq 0$.

Встановлена необхідна й достатня умова правої лінійної незалежності стовпців довільної матриці над тілом кватерніонів.

Теорема 1.3.7. [50] *Нехай* $\mathbf{A} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in \boldsymbol{H}_{n\times m}$, *тоді необхідною й достатньою умовою правої лінійної незалежності вектор-стовпців* $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$, $\left(\forall i = \overline{1,n}\right)$, *матриці* $\mathbf{A}$ *є* $\|\mathbf{A}\| \neq 0$.

Має місце також теорема, яка розкриває запропонований Ченом метод побудови оберненої матриці.

Теорема 1.3.8. [50] *Необхідною й достатньою умовою оборотності квадратної матриці* $\mathbf{A} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ *над тілом кватерніонів є відмінність* *від нуля її подвійного визначника,* $\|\mathbf{A}\| \neq 0$*. Тоді існує обернена матриця* $\mathbf{A}^{-1} = \left(b_{jk}\right)$*, де* b_{jk} *задаються формулами:*

$$\overline{b_{jk}} = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}\omega_{kj}, \ \left(j, k = 1, 2, \ldots, n\right),$$

$$\omega_{kj} = \boldsymbol{det}\left(\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1} \ldots \alpha_{n-1}\delta_k\right)^* \left(\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}\alpha_n\alpha_{j+1} \ldots \alpha_{n-1}\alpha_j\right).$$

де α_i *-* i*-й стовпець матриці* $\mathbf{A}$*,* δ_k *-* n*-вимірний стовпець з одиницею в* k*-му рядку та нулем в усіх інших.*

Оскільки, властивість розкладу Лапласа по будь-якому рядку чи стовпцю визначником Чена, за виключенням n-го рядка, також не виконується, то й матрицю, яка використовується для аналітичного зображення оберненої, не можна означити як певний аналог приєднаної.

В роботі [49] Чен також одержує розв’язок правої системи лінійних рівнянь над тілом кватерніонів, який він називає крамерівським.

Теорема 1.3.9. [49] *Для правої системи лінійних рівнянь* $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j = \beta$ *над тілом кватерніонів, якщо подвійний визначник його матриці коефіцієнтів* $\|\mathbf{A}\| \neq 0$*, існує єдиний розв’язок*

$$x_j = \|\mathbf{A}\|^{-1}\overline{\mathbf{D}_j},$$

де

$$\mathbf{D}_j = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_{j-1}^* \\ \alpha_n^* \\ \alpha_{j+1}^* \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^* \\ \beta^* \end{pmatrix}\left(\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_{j-1} \ \ \alpha_n \ \ \alpha_{j+1} \ \ldots \ \alpha_{n-1} \ \ \alpha_j\right).$$

Тут α_i *-* i *- й стовпець матриці* $\mathbf{A}$*,* α_i^* *-* i *- й рядок матриці* $\mathbf{A}^*$ *для всіх* $i=\overline{1,n}$*,* β^* *-* n *- мірний вектор-рядок спряжений до вектор-стовпця* β *вільних елементів.*

1.4. Висновки

1 У першому підрозділі розглядається означення некомутативного визначника через необхідну та достатню групу аксіом. Наводяться приклади визначників, що задовольняють ці аксіоми, а саме визначники Стаді та Дьйодоннѐ. Подається зображення оберненої матриці для оборотної квадратної матриці над кільцем, представлене Й.С.Понізовським у рамках теорії визначника Дьйодоннѐ.

2 У другому підрозділі вводяться означення та розглядаються основні властивості квазідетермінантів Гельфанда-Ретаха. Розглядаються одержані в рамках теорії квазідетермінантів зображення оберненої матриці та аналог правила Крамера для лівої системи лінійних рівнянь над тілом.

3 У третьому підрозділі розглядаються некомутативні визначники означені подібно комутативному випадку, як альтернована сума добутків елементів матриці, але фіксуючи попередньо порядок елементів, а саме визначники Келі, Мура та Чена. Наводиться проблема Дайсона, про повне та природне узагальнення для довільних квадратних матриць над тілом визначника Мура, введеного для ермітових матриць. Подається визначникове зображення оберненої матриці та аналог правила Крамера для систем лінійних рівнянь над тілом кватерніонів, одержані засобом визначника Чена.

4 Оскільки, жоден із представлених у цьому розділі визначників не задовольняє властивість розкладу Лапласа по будь-якому рядку чи стовпцю матриці, то й означити алгебричне доповнення елемента матриці, а звідси, й одержати аналітичне зображення класичної приєднаної матриці над некомутативним кільцем у рамках теорії будь-якого з означених вище визначників неможливо.

5 Щоб одержати визначникове зображення оберненої матриці над тілом через аналог класичної приєднаної матриці, необхідно побудувати такий некомутативний визначник, який, з одного боку, задовольняв би властивість розкладу по будь-якому рядку чи стовпцю матриці і в той же час, як визначникове відображення, задовольняв би аксіоми 1, 2, 3 означення 1.1.1.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ СТОВПЦЕВИХ ТА РЯДКОВИХ ВИЗНАЧНИКІВ НАД ТІЛОМ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

2.1. Означення основного тіла

Означення 2.1.1. Відображення * кільця $\boldsymbol{K}$ в себе називається *інволюцією*, якщо виконуються умови $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$ та $\left(x^*\right)^* = x$.

Нехай $\boldsymbol{F}$ - довільне поле, $\boldsymbol{A}$ - векторний простір ненульової розмірності над $\boldsymbol{F}$.

Означення 2.1.2. Відображення $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ називається *білінійною формою*, якщо для довільних $x, x', y, y' \in \boldsymbol{A}$, $\alpha \in \boldsymbol{F}$ виконуються наступні умови:

1) $\boldsymbol{f}(x + x', y) = \boldsymbol{f}(x, y) + \boldsymbol{f}(x', y)$;

2) $\boldsymbol{f}(x, y + y') = \boldsymbol{f}(x, y) + \boldsymbol{f}(x, y')$;

3) $\boldsymbol{f}(\alpha x, y) = \boldsymbol{f}(x, \alpha y) = \alpha\, \boldsymbol{f}(x, y)$.

Означення 2.1.3. Білінійна форма $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ називається *симетричною*, якщо $\boldsymbol{f}(x, y) = \boldsymbol{f}(y, x)$ для довільних $x, y \in \boldsymbol{A}$.

Означення 2.1.4. Симетрична білінійна форма $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ називається *невиродженою*, якщо із того, що $\boldsymbol{f}(a, x) = 0$ для довільного $a \in \boldsymbol{A}$ випливає, що $a = 0$, і *виродженою* в протилежному випадку.

Означення 2.1.5. Відображення $\boldsymbol{n} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ називається *квадратичною* формою, якщо

1) $\boldsymbol{n}(\lambda x) = \lambda^2\, \boldsymbol{n}(x)$, де $x \in \boldsymbol{A}$, $\lambda \in \boldsymbol{F}$;

2) функція $\boldsymbol{f}(x, y) = \boldsymbol{n}(x + y) - \boldsymbol{n}(x) - \boldsymbol{n}(y)$ є білінійною формою на $\boldsymbol{A}$.

Означення 2.1.6. Квадратична форма $\boldsymbol{n}(x)$ називається *невиродженою*, якщо невироджена відповідна їй симетрична білінійна форма, і *виродженою* в протилежному випадку.

Означення 2.1.7. Алгебра $\boldsymbol{A}$ з одиницею 1 над полем $\boldsymbol{F}$ характеристики, що не дорівнює 2, називається *композиційною*, якщо на векторному просторі $\boldsymbol{A}$ визначена невироджена квадратична форма $\boldsymbol{n}(x): \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$, яка задовольняє наступні дві умови.

1) Вона індукує невироджену симетричну білінійну форму $\boldsymbol{n}(x, y) := \boldsymbol{n}(x+y) - \boldsymbol{n}(x) - \boldsymbol{n}(y)$, тобто означає ізоморфізм $\boldsymbol{A} \tilde{\to} \boldsymbol{A}^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F})$, де $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F})$ - група гомоморфізмів із $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{F}$.
2) Квадратична форма $\boldsymbol{n}(x)$ допускає композицію
$$\boldsymbol{n}(x \cdot y) = \boldsymbol{n}(x)\boldsymbol{n}(y).$$

Означення 2.1.8. $\boldsymbol{F}$-алгебра $\boldsymbol{A}$ з одиницею 1 називається *квадратичною* над полем $\boldsymbol{F}$, якщо кожен елемент $x \in \boldsymbol{A}$ задовольняє рівність

$$x^2 - \boldsymbol{t}(x)x + \boldsymbol{n}(x) = 0, \qquad (2.1)$$

де $\boldsymbol{t}(x)$ - лінійна форма на $\boldsymbol{A}$ зі значенням у полі $\boldsymbol{F}$. Якщо $x \notin \boldsymbol{F}$, то рівність (2.1) однозначно визначає форми $\boldsymbol{t}(x)$ і $\boldsymbol{n}(x)$. При $\alpha \in \boldsymbol{F}$ покладемо за означенням $\boldsymbol{t}(\alpha) = 2\alpha$, $\boldsymbol{n}(\alpha) = \alpha^2$. Елементи $\boldsymbol{n}(x)$ та $\boldsymbol{t}(x)$ називають, відповідно, *нормою* та *слідом* елемента x.

Твердження 2.1.1. [7, 35] *Лінійне відображення кільця* $\boldsymbol{A}$ $x \to \bar{x} = \boldsymbol{t}(x) - x$ *є інволюцією, що залишає нерухомими елементи поля* $\boldsymbol{F}$.

При цьому елемент $\bar{x} \in \boldsymbol{A}$ будемо називати *спряженим* до елемента $x \in \boldsymbol{A}$.

Означення 2.1.9. Алгебра $\boldsymbol{A}$ називається *альтернативною*, якщо для довільних x, y із $\boldsymbol{A}$ справедливими є рівності $x^2 y = x(xy)$, $yx^2 = (yx)x$.

Твердження 2.1.2. [7, 58] *Довільна композиційна алгебра $\boldsymbol{A}$ альтернативна і квадратична.*

Справедливими є і обернені твердження**.**

Твердження 2.1.3. [7, 58] *Якщо $\boldsymbol{A}$ - альтернативна $\boldsymbol{F}$-алгебра з одиницею 1 і інволюцією $x \to \bar{x}$ такою, що $\boldsymbol{t}(x) \in \boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{n}(x) \in \boldsymbol{F}$, то квадратична форма $\boldsymbol{n}(x)$ задовольняє рівність (2.1).*

Твердження 2.1.4. [7, 58] *Нехай $\boldsymbol{A}$ - проста квадратична альтернативна $\boldsymbol{F}$-алгебра, що містить хоча б три елементи. Тоді або $\boldsymbol{A}$ - композиційна алгебра, або $\boldsymbol{A}$ - деяке поле характеристики 2.*

Означення 2.1.10. Композиційна алгебра $\boldsymbol{A}$ називається *розщеплюваною*, якщо в ній виконується одна з наступних еквівалентних умов:

1) $\boldsymbol{n}(x) = 0$ для деякого $x \neq 0$ з $\boldsymbol{A}$;
2) $xy = 0$ для деяких $x \neq 0$ і $y \neq 0$ із $\boldsymbol{A}$;
3) $\boldsymbol{A}$ містить нетривіальний ідемпотент, тобто, такий елемент $e \neq 0{,}1$, що $e^2 = e$.

Оскільки, асоціативна алгебра є альтернативною, то очевидним наслідком тверджень 2.1.3, 2.1.4 та означення 2.1.10 є наступне

Твердження 2.1.5. *Нехай тіло $\boldsymbol{S}$ як асоціативна алгебра з діленням над своїм центром $\boldsymbol{F}$ - полем нульової характеристики володіє інволюцією $x \to \bar{x}$ такою, що $\boldsymbol{t}(x) \in \boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{n}(x) \in \boldsymbol{F}$ для всіх $x \in \boldsymbol{S}$, тоді $\boldsymbol{S}$ є нерозщеплюваною композиційною алгеброю.*

Головною в теорії композиційних алгебр є теорема Гурвіца.

Теорема 2.1.1. (Гурвіца) *Скінченновимірна композиційна алгебра має розмірності 1, 2, 4 або 8 над полем $\boldsymbol{F}$.*

Для опису всіх композиційних алгебр скористаємося процесом Келі-Діксона. Нехай $\boldsymbol{A}$ - алгебра над полем $\boldsymbol{F}$ з одиницею 1 і інволюцією $a \to \overline{a}$ такою, що $a + \overline{a} \in \boldsymbol{F}$, $a \cdot \overline{a} \in \boldsymbol{F}$ для довільного $a \in \boldsymbol{A}$. Зафіксуємо $\alpha \in \boldsymbol{F}$, $\alpha \neq 0$, і визначимо на векторному просторі $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}$ операцію множення:

$$(a_1, a_2) \cdot (a_3, a_4) = \left(a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a_2}, \overline{a_1} a_4 + a_3 a_2\right).$$

Отриману алгебру $(\boldsymbol{A}, \alpha)$ називають *алгеброю, що одержується з алгебри* $\boldsymbol{A}$ *за допомогою процесу Келі – Діксона.* Очевидно, що $\boldsymbol{A}$ ізоморфно вкладається в $(\boldsymbol{A}, \alpha)$ і $\boldsymbol{dim}\,(\boldsymbol{A}, \alpha) = 2\,\boldsymbol{dim}\,\boldsymbol{A}$. Нехай $v = (0, 1)$, тоді $v^2 = \alpha$ і $(\boldsymbol{A}, \alpha) = \boldsymbol{A} \oplus v\boldsymbol{A}$. Для довільного елемента $x = a_1 + v a_2 \in (\boldsymbol{A}, \alpha)$ покладемо $\overline{x} = \overline{a_1} - v a_2$. Тоді $x + \overline{x} \in \boldsymbol{F}$ і $x \cdot \overline{x} \in \boldsymbol{F}$, і відображення $x \to \overline{x}$ є інволюцією алгебри $(\boldsymbol{A}, \alpha)$, що продовжує інволюцію $a \to \overline{a}$ алгебри $\boldsymbol{A}$. Якщо квадратична форма $\boldsymbol{n}(a) = a \cdot \overline{a}$ невироджена на $\boldsymbol{A}$, то квадратична форма $\boldsymbol{n}(x) = x \cdot \overline{x}$ невироджена на $(\boldsymbol{A}, \alpha)$. При цьому форма $\boldsymbol{n}(x) = x \cdot \overline{x}$ допускає композицію тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{A}$ асоціативна.

Таким чином, одержимо [7, 35, 36, 58, 67, 68, 90] наступні приклади композиційних алгебр над полем $\boldsymbol{F}$:

1. $\boldsymbol{F}$ - поле характеристики, що не дорівнює 2.
2. $\boldsymbol{C}(\alpha) = (\boldsymbol{F}, \alpha)$, $\alpha \neq 0$. Якщо многочлен $x^2 - \alpha$ незвідний над $\boldsymbol{F}$, тоді $\boldsymbol{C}(\alpha)$ - поле; у протилежному випадку $\boldsymbol{C}(\alpha) \cong \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F}$.
3. $\boldsymbol{H}(\alpha, \beta) = (\boldsymbol{C}(\alpha), \beta)$, $\beta \neq 0$ - алгебрі узагальнених кватерніонів. Ця алгебра асоціативна, але некомутативна.
4. $\boldsymbol{O}(\alpha, \beta, \gamma) = (\boldsymbol{H}(\alpha, \beta), \gamma)$, $\gamma \neq 0$ - алгебрі Келі-Діксона. Ця алгебра вже неасоціативна, тому на ній індуктивний процес побудови композиційних алгебр завершується.

Оскільки, надалі всюди в роботі алгебра $\boldsymbol{A}$ розглядається як тіло $\boldsymbol{S}$ з інволюцією, а його центр $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{S})=\boldsymbol{F}$ - поле нульової характеристики, то внаслідок твердження 2.1.5 одержимо наступні приклади композиційних алгебр.

1. Поле $\boldsymbol{F}$.
2. $\boldsymbol{C}(\alpha)=(\boldsymbol{F},\alpha)$, $\alpha\neq 0$, - алгебра, яка одержується з алгебри $\boldsymbol{F}$ за допомогою процесу Келі - Діксона, при умові, що многочлен $x^2-\alpha$ незвідний над $\boldsymbol{F}$. Тоді $\boldsymbol{C}(\alpha)$ - поле.
3. $\boldsymbol{H}(\alpha,\beta)=(\boldsymbol{C}(\alpha),\beta)$, - алгебра узагальнених кватерніонів або як прийнято в англомовній літературі кватерніонова алгебра (the quaternion algebra), при умові, що $\beta\neq 0$, $\alpha\neq 0$ беруться такими, щоб виконувалась умова її нерозщеплюваності. Ця алгебра асоціативна, але некомутативна. Позначатимемо її $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$.

В загальному, розглядувану $\boldsymbol{F}$-алгебру $\boldsymbol{S}$ можна означити як алгебру породжену генераторами i та j, що пов'язані співвідношеннями:

$$i^2=\alpha,\ j^2=\beta,\ ij=k=-\alpha\beta.$$

І ця алгебра є множиною всіх можливих виразів виду

$$x=x_0+x_1 i+x_2 j+x_3 k,$$

де $\{x_0,x_1,x_2,x_3\}\subset\boldsymbol{F}$.

Якщо $\alpha=\beta=0$, тоді $\boldsymbol{dim}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{S}=1$ і в канонічному базисі простору $\boldsymbol{S}$, що в цьому випадку співпадає з полем $\boldsymbol{F}$, форма $\boldsymbol{n}(x)=x_0^2$. Якщо $\alpha\neq 0$ і $\beta=0$, тоді $\boldsymbol{dim}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{S}=2$ і норма $\boldsymbol{n}(x)$ в просторі $\boldsymbol{S}\cong\boldsymbol{C}(\alpha)$ приймає вигляд $\boldsymbol{n}(x)=x_0^2-\alpha x_1^2$. Якщо $\alpha\neq 0$ і $\beta\neq 0$, тоді $\boldsymbol{dim}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{S}=4$ і норма $\boldsymbol{n}(x)$ в просторі $\boldsymbol{S} \cong \left(\dfrac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$, що в цьому випадку є кватерніоновою алгеброю, приймає вигляд

$$\boldsymbol{n}(x) = \left(x_0^2 - \alpha x_1^2\right) - \beta\left(x_2^2 - \alpha x_3^2\right) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2 .$$

Таким чином, єдиним прикладом некомутативної асоціативної композиційної алгебри, що розглядається в роботі, є кватерніонова алгебра [42, 43, 62. 71, 72] із врахуванням умови її нерозщеплюваності. З іншого боку підтвердженням цьому є наступна теорема.

Теорема 2.1.2. [72] *Кватерніонова алгебра є тілом тоді і тільки, тоді коли її квадратична форма, - норма* $\boldsymbol{n}(x):\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right) \to \boldsymbol{F}$, *є невиродженою.*

Означення 2.1.11. Дві квадратичні форми $q_1 : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{F}$ і $q_2 : \boldsymbol{V}_2 \to \boldsymbol{F}$ будемо називати *ізометричними*, якщо існує ізоморфізм $\gamma : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ такий, що $q_2(\gamma(x)) = q_1(x)$ для всіх $x \in \boldsymbol{V}_1$. Відображення γ називається *ізометрією*.

Теорема 2.1.3. [72] *Кватерніонові алгебри* $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$ *та* $\left(\dfrac{\alpha',\beta'}{\boldsymbol{F}}\right)$ *є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли норми в цих алгебрах є ізометричними квадратичними формами.*

В залежності від вибору поля $\boldsymbol{F}$ та елементів α і β на множині всіх кватерніонових алгебр є можливими два випадки [42, 43, 53, 71, 72, 87, 91, 92]:

1. $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$ є алгеброю з діленням.

2. $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$ є ізоморфна $M_2\boldsymbol{F}$, - алгебрі всіх 2×2 матриць над полем $\boldsymbol{F}$. В цьому випадку кватерніонова алгебра є розщеплюваною.

Розглянемо деякі приклади [72] кватерніонових алгебр в залежності від вибору поля $\boldsymbol{F}$.

1. Нехай $\boldsymbol{C}$ - поле комплексних чисел. Тоді $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{C}}\right)$ є ізоморфна $M_2\boldsymbol{C}$ для всіх ненульових $\alpha,\beta \in \boldsymbol{C}$. Таким чином, алгебра $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{C}}\right)$ є завжди розщеплюваною.

2. Нехай $\boldsymbol{R}$ - поле дійсних чисел. Алгебра $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{R}}\right)$ є ізоморфна тілу кватерніонів $\boldsymbol{H}$, коли $\alpha < 0$ і $\beta < 0$. Інакше $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{R}}\right)$ є розщеплюваною.

3. Нехай $\boldsymbol{F}_n$ - скінчене поле, що містить n елементів. Алгебра $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}_n}\right)$ є завжди розщеплюваною.

4. Нехай $\boldsymbol{Q}$ - поле раціональних чисел. Існує нескінченно багато неізоморфних кватерніонових алгебр $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}}\right)$. При умові $\alpha < 0$ і $\beta < 0$, (але не тільки), ці алгебри є тілами.

5. Нехай $\boldsymbol{Q}_p$ - поле p-адичних чисел, де p просте число. Для кожного простого числа p існує єдина кватерніонова алгебра $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}_p}\right)$, але тільки у випадку $p = 2$ ця алгебра є алгеброю з діленням.

6. Нехай $\boldsymbol{K}$ - поле алгебраїчних чисел. Існує нескінченно багато неізоморфних кватерніонових алгебр над полем $\boldsymbol{K}$. Серед них є як розщеплювані алгебри, так і алгебри з діленням.

Усі отримані результати дисертаційної роботи, крім теореми 3.5.2, є справедливими для всіх означених нерозщеплюваних кватерніонових алгебр $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{F}}\right)$ над числовим полем $\boldsymbol{F}$. У теоремі 3.5.2 вимагається, щоб поле $\boldsymbol{F}$ було максимальним упорядкованим полем. Тому, зокрема, ця теорема не виконується для $\left(\frac{\alpha,\beta}{\boldsymbol{Q}}\right)$, оскільки поле раціональних чисел $\boldsymbol{Q}$ разом із своїм довільним елементом у загальному не містить і його квадратний корінь.

2.2. Означення рядкових та стовпцевих визначників

Означення 2.2.1. Нехай S_n - симетрична група на множині $I_n = \{1,2,...,n\}$. Будемо говорити, що підстановка $\sigma \in S_n$ *записана прямим добутком незалежних циклів*, якщо її запис у звичайній дворядковій формі відповідає її розкладу в незалежні цикли, тобто,

$$\sigma = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1l_1} & n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2l_2} & \dots & n_{r1} & n_{r2} & \dots & n_{rl_r} \\ n_{12} & n_{13} & \dots & n_{11} & n_{22} & n_{23} & \dots & n_{21} & \dots & n_{r2} & n_{r3} & \dots & n_{r1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Означення 2.2.2. Будемо говорити, що зображення підстановки $\sigma \in S_n$ добутком незалежних циклів є *впорядкованим зліва*, якщо елементи, які замикають кожен із її незалежних циклів, записуються першими зліва у кожному з циклів. Це означає, що коли запис підстановки σ прямим добутком незалежних циклів має вигляд (2.2), то її впорядкований зліва розклад добутком незалежних циклів записується у вигляді

$$\sigma = \left(n_{11}n_{12}\dots n_{1l_1}\right)\left(n_{21}n_{22}\dots n_{2l_2}\right)\dots\left(n_{r1}n_{r2}\dots n_{rl_r}\right).$$

Означення 2.2.3. Будемо говорити, що нормальна форма підстановки $\sigma \in S_n$ є *впорядкованою справа*, якщо елементи, які замикають кожен із її незалежних циклів, записуються першими справа у кожному з циклів, відповідно. Це означає, що коли запис підстановки σ прямим добутком незалежних циклів має вигляд (2.2), то її впорядкований справа розклад добутком незалежних циклів записується наступним чином:

$$\sigma = \left(n_{12} \ldots n_{1l_1} n_{11}\right)\left(n_{22} \ldots n_{2l_2} n_{21}\right) \ldots \left(n_{r2} \ldots n_{rl_r} n_{r1}\right).$$

Означення 2.2.4. *Рядковим визначником по* i*-му рядку* квадратної матриці $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ над тілом $\boldsymbol{S}$, (позначатимемо його $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для довільного $i = \overline{1, n}$), будемо називати альтерновану сума $n!$ мономів, - усіх можливих добутків елементів матриці $\mathbf{A}$ взятих по одному з кожного рядка та стовпця і впорядкованих таким чином, що підстановка $\sigma \in S_n$ індексів елементів кожного моному в звичайній формі записана прямим добутком незалежних циклів. І якщо підстановка парна, то моном береться із знаком "плюс", а якщо непарна - то з "мінус". Таким чином,

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}.$$

Тут S_n - симетрична група на множині $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ і впорядкована зліва нормальна форма підстановки σ має вигляд

$$\sigma = \left(i\, i_{k_1} i_{k_1+1} \ldots i_{k_1+l_1}\right)\left(i_{k_2} i_{k_2+1} \ldots i_{k_2+l_2}\right) \ldots \left(i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r}\right). \qquad (2.3)$$

При цьому перший зліва цикл розпочинається зліва індексом i, а всі наступні незалежні цикли задовольняють умови:

$$i_{k_2} < i_{k_3} < \ldots < i_{k_r},\ i_{k_t} < i_{k_t + s}. \qquad (2.4)$$

для всіх $t = \overline{2, r}$ та $s = \overline{1, l_t}$.

Означення 2.2.5. Нехай R_{ij} - сума, яку одержимо, винісши з $(n-1)!$ відповідних мономів рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$ матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ спільний множник a_{ij}, розміщений у кожному з них першим зліва, і будемо називати її *правим алгебричним доповненням елемента* a_{ij}. Тоді

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot R_{ij} \qquad (2.5)$$

Будемо використовувати наступні позначення. Нехай $\mathbf{A}^{ij}$ - підматриця матриці $\mathbf{A}$, яку одержимо, викресливши її i-й рядок та j-й стовпець. Позначимо через $\mathbf{a}_{.j}$ - j-й стовпець, а через $\mathbf{a}_{i.}$ - i-й рядок матриці $\mathbf{A}$. І нехай $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b})$ - матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$ заміною її j-го стовпця стовпцем $\mathbf{b}$, а $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ - матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$, замінивши її i-й рядок рядком $\mathbf{b}$.

В наступній лемі рядковий визначник $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$ для всіх $i = \overline{1, n}$ розкладається за елементами i-го рядка, крім того обчислення рядкового визначника квадратної матриці n-го порядку над тілом $\boldsymbol{S}$ зводиться до обчислення рядкового визначника матриці на порядок нижче.

Лема 2.2.1. *Нехай* R_{ij} *- праве алгебричне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, тоді*

$$R_{ij} = \begin{cases} -\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i}), & \text{якщо } i \neq j, \\ \boldsymbol{rdet}_k\, \mathbf{A}^{ii}, & \text{якщо } i = j, \end{cases}$$

де матриця $\mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i})$ *одержується з* $\mathbf{A}$ *послідовним застосуванням заміни її* j*-го стовпця* i*-м та вичеркування* i*-х рядка та стовпця,* $k = \boldsymbol{min}\{I_n \setminus \{i\}\}$.

Доведення. Доведемо спочатку, що $R_{ii} = \boldsymbol{rdet_k}\, \mathbf{A}^{ii}$, де $k = \boldsymbol{min}\{I_n \setminus \{i\}\}$.

Якщо $i = 1$, тоді $\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A} = a_{11} \cdot R_{11} + a_{12} \cdot R_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot R_{1n}$. Розглянемо ті мономи визначника $\boldsymbol{rdet}_1 \mathbf{A}$, які розпочинаються зліва множником a_{11}, а саме

$$a_{11} \cdot R_{11} =$$

$$= \sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} (-1)^{n-r} a_{11} \cdot a_{2 i_{k_2}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_2+l_2} 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

де $\tilde{\sigma} = (1)(2\, i_{k_2} \ldots i_{k_2+l_2}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - підстановка з r незалежних циклів для всіх $r = \overline{2,n}$. Винісши спільний множник a_{11} зліва за знак суми, одержимо

$$a_{11} \cdot R_{11} =$$

$$= a_{11} \cdot \sum_{\tilde{\sigma}_1 \in S_{n-1}} (-1)^{n-1-(r-1)} a_{2 i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} 2} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

де $\tilde{\sigma}_1 = (2\, i_{k_2} \ldots i_{k_2+l_2}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - підстановки з $r-1$ незалежних циклів. Тут S_{n-1} симетрична група на множині $I_n \setminus \{1\}$. Кількість множників у кожному мономі суми й кількість незалежних циклів зменшились на одиницю. Оскільки кожен моном розпочинається з елемента другого рядка і серед його множників відсутні елементи першого рядка та першого стовпця матриці $\mathbf{A}$, то

$$\sum_{\tilde{\sigma}_1 \in S_{n-1}} (-1)^{n-1-(r-1)} a_{2 i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} 2} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \boldsymbol{rdet}_2\, \mathbf{A}^{11}.$$

Отже,

$$R_{11} = \boldsymbol{rdet}_2\, \mathbf{A}^{11}. \tag{2.6}$$

Нехай тепер $i \neq 1$, тоді

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = a_{i1} \cdot R_{i1} + a_{i2} \cdot R_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot R_{in}. \tag{2.7}$$

Розглянемо ті мономи визначника $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$, які розпочинаються зліва множником a_{ii}.

$$a_{ii} \cdot R_{ii} = \sum_{\breve{\sigma} \in S_n} (-1)^{n-r} a_{ii} \cdot a_{1 i_{k_2}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_2+l_2} 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

де $\breve{\sigma} = (i)(1 i_{k_2} \ldots i_{k_2+l_2}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - підстановки з r незалежних циклів для всіх $r = \overline{2,n}$.

Знову винісши спільний множник a_{ii} зліва за знак суми, одержимо

$$a_{ii} \cdot R_{ii} = a_{ii} \cdot \sum_{\breve{\sigma}_1 \in \breve{S}_{n-1}} (-1)^{n-1-(r-1)} a_{1 i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} 1} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

де $\breve{\sigma}_1 = (1 i_{k_2} \ldots i_{k_2+l_2}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - підстановки з $r-1$ незалежних циклів. Тут $\breve{S}_{n-1}$ - симетрична група на множині $I_n \setminus \{i\}$. Кількість множників у кожному мономі суми й кількість незалежних циклів знову зменшились на одиницю. Кожен із мономів розпочинається з елемента першого рядка, а серед його множників відсутні елементи i-го рядка та i-го стовпця матриці $\mathbf{A}$, тому

$$\sum_{\breve{\sigma}_1 \in \breve{S}_{n-1}} (-1)^{n-1-(r-1)} a_{1 i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} 1} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \boldsymbol{rdet}_1 \, \mathbf{A}^{ii}.$$

Отже,

$$R_{ii} = \boldsymbol{rdet}_1 \, \mathbf{A}^{ii}. \tag{2.8}$$

Об'єднавши вирази (2.6) і (2.8), одержимо $R_{ii} = \boldsymbol{rdet}_k \, \mathbf{A}^{ii}$, де $k = \boldsymbol{min}\{I_n \setminus \{i\}\}$.

Нехай тепер $i \neq j$. Доведемо, що $R_{ij} = -\boldsymbol{rdet}_j \, \mathbf{A}^{ii}_{.j}(\mathbf{a}_{.i})$. Розглянемо ті мономи визначника $\boldsymbol{rdet}_i \, \mathbf{A}$ у формулі (2.7), які розпочинаються зліва множником a_{ij}, де $j \in I_n \setminus \{i\}$.

$$a_{ij} \cdot R_{ij} =$$

$$\sum_{\bar{\sigma} \in S_n} (-1)^{n-r} a_{ij} \cdot a_{j i_{k_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} =$$

$$= -a_{ij} \cdot \sum_{\bar{\sigma} \in S_n} (-1)^{n-r-1} a_{j i_{k_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}},$$

де $\bar{\sigma} = (i\, j\, i_{k_1} \ldots i_{k_1+l_1}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r})$ - підстановки з r незалежних циклів для всіх $r = \overline{1, n-1}$. Позначимо для всіх $i_{k_1+l_1} \in I_n$

$$\tilde{a}_{i_{k_1+l_1} j} = a_{i_{k_1+l_1} i}, \tag{2.9}$$

тоді

$$a_{i\,j} \cdot R_{i\,j} =$$

$$= -a_{i\,j} \cdot \sum_{\overline{\sigma}_1 \in \widetilde{S}_{n-1}} (-1)^{n-r-1} a_{j\,i_{k_1}} \cdot \ldots \cdot \widetilde{a}_{i_{k_1+l_1}\,j} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r}\,i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r}\,i_{k_r}} \,,$$

де $\overline{\sigma}_1 = \left(j\, i_{k_1} \ldots i_{k_1+l_1}\right) \ldots \left(i_{k_r}\, i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r}\right)$ - підстановка з r незалежних циклів для всіх $r = \overline{1, n-1}$. Кількість множників у кожному мономі суми зменшилась на одиницю. Серед елементів підстановки $\overline{\sigma}_1$ кожного з мономів відсутній індекс i. І ця підстановка в силу (2.9) задовольняє умови (2.3)-(2.4) для рядкового визначника по j-му рядку матриці $\mathbf{A}^{ii}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.\,i}\right)$, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$, спочатку замінивши її j-й стовпець i-м, а потім викресливши i-й рядок та стовпець. Тобто,

$$\sum_{\overline{\sigma}_1 \in \widetilde{S}_{n-1}} (-1)^{n-r-1} a_{j\,i_{k_1}} \ldots \widetilde{a}_{i_{k_1+l_1}\,j} \ldots a_{i_{k_r}\,i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r}\,i_{k_r}} = \boldsymbol{rdet_j}\, \mathbf{A}^{ii}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.\,i}\right)$$

Тому, $R_{ij} = -\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}^{ii}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\right)$, якщо $i \neq j$.

Лему доведено.

Означення 2.2.6. *Стовпцевим визначником по* j*-му стовпцю* квадратної матриці $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ над тілом $\boldsymbol{S}$, (позначатимемо його $\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}$ для довільного $j = \overline{1, n}$), будемо називати альтерновану суму $n!$ мономів, - усіх можливих добутків елементів матриці $\mathbf{A}$ взятих по одному з кожного рядка та стовпця і впорядкованих таким чином, що підстановка $\tau \in S_n$ індексів елементів кожного моному в звичайній формі записана прямим добутком незалежних циклів. І якщо підстановка парна, то моном береться із знаком “плюс”, а якщо непарна - то з “мінус”. Таким чином,

$$\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}=\sum_{\tau\in S_n}(-1)^{n-r}a_{j_{k_r}j_{k_r+l_r}}\ldots a_{j_{k_r+1}j_{k_r}}\ldots a_{j\,j_{k_1+l_1}}\ldots a_{j_{k_1+1}j_{k_1}}a_{j_{k_1}j}$$

Тут S_n - симетрична група на множині $J_n=\{1,2,\ldots,n\}$ і впорядкована справа нормальна форма підстановки τ має вигляд

$$\tau=\left(j_{k_r+l_r}\ldots j_{k_r+1}j_{k_r}\right)\ldots\left(j_{k_2+l_2}\ldots j_{k_2+1}j_{k_2}\right)\left(j_{k_1+l_1}\ldots j_{k_1+1}j_{k_1}j\right).$$

При цьому перший справа цикл розпочинається справа індексом j, а всі наступні незалежні цикли задовольняють умови:

$$j_{k_2}<j_{k_3}<\ldots<j_{k_r},\; j_{k_t}<j_{k_t+s},$$

для всіх $t=\overline{2,r}$ та $s=\overline{1,l_t}$.

Означення 2.2.7. Нехай L_{ij} - сума, яку одержимо, винісши направо з $(n-1)!$ відповідних мономів стовпцевого визначника $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}$ матриці $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ спільний множник a_{ij}, розміщений у кожному з них першим справа, і будемо називати її *лівим алгебричним доповненням елемента* a_{ij}**.** Тоді,

$$\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n}L_{ij}\cdot a_{ij}. \tag{2.10}$$

Справедливою є наступна лема, яка дає змогу розкладати стовпцевий визначник $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}$ за елементами j-го рядка, а також обчислювати стовпцевий визначник квадратної матриці n-го порядку над тілом $\boldsymbol{S}$ через стовпцевий визначник матриці на порядок нижче.

Лема 2.2.2. *Нехай* L_{ij} *- ліве алгебричне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, *тоді*

$$L_{ij} = \begin{cases} -\boldsymbol{cdet}_i \, \mathbf{A}_{i.}^{jj}\left(\mathbf{a}_{j.}\right), & \text{якщо } i \neq j, \\ \boldsymbol{cdet}_k \, \mathbf{A}^{jj}, & \text{якщо } i = j, \end{cases}$$

де матриця $\mathbf{A}_{i.}^{jj}\left(\mathbf{a}_{j.}\right)$ *одержується з матриці* $\mathbf{A}$ *послідовним застосуванням заміни її* i*-го рядка* j*-м та вичеркування* j*-х рядка та стовпця,* $k = \boldsymbol{min}\{J_n \setminus \{j\}\}$.

Доведення аналогічне доведенню леми 2.2.1.

Зауваження 2.2.1. Особливістю стовпцевих визначників є те, що при безпосередньому їх обчисленні множники кожного з мономів записуються справа наліво.

Зауваження 2.2.2. Очевидно, що кожному моному будь-якого означеного вище стовпцевого чи рядкового визначника квадратної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$ відповідає моном будь-якого іншого визначника, стовпцевого чи рядкового, тієї ж матриці такий, що обидва вони мають однаковий знак та є добутком таких самих множників, - елементів матриці, а відрізняються тільки порядком їх розміщення. Якщо елементи матриці комутують, тоді всі стовпцеві та рядкові визначника квадратної матриці рівні між собою, $\boldsymbol{rdet}_1 \, \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{rdet}_n \, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1 \, \mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{cdet}_n \, \mathbf{A}$.

2.3. Алгебра матриць над тілом. Властивості транспонованої та спряженої матриць

Для матриць над тілом $\boldsymbol{S}$ за тими ж правилами, що й для комплексних [6, 32-34, 38, 40], вводяться операції суми та добутку матриць. Також звичайним чином вводяться операції лівого та правого добутку елемента тіла на матрицю. Множина квадратних матриць n-го порядку над тілом $\boldsymbol{S}$ утворює некомутативне кільце $\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ з одиницею $\mathbf{I}$,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де $\{0,1\} \subset \boldsymbol{F}$.

Аналогічно комплексному випадку [6, 32-34, 38, 40] вводяться також поняття транспонованої та спряженої матриць над тілом $\boldsymbol{S}$ та доводяться їх основні властивості.

Означення 2.3.1. Нехай $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, де $a_{ij} \in \boldsymbol{S}$ для всіх $i = \overline{1,n}$ та $j = \overline{1,m}$. *Транспонованою* до матриці $\mathbf{A}$ назвемо матрицю $\mathbf{A}^T = \left(a'_{ji}\right)_{m\times n}$, де $a'_{ji} = a_{ij}$.

Лема 2.3.1. *Нехай* $\mathbf{A}$ *і* $\mathbf{B}$ *- довільні матриці над тілом* $\boldsymbol{S}$*, тоді*

а) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

б) Нехай $a \in \boldsymbol{S}$, тоді $(a\mathbf{A})^T = a\mathbf{A}^T$, $(\mathbf{A}a)^T = \mathbf{A}^T a$.

в) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Доведення аналогічне доведенню подібних властивостей транспонованої матриці над комплексним полем $\boldsymbol{C}$ [6, 32 – 34, 38, 40].

Означення 2.3.2. *Спряженою* до матриці $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, де $a_{ij} \in \boldsymbol{S}$, назвемо матрицю $\mathbf{A}^* = \left(a^*_{ji}\right)_{m\times n}$, де $a^*_{ji} = \overline{a_{ji}}' = \overline{a_{ij}} = \boldsymbol{t}(a_{ij}) - a_{ij}$ для всіх $i = \overline{1,n}$ та $j = \overline{1,m}$.

Лема 2.3.2. *Нехай* $\mathbf{A}$ *і* $\mathbf{B}$ *- довільні матриці над тілом* $\boldsymbol{S}$*, тоді* *а)* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$.

б) Нехай $b \in \mathbf{S}$, *тоді* $(b\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^* \overline{b}$, $(\mathbf{A}b)^* = \overline{b}\mathbf{A}^*$.

в) Нехай $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times k}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{k\times n}$, *тоді* $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

г) Нехай $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, *тоді* $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.

Доведення також аналогічне доведенню подібних властивостей спряженої матриці над полем комплексних чисел [6, 32 – 34, 38, 40].

Зауваження 2.3.1. Властивість добутку транспонованих матриць, а саме $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, у випадку матриць над тілом внаслідок некомутативності елементів матриць у загальному немає місця.

Елементи алгебри матриць над тілом кватерніонів розглядалися в багатьох роботах, зокрема в [46, 47, 52, 54, 60, 69, 70, 73, 88, 89, 93, 94, 95].

2.4. Загальні властивості стовпцевих та рядкових визначників

Розглянемо основні властивості стовпцевих та рядкових визначників довільної квадратної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$.

Теорема 2.4.1. *Якщо один із рядків (стовпців) матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *складається з нулів, то будь-який рядковий визначник та будь-який стовпцевий визначник такої матриці дорівнює нулю, тобто для всіх* $i = \overline{1, n}$ *маємо* $\mathbf{rdet}_i\, \mathbf{A} = 0$ *та* $\mathbf{cdet}_i\, \mathbf{A} = 0$.

Доведення. Нехай всі елементи деякого k-го рядка (k-го стовпця) матриці $\mathbf{A}$ дорівнюють нулю для довільного $k \in I_n$. Оскільки в кожний з мономів будь-якого стовпцевого чи рядкового визначника матриці $\mathbf{A}$ входить множником деякий елемент k-го рядка (k-го стовпця), то кожний моном дорівнює нулю і, отже, всі рядкові та стовпцеві визначники також дорівнюють нулю.

Теорему доведено.

Теорема 2.4.2. *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *помножити на довільний елемент* α *поля* $\boldsymbol{F}$*, то рядковий визначник по будь-якому рядку та стовпцевий визначник по будь-якому стовпцю матриці* $\mathbf{A}$ *множиться на* α*.*

Доведення. Нехай $\mathbf{A}_{l.}(\alpha\mathbf{a}_{l.})$ - матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$, помноживши всі елементи її l-го рядка, для деякого $l \in I_n$, на довільний елемент α поля $\boldsymbol{F}$. Оскільки в кожний з мономів будь-якого стовпцевого чи рядкового визначника матриці $\mathbf{A}_{l.}(\alpha\mathbf{a}_{l.})$ входить множник αa_{lk} для деякого $k \in J_n$, а елемент α поля $\boldsymbol{F}$ комутує, то можемо його винести за знак суми. Тому для всіх $i = \overline{1,n}$ маємо

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{l.}(\alpha\mathbf{a}_{l.}) = \alpha \cdot \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} \cdot \alpha\,,$$

$$\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{l.}(\alpha\mathbf{a}_{l.}) = \alpha \cdot \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} \cdot \alpha\,.$$

Аналогічно, доводиться і випадок, коли всі елементи будь-якого стовпця матриці $\mathbf{A}$ множаться на довільний елемент α поля $\boldsymbol{F}$.

Теорему доведено.

Теорема 2.4.3. *Якщо* $\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.})$ *- матриця, яку одержимо з матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$*, помноживши зліва її* i*-й рядок на довільний елемент* b *тіла* $\boldsymbol{S}$*, тоді* $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.}) = b \cdot \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$ *для всіх* $i \in I_n$.

Доведення. Нехай матриця $\mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.})$ для довільного $i \in I_n$ одержується з матриці $\mathbf{A}$, якщо всі елементи її i-го рядка множаться зліва на довільний елемент b тіла $\boldsymbol{S}$, тоді

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(b \cdot \mathbf{a}_{i.}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r}\, b \cdot a_{i i_{k_1}} \cdot a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} =$$

$$=b\cdot\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{n-r}a_{ii_{k_1}}\cdot a_{i_{k_1}i_{k_1+1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_1+l_1}i}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}=$$

$$=b\cdot \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}.$$

Теорему доведено.

Теорема 2.4.4. *Якщо* $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j}\cdot b)$ *- матриця, яку одержимо з матриці* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *помноживши її* j*-й стовпець справа на довільний елемент* b *тіла* $\boldsymbol{S}$, *тоді* $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j}\cdot b)=\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}\cdot b$ *для всіх* $j=\overline{1,n}$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.4.3.

Теорема 2.4.5. *Якщо всі елементи* i*-го рядка матриці* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *зображаються у вигляді суми двох доданків* $a_{ij}=b_j+c_j$, *де* $\{b_j,c_j\}\subset \boldsymbol{S}$, *для всіх* $j=\overline{1,n}$, *тоді рядковий визначник по будь-якому рядку (стовпцевий визначник по будь-якому стовпцю) матриці* $\mathbf{A}$ *дорівнює сумі двох рядкових визначників по цьому ж рядку (стовпцевих визначників по тому ж стовпцю) матриць, у яких усі рядки, крім* i*-го, такі ж як і у матриці* $\mathbf{A}$, *а* i*- й рядок в одній матриці складається з елементів* b_j, *а в другій - з елементів* c_j *для всіх* $j=\overline{1,n}$.

Доведення. Розглянемо рядковий визначник матриці $\mathbf{A}$ по довільному l-му рядку для деякого $l\in I_n$. Кожний моном визначника $\boldsymbol{rdet}_l\,\mathbf{A}$ внаслідок дистрибутивності множення можна подати у вигляді:

$$a_{ll_1}\cdot a_{l_1l_2}\cdot\ldots\cdot a_{il_i}\cdot\ldots\cdot a_{l_{n-1}l_n}=a_{ll_1}\cdot a_{l_1l_2}\cdot\ldots\cdot(b_{l_i}+c_{l_i})\cdot\ldots\cdot a_{l_{n-1}l_n}=$$
$$=a_{ll_1}\cdot a_{l_1l_2}\cdot\ldots\cdot b_{l_i}\cdot\ldots\cdot a_{l_{n-1}l_n}+a_{ll_1}\cdot a_{l_1l_2}\cdot\ldots\cdot c_{l_i}\cdot\ldots\cdot a_{l_{n-1}l_n},$$

де $\{l,l_k\}\in I_n$ для всіх $k=\overline{1,n}$. Збираючи разом перші доданки цих сум (із тими ж знаками, що й відповідні мономи визначника $\boldsymbol{rdet}_l\,\mathbf{A}$), одержимо рядковий визначник по l-му рядку матриці, яка отримується з матриці

$\mathbf{A}$ заміною її i -го рядка рядком $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Відповідно, другі доданки утворюють визначник по l-му рядку матриці, яка отримується з матриці $\mathbf{A}$ заміною її i-го рядка рядком $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Отже, для довільного $l \in I_n$ маємо

$$\boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b}) + \boldsymbol{rdet}_l\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{c}),$$

де $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Аналогічно, можна довести і для стовпцевого визначника по будь-якому стовпцю матриці.

Теорему доведено.

Теорема 2.4.6. *Якщо всі елементи j-го стовпця матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ представляються у вигляді суми двох доданків, $a_{ij} = b_i + c_i$, де $\{b_i, c_i\} \subset \boldsymbol{S}$ для всіх $i = \overline{1, n}$, тоді рядковий визначник по будь-якому рядку (стовпцевий визначник по будь-якому стовпцю) матриці $\mathbf{A}$ дорівнює сумі двох рядкових визначників по тому же рядку (стовпцевих визначників по тому ж стовпцю) матриць, у яких усі стовпці, крім j-го, такі ж, як і в матриці $\mathbf{A}$, а j-й стовпець в одній матриці складається з елементів b_i, а в другій - з елементів c_i для всіх $i = \overline{1, n}$.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.4.5.

Теорема 2.4.7. *Якщо матриця $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ - нижня квазітрикутна*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(k)} & 0 \\ * & \mathbf{A}_2^{(n-k)} \end{pmatrix}$$

де $\mathbf{A}_1^{(k)}$ *- матриця* k *-го порядку, а* $\mathbf{A}_2^{(n-k)}$ *- матриця* $(n-k)$*-го порядку. Тоді для всіх* $i=\overline{1,k}$ *маємо рівність* $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_1^{(k)} \cdot \boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}_2^{(n-k)}$.

Доведення. Позначимо через $(i_1 \dots i_s) =: \sigma_1(i_1)$ - циклічний множник підстановки σ, у якому i_1 є першим зліва елементом циклу, що відкриває його. Позначимо також добуток, індекси яких утворюють циклічний множник, $a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_s i_1} =: \langle \sigma_1(i_1) \rangle$, тоді

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} \langle \sigma_1(i) \rangle \langle \sigma_2(p) \rangle \dots \langle \sigma_r(t) \rangle,$$

де $\{i, p, \dots, t\} \subset I_n$, r - кількість циклів у мономі.

Позначимо через $L := \{1, \dots, k\} \subset I_n$ та $M := \{k+1, \dots, n\} \subset I_n$ підмножини множини індексів. За умовою леми $a_{lm} = 0$ для всіх $l \in L$ та $m \in M$. З цього випливає, що якщо пара індексів $l\,m$ саме в такій послідовності ввійде в один із циклічних множників, то відповідний моном рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ дорівнюватиме нулю. У свою чергу, входження пари $m\,l$ в один з циклічних множників із необхідністю приводить до існування послідовної пари $l_1 m_1$, (де $l_1 \in L$, $m_1 \in M$), в цьому ж циклічному множнику, що знову приводить до виродженості відповідного моному.

Таким чином, індекси з множин L і M кожного з невироджених мономів рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ розміщуються в різних циклічних множниках і за означенням 2.2.5, одержимо

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} \langle \sigma_1(i) \rangle \langle \sigma_2(l_1) \rangle \dots \langle \sigma_t(l_{t-1}) \rangle \times$$

$$\times \langle \sigma_{t+1}(k+1) \rangle \langle \sigma_{t+2}(m_1) \rangle \dots \langle \sigma_r(m_{p-1}) \rangle =$$

$$= \sum_{\sigma_1 \in S_k} (-1)^{k-t} \langle \sigma_1(i) \rangle \cdot \langle \sigma_2(l_1) \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \sigma_t(l_{t-1}) \rangle \times$$

$$\times \sum_{\sigma_2 \in \tilde{S}_{n-k}} (-1)^{n-k-p} \langle \sigma_1(k+1) \rangle \cdot \langle \sigma_2(m_1) \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \sigma_p(m_{p-1}) \rangle,$$

де $\sigma_1(i) \cdot \sigma_2(l_1) \cdot \ldots \cdot \sigma_t(l_{t-1}) \cdot \sigma_1(k+1) \cdot \sigma_2(m_1) \cdot \ldots \cdot \sigma_p(m_{p-1}) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma$, $t + p = r$ і $l_1 < \ldots < l_{t-1} \le k$, $k+1 < m_1 < \ldots < m_{p-1} \le n$. Тут S_k - симетрична група на множині $\{1,\ldots,k\}$, а через $\tilde{S}_{n-k}$ позначимо симетричну групу на множині індексів $\{k+1,\ldots,n\}$. При цьому

$$\sigma_1(i) \cdot \sigma_2(l_1) \cdot \ldots \cdot \sigma_t(l_{t-1}) = \sigma_1 \in S_k,$$
$$\sigma_1(k+1) \cdot \sigma_2(m_1) \cdot \ldots \cdot \sigma_p(m_{p-1}) = \sigma_2 \in \tilde{S}_{n-k}.$$

Очевидно, що $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_1^{(k)} = \sum_{\sigma_1 \in S_k} (-1)^{k-t} \langle \sigma_1(i) \rangle \cdot \langle \sigma_2(l_1) \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \sigma_t(l_{t-1}) \rangle$.

Покладемо $a_{k+\alpha\, k+\beta} =: \tilde{a}_{\alpha\beta}$, де $\tilde{a}_{\alpha\beta}$ - елементи квадратної матриці $\mathbf{A}_2^{(n-k)}$ для всіх $\alpha, \beta \in I_{n-k} = \{1,\ldots,n\text{-}k\}$. І позначимо $\sigma_1(k+1) =: \tilde{\sigma}_1(1)$, $\sigma_2(m_1) =: \tilde{\sigma}_2(m_1 - k), \ldots, \sigma_p(m_{p-1}) =: \tilde{\sigma}_p(m_{p-1} - k)$, де $\tilde{\sigma}_i(\gamma)$ - циклічний множник, для всіх $\gamma \in I_{n-k}$ та $\forall i = \overline{1,p}$, підстановки $\tilde{\sigma}$, яку утворюють індекси моному рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A}_2^{(n-k)}$. Звідси,

$$\sum_{\sigma_2 \in \tilde{S}_{n-k}} (-1)^{n-k-p} \langle \sigma_1(k+1) \rangle \cdot \langle \sigma_2(m_1) \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \sigma_p(m_{p-1}) \rangle =$$

$$= \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n-k}} (-1)^{n-k-p} \langle \tilde{\sigma}_1(1) \rangle \cdot \langle \tilde{\sigma}_2(m_1 - k) \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \tilde{\sigma}_p(m_{p-1} - k) \rangle = \boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A}_2^{(n-k)}.$$

Тут S_{n-k} симетрична група на множині $\{1,\ldots,n-k\}$.

Отже, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_1^{(k)} \cdot \boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}_2^{(n-k)}$ для всіх $i = \overline{1,k}$.

Теорему доведено.

Теорема 2.4.8. *Якщо матриця* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *- верхня квазітрикутна*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(k)} & * \\ 0 & \mathbf{A}_2^{(n-k)} \end{pmatrix}$$

де $\mathbf{A}_1^{(k)}$ *- матриця* k*-го порядку, а* $\mathbf{A}_2^{(n-k)}$ *- матриця* $n-k$*-го порядку, тоді* $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1\,\mathbf{A}_2^{(n-k)} \cdot \boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_1^{(k)}$ *для всіх* $i = \overline{1,k}$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.4.7.

Теорема 2.4.9. *Якщо* $\mathbf{P}(i,j)$ *- матриця перестановок, яка одержується з одиничної матриці* $\mathbf{I}$ *перестановкою її довільного* i*-го рядка з її* j*-м рядком і* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, тоді*

$$\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(i,j) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(i,j)\right) = \boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A},$$

$$\boldsymbol{cdet}_i\left(\mathbf{P}(i,j) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(i,j)\right) = \boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}.$$

Доведення. За означенням 2.2.4 для довільного рядкового визначника

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} \cdot a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+l_1} i} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}.$$

Матриця $\mathbf{P}(i,j) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(i,j)$ - це матриця, яка одержується з квадратної матриці $\mathbf{A}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ перестановкою її i-го рядка з її j-м рядком та її i-го стовпця з її j-м стовпцем. Тоді за означенням 2.2.4, одержимо,

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{P}(i,j) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(i,j) =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{n-r} a_{j i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} j} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}.$$

Аналогічно, можна показати, що $\boldsymbol{cdet}_i\left(\mathbf{P}(i,j)\cdot \mathbf{A}\cdot \mathbf{P}^T(i,j)\right) = \boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}$, безпосередньо використовуючи в цьому випадку означення стовпцевого визначника 2.2.5.

Теорему доведено.

Теорема 2.4.10. *Якщо* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *і* $\mathbf{A}^*$ *- матриця спряжена до* $\mathbf{A}$*, тоді* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}^* = \overline{\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}}$.

Доведення. Нехай $\mathbf{A}^* = (b_{ij})_{n\times n}$. Розглянемо довільний моном d стовпцевого визначника $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}^*$ для деякого $i=\overline{1,n}$. Оскільки $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, то за означенням сліду елемента тіла $\boldsymbol{S}$ одержимо,

$$d = (-1)^{n-r} b_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \ldots b_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots b_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \ldots b_{i_{k_2+1} i_{k_2}} b_{i\, i_{k_1+l_1}} \ldots b_{i_{k_1} i} =$$
$$= (-1)^{n-r} \overline{a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}} \ldots \overline{a_{i_{k_r} i_{k_r+1}}} \ldots \overline{a_{i_{k_2+l_2} i_{k_2}}} \ldots \overline{a_{i_{k_2} i_{k_2+1}}} \cdot \overline{a_{i_{k_1+l_1} i}} \ldots \overline{a_{i\, i_{k_1}}} =$$
$$= (-1)^{n-r} \overline{a_{i\, i_{k_1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i}\, a_{i_{k_2} i_{k_2+1}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}} =$$
$$= \overline{d_1}.$$

Тут d_1 є деяким мономом рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$. Оскільки, кількість мономів визначника $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}^*$ співпадає з кількістю мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$, то кожному моному стовпцевого визначника $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}^*$ однозначно відповідає моном визначника $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$. Звідси й випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Зауваження 2.4.1. Теореми 2.4.5 та 2.4.6 стверджують, що всі стовпцеві та рядкові визначники довільної квадратної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$ задовольняють аксіому 3.

Зауваження 2.4.2. В силу невиконання для стовпцевих та рядкових визначників довільної квадратної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$ аксіоми 1 означення 1.1.1 необхідної, згідно з [49], для коректного означення некомутативного визначника, а також тому що ці матричні функціонали означені подібно визначнику комплексної матриці будемо розглядати їх як *пре-визначники*.

2.5. Визначник ермітової матриці

Означення 2.5.1. Квадратну матрицю $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, де $a_{ij} \in \boldsymbol{S}$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$, назвемо *ермітовою*, якщо вона співпадає зі своєю спряженою, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

Лема 2.5.1. *Нехай T_n - сума 2^n можливих n добутків, кожен із множників яких є або $h_i \in \boldsymbol{S}$, або $\overline{h_i}$ для всіх $i = \overline{1, n}$, при цьому зростання індексу i всередині кожного з добутків зберігається, тобто,*

$$T_n = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \overline{h_1} \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \ldots + \overline{h_1} \cdot \overline{h_2} \cdot \ldots \cdot \overline{h_n}.$$

Тоді $T_n = \boldsymbol{t}(h_1)\, \boldsymbol{t}(h_2) \ldots \boldsymbol{t}(h_n)$.

Доведення. Кількість 2^n доданків суми визначається як число впорядкованих комбінацій із n елементів, кожний з яких може приймати два значення.

Доведення здійснимо методом індукції по n.

1) Нехай $n = 1$, тоді $T_1 = \overline{h_1} + h_1 = \boldsymbol{t}(h_1)$.

2) Нехай твердження вірне для $n-1$:

$$T_{n-1} = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n-1} + \overline{h_1} \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{n-1} + \ldots + \overline{h_1} \cdot \overline{h_2} \cdot \ldots \cdot \overline{h_{n-1}} =$$
$$= \boldsymbol{t}(h_1)\, \boldsymbol{t}(h_2) \ldots \boldsymbol{t}(h_{n-1}).$$

3) Покажемо, що воно справедливе і при n.

$$T_n = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \overline{h_1} \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n + \ldots + \overline{h_1} \cdot \overline{h_2} \cdot \ldots \cdot \overline{h_n}.$$

Згрупуємо доданки суми T_n і винесемо справа спільні множники $\overline{h_n}$ і h_n, тоді

$$T_n = T_{n-1} \cdot h_n + T_{n-1} \cdot \overline{h_n} = T_{n-1} \cdot \left(h_n + \overline{h_n}\right) = T_{n-1} \cdot \boldsymbol{t}(h_n) =$$
$$= \boldsymbol{t}(h_1) \cdot \boldsymbol{t}(h_2) \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{t}(h_{n-1}) \cdot \boldsymbol{t}(h_n).$$

Лему доведено.

Лема 2.5.2. *Якщо* $\{f, g\} \subset \boldsymbol{S}$, *тоді* $\boldsymbol{t}(f \cdot g) = \boldsymbol{t}(g \cdot f)$.

Доведення. Розкриємо сліди елементів згідно означення 2.1.2.

$$\boldsymbol{t}(f \cdot g) = \overline{f \cdot g} + f \cdot g = \overline{g} \cdot \overline{f} + f \cdot g = (\boldsymbol{t}(g) - g) \cdot (\boldsymbol{t}(f) - f) + f \cdot g =$$
$$= \boldsymbol{t}(g) \cdot \boldsymbol{t}(f) - f \cdot \boldsymbol{t}(g) - \boldsymbol{t}(f) \cdot g + f \cdot g + g \cdot f,$$

$$\boldsymbol{t}(g \cdot f) = \overline{g \cdot f} + g \cdot f = \overline{f} \cdot \overline{g} + g \cdot f = (\boldsymbol{t}(f) - f) \cdot (\boldsymbol{t}(g) - g) + g \cdot f =$$
$$= \boldsymbol{t}(g) \cdot \boldsymbol{t}(f) - \boldsymbol{t}(g) \cdot f - g \cdot \boldsymbol{t}(f) + f \cdot g + g \cdot f.$$

Очевидно, що $\boldsymbol{t}(f \cdot g) = \boldsymbol{t}(g \cdot f)$.

Лему доведено.

Теорема 2.5.1. *Якщо* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *- ермітова матриця, тоді*

$$\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{rdet}_n\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_1\,\mathbf{A} = \ldots = \boldsymbol{cdet}_n\,\mathbf{A} \in \boldsymbol{F}\,.$$

Доведення. Зауважимо [34, 40], що в ермітової матриці $\mathbf{A}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ елементи головної діагоналі є елементами поля, $a_{ii} \in \boldsymbol{F}$ для всіх $i = \overline{1, n}$, а елементи симетричні відносно головної діагоналі спряжені, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$.

Розглянемо довільний рядковий визначник матриці $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для деякого $i \in I_n$. Розіб'ємо множину мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ на дві підмножини. До першої підмножини віднесемо ті мономи, індекси множників яких складають підстановки, що містять незалежні цикли не більше другого порядку. До другої підмножини віднесемо ті мономи, індекси множників яких складають підстановки, що містять хоча б один незалежний цикл більше, ніж другого порядку.

Множники, індекси яких утворюють цикли першого порядку - це елементи головної діагоналі ермітової матриці, а за означенням, вони є елементами поля $\boldsymbol{F}$. Елементи матриці, індекси добутку яких утворюють цикл другого порядку, спряжені: $a_{i_k i_{k+1}} = \overline{a_{i_{k+1} i_k}}$, і їхній добуток дорівнює нормі елементу тіла, а тому належить полю:

$$a_{i_k i_{k+1}} \cdot a_{i_{k+1} i_k} = \overline{a_{i_{k+1} i_k}} \cdot a_{i_{k+1} i_k} = \boldsymbol{n}(a_{i_{k+1} i_k}) \in \boldsymbol{F}\,.$$

Таким чином, всі мономи першої підмножини, як добутки елементів поля $\boldsymbol{F}$ належать йому.

Розглянемо тепер довільний моном d другої підмножини. Нехай індекси його множників складають підстановку, що містить r незалежних циклів і позначимо $i_{k_1} := i$, тоді

$$d = (-1)^{n-r} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i} a_{i_{k_2} i_{k_2+1}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots \times$$
$$\times a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = (-1)^{n-r} h_1 h_2 \ldots h_m \ldots h_r, \qquad (2.11)$$

де $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}$ для всіх $s = \overline{1, r}$ та $m \in \{1, \ldots, r\}$.

Очевидно, що якщо $l_s = 0$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s}} \in \boldsymbol{F}$, а коли $l_s = 1$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}} = \boldsymbol{n}(a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}) \in \boldsymbol{F}$. Якщо всі $l_s = \overline{0,1}$ для довільного $s = \overline{1, r}$, то одержимо моном першої підмножини. Нехай хоча б при деякому s виконується нерівність $l_s \geq 2$. Тоді справедливо, що $\overline{h_s} = a_{i_{k_s} i_{k_s+l_s}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}}$. Дійсно,

$$\overline{h_s} = \overline{a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}} = \overline{a_{i_{k_s+l_s} i_{k_s}}} \ldots \overline{a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}} = a_{i_{k_s} i_{k_s+l_s}} \ldots a_{i_{k_s+1} i_{k_s}}.$$

Індекси елементів матриці $\mathbf{A}$ в мономі d утворюють підстановку σ, яка згідно означення рядкового визначника в звичайній формі записана прямим добутком незалежних циклів, а в нормальній формі є впорядкованою зліва. Позначимо через $\sigma_s(i_{k_s}) := (i_{k_s} i_{k_s+1} \ldots i_{k_s+l_s})$ незалежний цикл, який утворюють індекси монома d і якому відповідає множник h_s. Тоді $\sigma_s^{-1}(i_{k_s}) := (i_{k_s} i_{k_s+l_s} \ldots i_{k_s+1})$ - незалежний цикл, обернений до $\sigma_s(i_{k_s})$, і якому відповідає множник $\overline{h_s}$. На множині всіх мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}$, індекси яких утворюють підстановки в звичайній формі записані прямим добутком незалежних циклів $\sigma_s(i_{k_s})$ або $\sigma_s^{-1}(i_{k_s})$, зберігаючи їх послідовність по s від 1 до r, а в нормальній формі - впорядковані зліва згідно формул (2.2)-(2.3), знайдуться ще 2^{p-1} таких мономів, (де $p = r - \rho$, а ρ –кількість циклів першого та другого порядку), що їх сума C_1, - цих мономів разом з d, за лемою 2.5.1 дорівнює

$$C_1 = (-1)^{n-r} \alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1}) \ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}) \in \boldsymbol{F},$$

де $\alpha \in \boldsymbol{F}$ - добуток множників, індекси яких складають підстановки першого та другого порядку, і $\nu_k \in \{1,\ldots,r\}$ для всіх $k = \overline{1,p}$.

Таким чином, для довільного монома другої підмножини визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ серед інших його мономів можемо вибрати ще $2^p - 1$ таких, що їх сума разом із вибраним мономом належить полю $\boldsymbol{F}$, а тому і рядковий визначник $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$, - як сума всіх мономів першої та другої підмножин, також приймає значення в полі $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} \in \boldsymbol{F}$.

Доведемо рівність між собою всіх рядкових визначників матриці $\mathbf{A}$. Розглянемо довільний $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$ такий, що $j \neq i$ для довільного $j = \overline{1,n}$. Знову розіб'ємо множину мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$ на дві підмножини за тим же правилом, що і для $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$.

Оскільки, мономи першої підмножини є добутками множників – або елементів поля, або пар спряжених елементів, які комутують, то кожному моному першої підмножини рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ відповідає рівний йому моном першої підмножини рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$.

Серед мономів другої підмножини визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$ таких, що індекси їх множників складають підстановки з r незалежними циклами, можна знайти один такий моном d_1, який складається з тих же множників що і d, але розміщених в іншому порядку. Розглянемо всі можливі випадки розміщення множників у мономі d_1.

1. Якщо індекси його множників складають підстановку з таких самих r незалежних циклів відмінну від підстановки моному d тільки порядком розміщення циклів, тоді

$$d_1 = (-1)^{n-r} \alpha \cdot h_\mu \cdot \ldots \cdot h_\lambda ,$$

де $\{\mu, \ldots, \lambda\} = \{\nu_1, \ldots, \nu_p\}$. Серед мономів другої підмножини визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}$ знайдуться ще $2^p - 1$ таких, що кожен із них є добутками скалярного множника $(-1)^{n-r}\alpha$ на всі множник виду h_s або $\overline{h_s}$, де $s \in \{\mu, \ldots, \lambda\}$. І для суми C_2, - цих мономів разом із d_1, за лемою 2.5.1 одержимо

$$C_2 = (-1)^{n-r} \alpha\, \boldsymbol{t}(h_\mu) \ldots \boldsymbol{t}(h_\lambda) = (-1)^{n-r} \alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1}) \ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}) = C_1 .$$

2. Якщо індекси множників монома d_1 складають підстановку з тих самих r незалежних циклів, але відмінну від d не тільки порядком розміщення циклів, а й тим, що індекс j міститься в середині деякого циклу підстановки індексів монома d. Нехай $j \in \sigma_m\left(i_{k_m}\right)$ і покладемо $j := i_{k_m + q}$, тоді моном d_1 можна записати в наступному вигляді

$$\begin{aligned} d_1 = (-1)^{n-r} a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \ldots \quad a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}} \times \\ \times a_{i_{k_\mu} i_{k_\mu+1}} \ldots a_{i_{k_\mu+l_\mu} i_{k_\mu}} \ldots a_{i_{k_\lambda} i_{k_\lambda+1}} \ldots a_{i_{k_\lambda+l_\lambda} i_{k_\lambda}} = (-1)^{n-r} \alpha\, \widetilde{h}_m\, h_\mu \ldots h_\lambda , \end{aligned} \quad (2.12)$$

де $\widetilde{h}_m = \left\langle \sigma_m\left(i_{k_m+q}\right)\right\rangle$ і $\{m, \mu, \ldots, \lambda\} = \{\nu_1, \ldots, \nu_r\}$.

Кожному множнику $h_{\mu},\ldots,h_{\lambda}$ монома d_1 з формули (2.12), крім $\tilde{h}_m = \left\langle \sigma_m \left(i_{k_m+q} \right) \right\rangle = a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \ldots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}}$, відповідає рівний йому множник із множини $h_{\nu_1},\ldots,h_{\nu_p}$ монома d з формули (2.11). Нехай $x := a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \ldots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}}$ та $y := a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}}$. Оскільки, за лемою 2.5.2 маємо рівність слідів

$$\boldsymbol{t}(\tilde{h}_m) = \boldsymbol{t}\left(a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \ldots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} \cdot a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}} \right) = \boldsymbol{t}(xy) =$$
$$= \boldsymbol{t}(yx) = \boldsymbol{t}\left(a_{i_{k_m} i_{k_m+1}} \ldots a_{i_{k_m+q-1} i_{k_m+q}} a_{i_{k_m+q} i_{k_m+q+1}} \ldots \ a_{i_{k_m+l_m} i_{k_m}} \right) = \boldsymbol{t}(h_m),$$

то для суми C_2 всіх 2^p можливих мономів аналогічно попередньому випадку за лемою 2.5.1 одержимо

$$C_2 = (-1)^{n-r} \alpha \, \boldsymbol{t}(\tilde{h}_m) \, \boldsymbol{t}(h_{\mu}) \ldots \boldsymbol{t}(h_{\lambda}) =$$
$$= (-1)^{n-r} \ \alpha \, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1}) \ldots \boldsymbol{t}(h_m) \ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}) = C_1.$$

3. Якщо на відміну від випадку 1 моном d_1 відрізняється від d не тільки порядком розміщення циклів, але й тим, що індекс i не розпочинає один із циклів підстановки індексів його елементів, тоді застосуємо лему 2.5.2 до добутку елементів цього циклу. І, аналогічно попередньому, серед мономів другої підмножини визначника $\boldsymbol{rdet}_j \, \mathbf{A}$, знайдуться 2^p таких, що їхній сумі за лемою 2.5.1 відповідатиме рівна їй сума 2^p відповідних мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i \, \mathbf{A}$.

Очевидно, що до цього ж висновку ми прийдемо і при об’єднанні двох попередніх випадків, тоді лему 2.5.2 застосуємо двічі.

Отже, в будь-якому випадку кожній сумі 2^p відповідних мономів другої підмножини визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}$ відповідає рівна їй сума 2^p мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$, де p - кількість циклів більше, ніж другого порядку в кожному з мономів. Крім того, значення такої суми належить полю $\boldsymbol{F}$.

Таким чином, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A} \in \boldsymbol{F}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$.

Доведемо тепер рівність $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$ для всіх $i = \overline{1,n}$. Знову розіб'ємо множину мономів визначника $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}$ на дві підмножини за тим самим правилом, що і для $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$. Кожному моному першої підмножини визначника $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}$ відповідає такий моном визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$, що обидва вони, як добутки, відрізняються тільки порядком розміщення $n-k$ однакових множників. Тут k - кількість циклів другого порядку. Цикл другого порядку відповідає добутку спряжених елементів, що дорівнює нормі елемента. Оскільки множники мономів, як елементи поля $\boldsymbol{F}$, комутують, то ці мономи рівні між собою.

Серед мономів другої підмножини визначника $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}$ таких, що індекси їх множників складають підстановки з r незалежними циклами, можна знайти один такий моном d_2, що він складається з тих самих множників, що і моном d_2 з формули (2.11), але їх послідовність впорядкована справа відповідно до означення стовпцевого визначника.

Нехай ρ - кількість циклів першого та другого порядку в підстановці індексів монома і $p = r - \rho$, також позначимо $i_{k_1} := i$, тоді

$$d_2 = (-1)^{n-r} a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} \times$$
$$\times a_{i i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1} i} = (-1)^{n-r} \alpha\, h_{\tau_p} \cdot \ldots \cdot h_{\tau_1}$$

де α - добуток множників, індекси яких утворюють підстановки першого та другого порядку. Тоді для всіх $s=\overline{1,r}$ маємо

$$h_{\tau_s}=a_{i_{k_s}i_{k_s+l_s}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_s+1}i_{k_s}}=\overline{a_{i_{k_s}i_{k_s+1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_s+l_s}i_{k_s}}}=\overline{h_{\nu_s}}\,.$$

Серед мономів другої підмножини розглянемо ще 2^p-1 мономів, які мають той же знак, що і d_2, і кожен із яких є добутком скалярного множника $(-1)^{n-r}\alpha$ на кожен із множників h_{τ_s} або спряженого до нього $\overline{h_{\tau_s}}$ для всіх $s=\overline{1,p}$, зберігаючи їх послідовність. Знайдемо за лемою 2.5.1 суму C_3, - цих мономів разом із мономом d_2, враховуючи комутативність слідів елементів тіла.

$$C_3=(-1)^{n-r}\alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\tau_p})\ldots \boldsymbol{t}(h_{\tau_1})=(-1)^{n-r}\alpha\, \boldsymbol{t}(\overline{h_{\nu_p}})\ldots \boldsymbol{t}(\overline{h_{\nu_1}})=$$

$$=(-1)^{n-r}\alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1})\ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p})=C_1\,.$$

Отже, кожній сумі 2^p мономів другої підмножини визначника $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}$ відповідає рівна їй сума 2^p мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}$, і навпаки. І кожна така сума $C_3\in \boldsymbol{F}$.

Таким чином, $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}=\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}\in \boldsymbol{F}$ для всіх $i=\overline{1,n}$.

Теорему доведено.

Зауваження 2.5.1. Оскільки, всі стовпцеві та рядкові визначники ермітової матриці рівні між собою, то для неї можемо однозначно ввести поняття визначника матриці, який будемо розкривати як рядковий по будь-якому рядку, або як стовпцевий по будь-якому стовпцю матриці

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} := \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A} \text{ для всіх } i = \overline{1,n},$$

де $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ - довільна ермітова матриця над тілом $\boldsymbol{S}$.

Зауваження 2.5.2. За лемою 2.2.1, розкриваючи визначник $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$ по деякому k-му рядку, одержимо

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = -\sum_{\sigma\in S_n} a_{kj}\cdot \boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}^{kk}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.k}\right) + a_{kk}\cdot \boldsymbol{rdet}_l\,\mathbf{A}^{kk}, \qquad (2.13)$$

де $l = \boldsymbol{min}\{I_n \setminus \{k\}\}$.

Порівнюючи вирази (1.2) і (2.13) для ермітової матриці $\mathbf{A}$ над тілом кватерніонів та враховуючи, що обидва вони не залежать від індексу k, а також і l (оскільки, $\mathbf{A}^{kk}$ - ермітова), очевидним є висновок, що введений визначник ермітової матриці співпадає з визначником Мура та є його узагальненням в асоціативній композиційній алгебрі $\boldsymbol{S}$. А множина всіх рядкових та стовпцевих визначників довільної квадратної матриці над тілом з інволюцією $\boldsymbol{S}$ є повним і природним узагальненням визначника Мура (введеного для ермітових матриць) на множині квадратних матриць над тілом $\boldsymbol{S}$.

2.6. Властивості рядкових та стовпцевих визначників ермітової матриці над тілом

Теорема 2.6.1. *Нехай* $\mathbf{P}(1,i)$ *- матриця перестановок, що одержується з одиничної матриці перестановкою її* i*-го рядка для деякого* $i \in \{2,\dots,n\}$ *з її першим рядком, і* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *- ермітова матриця над тілом* $\boldsymbol{S}$. *Тоді* $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A}\right) = -\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}$.

Доведення. Матриця $\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A}$ - це матриця, яка одержується з ермітової матриці $\mathbf{A}$ перестановкою її i-го рядка з її першим рядком. Позначимо перший та i-й рядок матриці $\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A}$, відповідно, як $\tilde{\mathbf{a}}_{1.}=\left(\tilde{a}_{11},\ldots,\tilde{a}_{1n}\right)$ та $\tilde{\mathbf{a}}_{i.}=\left(\tilde{a}_{i1},\ldots,\tilde{a}_{in}\right)$. Інші її рядки співпадають із рядками матриці $\mathbf{A}$.

Будемо розкривати визначник ермітової матриці $\mathbf{A}$ як рядковий по першому рядку. Розглянемо довільний моном d визначника $\boldsymbol{rdet}_1\,\mathbf{A}$. Нехай індекси множників його складають підстановку, яка в звичайній формі записана прямим добутком r незалежних циклів. Розглянемо всі можливі випадки розміщення елемента її i-го рядка, як множника, в мономі d.

1. Нехай елемент i-го рядка розташований у мономі d так, що індекс i знаходяться в тому ж циклі, що й індекс 1, тобто,

$$d=(-1)^{n-r}a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s-1}i}\cdot a_{i\,i_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+1}1}\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_r,$$

де, для всіх $k=\overline{2,r}$, h_k - добутки множників, індекси яких утворюють інші незалежні цикли. Оскільки, за умовою, $a_{1i_1}=\tilde{a}_{ii_1}$ для всіх $i_1\in I_n$ та $a_{i\,i_s}=\tilde{a}_{1i_s}$ для всіх $i_s\in I_n$, то серед мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A}\right)$ знайдеться такий моном g, що виконується рівність

$$g=(-1)^{n-r-1}\tilde{a}_{ii_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s-1}i}\cdot\tilde{a}_{1i_s}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+1}1}\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_r=-d.$$

Моном d протилежний моному g в силу того, що індекси монома g складають підстановку, яка містить $r+1$ незалежний цикл, в той час як моном d містить r незалежних циклів.

2. Нехай тепер елемент i-го рядка розташований у мономі d так, що його індекс i розпочинає незалежний цикл, в який не входить індекс 1, тобто,

$$d = (-1)^{n-r} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i i_s} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+m} i} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

де для всіх $\tau = \overline{1,\rho}$ та $t = \overline{1,p}$ таких, що $\rho + p = r - 2$, u_τ та v_t - добутки множників, індекси яких утворюють, відповідно, ρ і p незалежних циклів. Або такі добутки можуть бути відсутні. Для d на множині мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_1 \mathbf{A}$ знайдеться наступний

$$d_1 = (-1)^{n-r} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_s i} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p.$$

Позначимо $x := a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1}$ і $y := a_{i i_s} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+m} i}$, тоді спряжений до y буде мати вигляд $\overline{y} = a_{i i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_s i}$. Розглянемо суму цих мономів:

$$d + d_1 = (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y + x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y}) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =$$

$$= (-1)^{n-r} \boldsymbol{t(}y\boldsymbol{)} x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =: C\,.$$

Серед мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i) \cdot \mathbf{A}\right)$ можна вибрати мономи g і g_1 такі, що відповідають мономам d і d_1, та індекси яких містять $r-1$ незалежний цикл.

$$g = (-1)^{n-r+1} \widetilde{a}_{ii_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1} \cdot \widetilde{a}_{1 i_s} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+m} i} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$g_1 = (-1)^{n-r+1} \widetilde{a}_{ii_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1} \cdot \widetilde{a}_{1 i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1} i} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p.$$

Знайдемо їх суму, враховуючи, що $\tilde{a}_{i\,i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1} = a_{1 i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1} = x$, $\tilde{a}_{1 i_s} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+m} i} = a_{i\,i_s} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+m} i} = y$, $\tilde{a}_{1 i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_s i} = a_{i\,i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_s i} = \overline{y}$. Тоді одержимо

$$g + g_1 = (-1)^{n-r+1}(x \cdot y + x \cdot \overline{y}) \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =$$

$$= (-1)^{n-r+1}\, \boldsymbol{t}(y) x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = -C\,.$$

Отже, в цьому випадку сумі двох мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A}$ відповідає протилежна до неї за знаком сума двох відповідних мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i) \cdot \mathbf{A}\right)$.

3. Нехай тепер елемент i-го рядка розміщений у мономі d так, що його індекс i входять в інший незалежний цикл, ніж індекс 1, але не розпочинає його

$$d = (-1)^{n-r}\, a_{1 i_1} \ldots a_{i_k 1} u_1 \ldots u_\rho a_{i_q\, i_{q+1}} \ldots a_{i_s i}\, a_{i\, i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}\, i_q} v_1 \ldots v_p\,,$$

де для всіх $\tau = \overline{1,\rho}$ та $t = \overline{1,p}$ таких, що $\rho + p = r - 2$, u_τ та v_t -добутки множників, індекси яких утворюють, відповідно, ρ і p незалежних циклів. Або такі добутки відсутні. Для d на множині мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A}$ знайдеться наступний моном

$$d_1 = (-1)^{n-r}\, a_{1 i_1} \ldots a_{i_k 1} u_1 \ldots u_\rho a_{i_q\, i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1} i} a_{i\, i_s} \ldots a_{i_{q+1}\, i_q} v_1 \ldots v_p\,.$$

Знову позначимо $x := a_{1 i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k 1}$, $\varphi := a_{i\, i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}\, i_q}$ і $\phi := a_{i_q\, i_{q+1}} \ldots a_{i_s i}$, $y := a_{i_q\, i_{q+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_s i}\, a_{i\, i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{q-1}\, i_q} = \phi\varphi$, тоді спряжений до y буде мати вигляд $\overline{y} = a_{i_q\, i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1} i} a_{i\, i_s} \ldots a_{i_{q+1}\, i_q}$. Розглянемо суму цих мономів:

$$d + d_1 = (-1)^{n-r}(x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y + x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y}) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =$$

$$= (-1)^{n-r}\, \boldsymbol{t}(y) x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =: C\,\textbf{.}$$

На множині мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i) \cdot \mathbf{A}\right)$ знову можна вибрати мономи g і g_1, що відповідають мономам d і d_1, індекси яких містять $r-1$ незалежних циклів.

$$g = (-1)^{n-r+1} \tilde{a}_{i i_1} \ldots a_{i_k 1} \tilde{a}_{1 i_s} \ldots a_{i_{q+1}\, i_q} a_{i_q\, i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1}\, i} u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p\,\boldsymbol{,}$$

$$g_1 = (-1)^{n-r+1} \tilde{a}_{i i_1} \ldots a_{i_k 1} \tilde{a}_{1 i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}\, i_q} a_{i_q\, i_{q+1}} \ldots a_{i_s\, i} u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p\,\textbf{.}$$

Крім уведених вище позначень, нехай $y_1 := \tilde{a}_{1 i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}\, i_q} a_{i_q\, i_{q+1}} \ldots a_{i_s\, i}$, тоді $y_1 = \varphi \cdot \phi$. Оскільки $a_{1 i_1} = \tilde{a}_{i\, i_1}$, $a_{i\, i_s} = \tilde{a}_{1 i_s}$, $a_{i\; i_s+1} = \tilde{a}_{1 i_s+1}$, тоді $\overline{y_1} := \tilde{a}_{1 i_s} \ldots a_{i_{q+1}\, i_q} a_{i_q\, i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1}\, i}$. Знайдемо суму цих мономів

$$g + g_1 = (-1)^{n-r+1}(x \cdot \overline{y_1} + x \cdot y_1) \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =$$

$$= (-1)^{n-r+1}\, \boldsymbol{t}(y_1) x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =: C_1\,\textbf{.}$$

Оскільки, за лемою 2.5.2 $\boldsymbol{t}(y_1) = \boldsymbol{t}(\varphi \cdot \phi) = \boldsymbol{t}(\phi \cdot \varphi) = \boldsymbol{t}(y)$, то знову $C_1 = -C$. Таким чином, можливі два випадки: або довільному моному визначника $\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A}$ відповідає протилежний до нього за знаком моном визначника $\boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{P}(1,i) \cdot \mathbf{A}\right)$, або парі мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_1\, \mathbf{A}$ відповідає така пара відповідних мономів визначника $\mathbf{rdet}_i(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A})$, що їх суми є протилежні за знаком. Тоді і визначники $\mathbf{rdet}_1\mathbf{A}$ та $\mathbf{rdet}_i(\mathbf{P}(1,i)\cdot\mathbf{A})$, як суми таких мономів також відрізняються тільки знаком.

Теорему доведено.

Теорема 2.6.2. *Якщо* $\mathbf{P}(i,1)$ *- матриця перестановок і* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *- ермітова матриця, тоді* $\mathbf{cdet}_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}(i,1))=-\mathbf{det}\,\mathbf{A}$ *для всіх* $i=\overline{2,n}$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.6.1.

Теорема 2.6.3. *Якщо матриця* $\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ *одержується з ермітової матриці* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *заміною її* j*-го рядка -* i*-м рядком, тоді* $\mathbf{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})=0$ *для всіх* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, що* $i\neq j$.

Доведення. Будемо вважати, що ермітова матриця $\mathbf{A}$ має порядок вище третього. Для ермітових матриць другого та третього порядків твердження теореми легко доводиться безпосередньою перевіркою.

Розглянемо довільний моном d визначника $\mathbf{rdet}_j\,\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ для деяких $i,j=\overline{1,n}$ таких, що $i\neq j$. Нехай індекси його множників складають підстановку, яка містить r незалежних циклів і позначимо $i_s:=i$. Розглянемо всі можливі випадки розміщення елемента i_s-го рядка як множника в мономі d.

1. Нехай елемент i_s-го рядка розташований у мономі d так, що індекс i_s розпочинає незалежний цикл

$$d=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\ldots a_{i_kj}\,u_1\ldots u_\rho\,a_{i_si_{s+1}}\ldots a_{i_{s+m}i_s}v_1\ldots v_p\,, \tag{2.14}$$

де для всіх $\tau=\overline{1,\rho}$ та $t=\overline{1,p}$ таких, що $\rho+p=r-2$, u_τ та v_t - добутки множників, індекси яких утворюють, відповідно, ρ і p незалежних циклів. Або такі добутки можуть бути відсутні. Для d серед мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ знайдуться ще три наступні

$$d_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+m}i_s} \cdot a_{i_s i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p\,,$$

$$d_2 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1}i_s} \cdot a_{i_s i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p\,,$$

$$d_3 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1}i_s} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p\,.$$

Позначимо $a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} =: x$ і $a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{s+m} i_s} =: y$, тоді для спряженого до y одержимо $\overline{y} = a_{i_s i_{s+m}} \ldots a_{i_{s+1} i_s}$. Враховуючи, що за умовою теореми $a_{ji_1} = a_{i_s i_1}$, $a_{ji_{s-1}} = a_{i_s i_{s-1}}$, $a_{ji_{s+1}} = a_{i_s i_{s+1}}$, розглянемо суму цих мономів:

$$\begin{gathered} d + d_1 + d_2 + d_3 = \\ = (-1)^{n-r}(x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y - y \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - \overline{y} \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + \\ + x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y}) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r}(x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y - \\ - y \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - (\boldsymbol{t}(y) - y) \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \times \\ \times (\boldsymbol{t}(y) - y)) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r}(x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y - \\ - y \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - \boldsymbol{t}(y)\, x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + y \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + \\ + \boldsymbol{t}(y)\, x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = 0\,. \end{gathered}$$

Отже, для монома d серед мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ знайшлися ще три таких, що їх сума разом із d дорівнює нулю.

У випадку, коли у формулі (2.14) $m = 0$ або $m = 1$, то, відповідно, одержимо мономи

$$\widetilde{d} = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_s} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p\,,$$

$$\breve{d} = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_{s+1}} \cdot a_{i_{s+1} i_s} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p .$$

І для них на множині мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ знайдуться наступні

$$\tilde{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_s} \cdot a_{i_s i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p ,$$

$$\breve{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+1}} \cdot a_{i_{s+1} i_s} \cdot a_{i_s i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p .$$

Враховуючи, що $a_{ji_1} = a_{i_s i_1}$, $a_{ji_s} = a_{i_s i_s}$, $a_{ji_{s+1}} = a_{i_s i_{s+1}}$ і те, що $a_{i_s i_s} \in \boldsymbol{F}$, $a_{i_s i_{s+1}} \cdot a_{i_{s+1} i_s} = \boldsymbol{n}\left(a_{i_s i_{s+1}}\right) \in \boldsymbol{F}$, одержимо

$$\tilde{d} + \tilde{d}_1 = 0, \qquad \breve{d} + \breve{d}_1 = 0.$$

Отже, в цьому випадку відповідні пари мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ дорівнюють нулю.

2. Нехай тепер елемент i_s-го рядка розташований у мономі d так, що індекс i_s входить в інший незалежний цикл, ніж індекс j, але не розпочинає його

$$d = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \ldots a_{i_k j} u_1 \ldots u_\rho a_{i_q i_{q+1}} \ldots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1} i_q} v_1 \ldots v_p ,$$

де для всіх $\tau = \overline{1, \rho}$ та $t = \overline{1, p}$ таких, що $\rho + p = r - 2$, u_τ та v_t - добутки множників, індекси яких утворюють, відповідно, ρ і p незалежних циклів (або такі добутки відсутні). Серед мономів $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}$ знову можемо вибрати ще три наступні

$$\widehat{d}_1 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}i_q} a_{i_q i_{q+1}} \ldots a_{i_{s-1}i_s} a_{i_s i_1} \ldots a_{i_k j} \cdot u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p \,,$$

$$\widehat{d}_2 = (-1)^{n-r+1} a_{ji_{s-1}} \ldots a_{i_{q+1}i_q} a_{i_q i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1}i_s} a_{i_s i_1} \ldots a_{i_k j} u_1 \ldots u_\rho v_1 \ldots v_p \,,$$

$$\widehat{d}_3 = (-1)^{n-r} a_{ji_1} \ldots a_{i_k j} u_1 \ldots u_\rho a_{i_q i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1}i_s} a_{i_s i_{s-1}} \ldots \cdot a_{i_{q+1}i_q} v_1 \ldots v_p \,.$$

Зробимо наступні позначення. Нехай $a_{ji_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} =: x$, $a_{i_q i_{q+1}} \ldots a_{i_{s-1}i_s} a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}i_q} =: y$, $a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{q-1}i_q} a_{i_q i_{q+1}} \ldots a_{i_{s-1}i_s} =: y_1$, $a_{i_q i_{q+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s-1}i_s} =: \phi$, $a_{i_s i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{q-1}i_q} =: \varphi$, тоді $y = \phi \cdot \varphi$, $y_1 = \varphi \cdot \phi$ і $\overline{y} = a_{i_q i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1}i_s} a_{i_s i_{s-1}} \ldots a_{i_{q+1}i_q}$, $\overline{y_1} = a_{i_s i_{s-1}} \ldots a_{i_{q+1}i_q} a_{i_q i_{q-1}} \ldots a_{i_{s+1}i_s}$. Враховуючи, що $a_{ji_1} = a_{i_s i_1}$, $a_{ji_{s-1}} = a_{i_s i_{s-1}}$, $a_{ji_{s+1}} = a_{i_s i_{s+1}}$, розглянемо суму:

$$d + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2 + \widehat{d}_3 =$$
$$= (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y - y_1 \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - \overline{y_1} \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho +$$
$$+ x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y}) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y -$$
$$- y_1 \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho - (\boldsymbol{t}(y_1) - y_1) \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \times$$
$$\times (\boldsymbol{t}(y) - y)) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p = (-1)^{n-r} (x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y - y_1 \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho -$$
$$- \boldsymbol{t}(y_1) x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + y_1 \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho + \boldsymbol{t}(y) x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho -$$
$$- x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y) \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p =$$
$$= (-1)^{n-r} (\boldsymbol{t}(\phi \cdot \varphi) - \boldsymbol{t}(\varphi \cdot \phi)) \cdot x \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p \,.$$

Оскільки, за лемою 2.5.2 маємо $\boldsymbol{t}(\phi \cdot \varphi) = \boldsymbol{t}(\varphi \cdot \phi)$, то знову одержимо рівність $d + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2 + \widehat{d}_3 = 0$.

в) Якщо ж у вибраному мономі d індекс i_s знаходиться в тому ж циклі, що й індекс j, то d, очевидно, співпадає з одним із наступних мономів: $d_1, \widetilde{d}_1, \breve{d}_1$, або $\widehat{d}_1$. І як показано вище, для кожного з них на множині мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ знайдуться ще один або три такі йому відповідні, що сума цієї пари або четвірки мономів дорівнює нулю.

Оскільки, ми розглянули всі можливі, в залежності від розміщення елемента i-го рядка, типи монома d визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ і для кожного з них знайшовся один або три таких відповідних монома, що сума цієї пари або четвірки мономів дорівнює нулю, тоді $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) = 0$ для деяких $i, j = \overline{1, n}$ таких, що $i \neq j$.

Теорему доведено.

Аналогічно доводиться і наступна теорема:

Теорема 2.6.4. *Якщо матриця* $\mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j})$ *одержується з ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *заміною її* i*-го стовпця -* j*-м стовпцем, тоді* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.j}) = 0$ *для всіх* $i, j = \overline{1, n}$ *таких, що* $i \neq j$.

Наслідок 2.6.1. *Якщо ермітова матриця* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *містить два однакові рядки (стовпці), тоді* $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = 0$.

Доведення. Нехай в ермітової матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ її i-й рядок співпадає з її j-м рядком, тобто, $a_{ik} = a_{jk}$ для всіх $k \in I_n$ та $\{i, j\} \in I_n$, якщо $i \neq j$. Тоді $\overline{a_{ik}} = \overline{a_{jk}}$. А це означає, що $a_{ki} = a_{kj}$ для всіх $k \in I_n$ та $\{i, j\} \in I_n$, коли $i \neq j$, оскільки матриця $\mathbf{A}$ - ермітова. Тобто, якщо в ермітової матриці співпадають два її рядки, тоді також співпадають два її відповідні, - з тими ж індексами, стовпці. Матрицю $\mathbf{A}$ можна представити також як $\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$, - матрицю, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$ заміною її j-го рядка - i-м рядком. Тоді, в силу теореми 2.5.3 та розглядаючи визначник ермітової матриці $\mathbf{A}$ як рядковий по j-му рядку, одержимо $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) = 0$.

Наслідок доведений.

Теорема 2.6.5. *Якщо* $\mathbf{A}_{i.}\left(b\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)$ *- матриця, яку одержимо з ермітової матриці* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$*, замінивши її* i*-й рядок її* j*-м рядком помноженим зліва на елемент* b *тіла* $\boldsymbol{S}$*, тоді* $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(b\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)=0$ *для всіх* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, що* $i\neq j$.

Доведення. За теоремою 2.4.3 маємо $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(b\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)=b\cdot\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{j.}\right)$ для всіх $i,j=\overline{1,n}$ таких, що $i\neq j$. Але за теоремою 2.6.3 $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{j.}\right)=0$, як визначник по i-му рядку матриці $\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{j.}\right)$, яку одержали з ермітової, замінивши її i-й рядок - j-м рядком.

Отже, $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(b\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)=0$.

Теорему доведено.

Теорема 2.6.6. *Якщо* $\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ *- матриця, яку одержимо з ермітової матриці* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$*, замінивши її* i*-й стовпець її* j*-м стовпцем помноженим справа на елемент* b *тіла* $\boldsymbol{S}$*, тоді* $\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)=0$ *для всіх* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, що* $i\neq j$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.6.5, опираючись на теореми 2.4.4 та 2.6.4.

Теорема 2.6.7. *Якщо* $\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ *- матриця, яку одержимо з ермітової матриці* $\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$*, замінивши її* i*-й стовпець її* j*-м стовпцем помноженим справа на елемент* b *тіла* $\boldsymbol{S}$*, тоді* $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)=0$ *для всіх* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, що* $i\neq j$.

Доведення. Будемо вважати, що ермітова матриця $\mathbf{A}$ має порядок вище третього. Для ермітових матриць другого та третього порядків твердження теореми легко доводиться безпосередньою перевіркою.

Розглянемо довільний моном d визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ для деяких $i, j=\overline{1,n}$ таких, що $i \neq j$. Нехай індекси його множників складають підстановку, що містить r незалежних циклів і позначимо $i_s := i$. Розглянемо всі можливі випадки розміщення елемента i_s-го рядка як множника в d.

1. Нехай елемент i_s-го рядка розташований у мономі d так, що індекс i_s розпочинає незалежний цикл

$$d=(-1)^{n-r} a_{j i_1} \ldots a_{i_k j}\, b u_1 \ldots u_\rho\, a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{s+m} i_s} v_1 \ldots v_p, \qquad (2.15)$$

де для всіх $\tau=\overline{1,\rho}$ та $t=\overline{1,p}$ таких, що $\rho+p=r-2$, u_τ та v_t - добутки множників, індекси яких утворюють, відповідно, ρ і p незалежних циклів (або такі добутки можуть бути відсутні). Для d серед мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ знайдуться ще три наступні мономи

$$d_1=(-1)^{n-r} a_{j i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot a_{i_s i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1} i_s} \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$d_2=(-1)^{n-r+1} a_{j i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_s} \cdot a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{s+m} j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p,$$

$$d_3=(-1)^{n-r+1} a_{j i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_s} \cdot a_{i_s i_{s+m}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{s+1} j} \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_p.$$

Позначимо $a_{j i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k j} =: x$ і $a_{i_s i_{s+1}} \ldots a_{i_{s+m} i_s} =: y$, тоді спряжений до y має вигляд $\overline{y}=a_{i_s i_{s+m}} \ldots a_{i_{s+1} i_s}$. Враховуючи, що за умовою теореми $a_{i_k j}=a_{i_k i_s}$, $a_{i_{s+m} j}=a_{i_{s+m} i_s}$, $a_{i_{s+1} j}=a_{i_{s+1} i_s}$, розглянемо суму цих мономів

$$d+d_1+d_2+d_3=$$

$$=(-1)^{n-r}(x \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot y + x \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho \cdot \overline{y} - x \cdot y \cdot b \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_\rho -$$

$$-x\cdot\overline{y}\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho)\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=(-1)^{n-r}(x\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot(y+\overline{y})-$$

$$-x\cdot(y+\overline{y})\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho)\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=(-1)^{n-r}(x\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot \boldsymbol{t}(y)-$$

$$-x\cdot\boldsymbol{t}(y)\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho)\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=0.$$

Таким чином, для монома d серед мономів рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ знайшлися ще три таких, що їх сума разом із d дорівнює нулю.

У випадку, коли у формулі (2.15) $m=0$ або $m=1$, то відповідно одержимо мономи

$$\tilde{d}=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot a_{i_si_s}\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p,$$

$$\breve{d}=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot a_{i_si_{s+1}}\cdot a_{i_{s+1}i_s}\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p.$$

І для них на множині мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ знайдуться наступні

$$\tilde{d}_1=(-1)^{n-r+1}a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_ki_s}a_{i_sj}\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p,$$

$$\breve{d}_1=(-1)^{n-r+1}a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_ki_s}\cdot a_{i_si_{s+1}}\cdot a_{i_{s+1}j}\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p,$$

Враховуючи, що $a_{i_kj}=a_{i_ki_s}$, $a_{i_sj}=a_{i_si_s}$, $a_{i_{s+1}j}=a_{i_{s+1}i_s}$, і те, що $a_{i_si_s}\in\boldsymbol{F}$, $a_{i_si_{s+1}}a_{i_{s+1}i_s}=\boldsymbol{n}\left(a_{i_si_{s+1}}\right)\in\boldsymbol{F}$, одержимо

$$\tilde{d}+\tilde{d}_1=(-1)^{n-r}(a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot a_{i_si_s}-$$

$$-a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_ki_s}\cdot a_{i_sj}\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho)\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=0,$$

$$\breve{d}+\breve{d}_1=(-1)^{n-r}(a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho\cdot \boldsymbol{n}\left(a_{i_si_{s+1}}\right)-$$
$$-a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_ki_s}\cdot \boldsymbol{n}\left(a_{i_si_{s+1}}\right)\cdot b\cdot u_1\cdot\ldots\cdot u_\rho)\cdot v_1\cdot\ldots\cdot v_p=0.$$

Отже, в цьому випадку відповідні пари мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ дорівнюють нулю.

2. Нехай тепер елемент i_s-го рядка розташований у мономі d так, що індекс i_s входить в інший незалежний цикл, ніж індекс j, але не розпочинає його

$$d=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\ldots a_{i_kj}bu_1\ldots u_\rho a_{i_qi_{q+1}}\ldots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_si_{s+1}}\ldots a_{i_{q-1}i_q}v_1\ldots v_p,$$

де для всіх $\tau=\overline{1,\rho}$ та $t=\overline{1,p}$ таких, що $\rho+p=r-2$, u_τ та v_t - добутки множників, індекси яких утворюють, відповідно, ρ і p незалежних циклів. Або такі добутки можуть бути відсутні. Серед мономів $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ знову можемо вибрати ще три наступні

$$\widehat{d}_1=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\ldots a_{i_kj}bu_1\ldots u_\rho a_{i_qi_{q-1}}\ldots a_{i_{s+1}i_s}a_{i_si_{s-1}}\ldots a_{i_{q+1}i_q}v_1\ldots v_p\quad,$$
$$\widehat{d}_2=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\ldots a_{i_ki_s}a_{i_si_{s-1}}\ldots\cdot a_{i_{q+1}i_q}a_{i_qi_{q-1}}\ldots a_{i_{s+1}j}\,bu_1\ldots u_\rho v_1\ldots v_p\quad,$$
$$\widehat{d}_3=(-1)^{n-r}a_{ji_1}\ldots a_{i_ki_s}a_{i_si_{s-1}}\ldots a_{i_{q+1}i_q}a_{i_qi_{q-1}}\ldots a_{i_{s+1}j}\,bu_1\ldots u_\rho v_1\ldots v_p\quad.$$

Позначимо $a_{ji_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_kj}=:x$, $a_{i_qi_{q+1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s-1}i_s}=:\phi$, $a_{i_si_{s+1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{q-1}i_q}=:\varphi$, тоді спряжені до них дорівнюють $a_{i_si_{s-1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{q+1}i_q}=\overline{\phi}$ та $a_{i_qi_{q-1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{s+1}i_s}=\overline{\varphi}$. Враховуючи, що за умовою теореми $a_{i_kj}=a_{i_ki_s}$, $a_{i_{s-1}j}=a_{i_{s-1}i_s}$, $a_{i_{s+1}j}=a_{i_{s+1}i_s}$, знайдемо суму цих мономів

$$d+\widehat{d}_1+\widehat{d}_2+\widehat{d}_3=$$

$$=(-1)^{n-r}(xbu_1\dots u_\rho\phi\varphi+xbu_1\dots u_\rho\overline{\varphi}\overline{\phi}-$$

$$-x\varphi\phi bu_1\dots u_\rho-x\overline{\phi}\overline{\varphi}bu_1\dots u_\rho)v_1\dots v_p=$$

$$=(-1)^{n-r}(xbu_1\dots u_\rho(\phi\varphi+\overline{\phi\varphi})-x(\varphi\phi+\overline{\varphi\phi})bu_1\dots u_\rho)v_1\dots v_p=$$

$$=(-1)^{n-r}(xbu_1\dots u_\rho\,\boldsymbol{t}(\phi\varphi)-x\,\boldsymbol{t}(\varphi\phi)bu_1\dots u_\rho)v_1\dots v_p.$$

Оскільки, за лемою 2.5.2 маємо $\boldsymbol{t}(\phi\cdot\varphi)=\boldsymbol{t}(\varphi\cdot\phi)\in\boldsymbol{F}$, то знову одержимо рівність $d+\widehat{d}_1+\widehat{d}_2+\widehat{d}_3=0$.

в) Якщо ж у вибраному мономі d індекс i_s знаходиться в тому ж циклі, що й індекс j, тоді d представляється у вигляді d_2 або d_3, $\widehat{d}_2$ або $\widehat{d}_3$, та або $\widetilde{d}_1$, або $\breve{d}_1$. І як показано вище, для кожного з них на множині мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ знайдуться ще один або три такі йому відповідні, що сума такої пари або четвірки мономів дорівнює нулю.

Оскільки, ми розглянули всі можливі, в залежності від розміщення елемента i-го рядка, типи монома d визначника $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ і для кожного з них знайшовся один або три таких відповідних монома, що сума цієї пари або четвірки мономів дорівнює нулю, тоді $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)=0$ для всіх $i,j=\overline{1,n}$ таких, що $i\neq j$.

Теорему доведено.

Наслідок 2.6.2. *Якщо матриця* $\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\right)$ *одержується з ермітової матриці* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *заміною її* i*-го стовпця її* j*-м стовпцем, тоді* $\boldsymbol{rdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}\right)=0$ *для всіх* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, що* $i\neq j$.

Доведення наслідку, очевидно, випливає з теореми 2.6.7, поклавши $b=1$.

Теорема 2.6.8. *Якщо* $\mathbf{A}_{i.}\left(b\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)$ *- матриця, яку одержимо з ермітової матриці* $\mathbf{A}$, *замінивши її* i*-й рядок* j*-м рядком помноженим зліва на довільний елемент* b *тіла* $\boldsymbol{S}$, *тоді* $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(b\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)=0$ *для всіх* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, що* $i\neq j$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.6.7.

Наслідок 2.6.3. *Якщо матриця* $\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{j.}\right)$ *одержується з ермітової матриці* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *заміною її* i*-го рядка* j*-м рядком, тоді* $\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{j.}\right)=0$ *для всіх* $i,j=\overline{1,n}$ *таких, що* $i\neq j$.

Доведення наслідку, очевидно, випливає з теореми 2.6.8, поклавши $b=1$.

Лема 2.6.1. *Якщо* $\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ *- матриця, яку одержимо з ермітової матриці* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, *помноживши справа її* i*-й стовпець на довільний елемент* b *тіла* $\boldsymbol{S}$, *тоді для довільного* $i=\overline{1,n}$ *одержимо*

$$\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)=\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}\left(b\cdot\mathbf{a}_{.i}\right)=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\cdot b\,.$$

Доведення. Розглянемо довільний моном d рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ для довільного $i=\overline{1,n}$, де $\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i}\cdot b\right)$ - матриця, яку одержимо з ермітової матриці помноживши її i-й стовпець справа на довільний елемент b тіла $\boldsymbol{S}$. Позначимо $i_{k_1}:=i$.

$$\begin{gathered}d=(-1)^{n-r}a_{i_{k_1}i_{k_1+1}}\ldots a_{i_{k_1+l_1}i_{k_1}}\,b\,a_{i_{k_2}i_{k_2+1}}\ldots a_{i_{k_2+l_2}i_{k_2}}\ldots\times\\ \times a_{i_{k_r}i_{k_r+1}}\ldots a_{i_{k_r+l_r}i_{k_r}}=(-1)^{n-r}h_1\cdot b\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_r\,,\end{gathered}\qquad(2.16)$$

де $h_s=a_{i_{k_s}i_{k_s+1}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{k_s+l_s}i_{k_s}}$ для всіх $s=\overline{1,r}$.

Якщо $l_s = 1$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}} = \boldsymbol{n}(a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}) \in \boldsymbol{F}$, а якщо $l_s = 0$, тоді $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s}} \in \boldsymbol{F}$. Нехай хоча б при деякому s, $l_s \geq 2$.

Індекси елементів матриці $\mathbf{A}$ в мономі d утворюють підстановку σ, яка згідно означення рядкового визначника в звичайній формі записана прямим добутком незалежних циклів, а в нормальній формі є впорядкованою зліва. Позначимо через $\sigma_s(i_{k_s}) := (i_{k_s} i_{k_s+1} \ldots i_{k_s+l_s})$ незалежний цикл, який утворюють індекси монома d і якому відповідає множник h_s. Тоді $\sigma_s^{-1}(i_{k_s}) o = (i_{k_s} i_{k_s+l_s} \ldots i_{k_s+1})$ - незалежний цикл, обернений до $\sigma_s(i_{k_s})$, і якому відповідає множник $\overline{h_s}$. На множині всіх мономів визначника $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b)$, індекси яких утворюють підстановки в звичайній формі записані прямим добутком незалежних циклів $\sigma_s(i_{k_s})$ або $\sigma_s^{-1}(i_{k_s})$, зберігаючи їх послідовність по s від 1 до r, а в нормальній формі - впорядковані зліва згідно (2.2)-(2.3), знайдуться ще 2^{p-1} таких мономів, (де $p = r - \rho$, а ρ – кількість циклів першого та другого порядку), що їх сума C_1, - цих мономів разом з d, за лемою 2.5.1 дорівнює:

$$C = (-1)^{n-r} b \cdot \alpha\, \boldsymbol{t}(h_{\nu_1}) \ldots \boldsymbol{t}(h_{\nu_p}),$$

де $\alpha \in \boldsymbol{F}$ - добуток множників, індекси яких складають незалежні цикли першого та другого порядку. Оскільки $\boldsymbol{t}(h_{\nu_k}) \in \boldsymbol{F}$ для всіх $\nu_k \in \{1, \ldots, r\}$, та $k = \overline{1, p}$. Тоді всі множники C, крім b, є елементами поля $\boldsymbol{F}$, а тому b комутує з ними. Оскільки це виконується для довільного d, то для $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b)$, як для суми всіх можливих мономів виду (2.16) виконується рівність $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}(\mathbf{a}_{.i} \cdot b) = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} \cdot b = b \cdot \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}$.

Рівність $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(b \cdot \mathbf{a}_{.i}\right) = b \cdot \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = b \cdot \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}$ є очевидно справедливою в силу теореми 2.4.3.

Лему доведено.

Лема 2.6.2. *Якщо* $\mathbf{A}_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{i.}\right)$ *- матриця, яку одержимо з ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$*, помноживши зліва її* i *-й рядок на довільний елемент* b *тіла* $\boldsymbol{S}$*, тоді* $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{i.}\right) = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.} \cdot b\right) = b \cdot \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}$ *для довільного* $i = \overline{1, n}$.

Доведення аналогічне доведенню леми 2.6.1.

Означення 2.6.1. Будемо говорити, що i -й рядок, $\mathbf{a}_{i.} = \left(a_{i1}, \ldots, a_{in}\right)$, матриці $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ є *лівою лінійною комбінацією рядків* $\mathbf{a}_{i_1.}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k.}$ із коефіцієнтами $c_1, \ldots, c_k$, де $i_k \in I_m$ та $c_l \in \boldsymbol{S}$ для довільного $l = \overline{1, k}$, якщо $\mathbf{a}_{i.} = c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}$.

Теорема 2.6.9. *Якщо* i *-й рядок ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *замінити лівою лінійною комбінацією її інших рядків, то рядковий визначник по* i *-му рядку та стовпцевий визначник по* i *-му стовпцю такої матриці дорівнюють нулю для довільного* $i = \overline{1, n}$.

Доведення. Нехай $\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right)$ - матриця, яку одержимо з ермітової матриці $\mathbf{A}$, замінивши її i -й рядок лівою лінійною комбінацією її інших рядків, де $i_l \in I_n \setminus \{i\}$ для всіх $l = \overline{1, k}$ таких, що $k < n$. Тоді за теоремою 2.4.4 для довільного $i = \overline{1, n}$ виконуються рівності

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) =$$
$$= \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.}\right) + \ldots + \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right),$$

а також

$$\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) =$$

$$= \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.}\right) + \ldots + \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right).$$

Але за теоремою 2.6.5 $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_l \cdot \mathbf{a}_{i_l.}\right) = 0$ і за теоремою 2.6.8 $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_l \cdot \mathbf{a}_{i_l.}\right) = 0$ для довільних $i = \overline{1,n}$ та $i_l \in I_n \setminus \{i\}$, і всіх $l = \overline{1,k}$, тоді $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$ та $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$.

Теорему доведено.

Означення 2.6.2. Будемо говорити, що j-й стовпець $\mathbf{a}_{.j} = \left(a_{1j}, \ldots, a_{mj}\right)^T$ матриці $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ є *правою лінійною комбінацією стовпців* $\mathbf{a}_{.j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{.j_k}$ для всіх $j_k \in J_n$ із коефіцієнтами $c_1, \ldots, c_k$, де $c_l \in \boldsymbol{S}$ для довільного $l = \overline{1,k}$, якщо виконується рівність $\mathbf{a}_{.j} = \mathbf{a}_{.j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{.j_k} \cdot c_k$.

Теорема 2.6.10. *Якщо всі елементи j-го стовпця ермітової матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ замінити правою лінійною комбінацією її інших стовпців, то стовпцевий визначник по j-му стовпцю та рядковий визначник по j-му рядку такої матриці дорівнюють нулю для довільного $j = \overline{1,n}$.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.6.9.

Наслідок 2.6.4. *Якщо i-й рядок (стовпець) ермітової матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ для довільного $i = \overline{1,n}$ є лівою лінійною комбінацією її інших рядків (є правою лінійною комбінацією її інших стовпців), тоді $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = 0$.*

Доведення. Згідно до умови теореми $\mathbf{a}_{i.} = c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}$, де $c_l \in \boldsymbol{S}$ для всіх $l = \overline{1,k}$ таких, що $k < n$. Це означає, що для всіх $j \in I_n$ виконується рівність $a_{ij} = c_1 \cdot a_{i_1 j} + \ldots + c_k \cdot a_{i_k j}$, тоді в силу того, що матриця $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ - ермітова, $a_{ji} = \overline{a_{ij}} = \overline{a_{i_1 j}} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \overline{a_{i_k j}} \cdot \overline{c_k}$, тобто,

$$\mathbf{a}_{.i} = \mathbf{a}_{.i_1} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \mathbf{a}_{i_k .} \cdot \overline{c_k},$$

де $c_l \in \boldsymbol{S}$ для всіх $l = \overline{1,k}$ таких, що $k < n$. Таким чином, якщо в ермітової матриці i-й рядок є лівою лінійною комбінацією її рядків із індексами $i_1, \ldots, i_k$, то тоді її i-й стовпець є правою лінійною комбінацією її інших стовпців із тими ж індексами $i_1, \ldots, i_k$.

Матрицю $\mathbf{A}$ можна представити також, як $\mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1 .} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k .}\right)$ - матрицю, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$ заміною її i-го рядка - лівою лінійною комбінацією її рядків з індексами $i_1, \ldots, i_k$, тоді за теоремою 2.6.9 одержимо

$$\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1 .} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k .}\right) =$$
$$= \boldsymbol{rdet}\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1 .} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k .}\right) = 0.$$

Аналогічно, якщо матрицю $\mathbf{A}$ розглядати, як матрицю $\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i_1} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \mathbf{a}_{i_k .} \cdot \overline{c_k}\right)$, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$ заміною її i-го стовпця - правою лінійною комбінацією її стовпців з індексами $i_1, \ldots, i_k$, тоді за теоремою 2.6.10 одержимо

$$\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i_1} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \mathbf{a}_{i_k .} \cdot \overline{c_k}\right) =$$
$$= \boldsymbol{cdet}\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.i_1} \cdot \overline{c_1} + \ldots + \mathbf{a}_{i_k .} \cdot \overline{c_k}\right) = 0.$$

Наслідок доведений.

Теорема 2.6.11. *Якщо до i-го рядка ермітової матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ додати довільну ліву лінійну комбінацію її інших рядків, то рядковий визначник по i-му рядку та стовпцевий визначник по i-му стовпцю такої* *матриці дорівнюють визначнику ермітової матриці* $\mathbf{A}$ *(для довільного* $i = \overline{1,n}$*).*

Доведення. Нехай $\mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.} + c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right)$ - матриця, яку одержимо з ермітової матриці $\mathbf{A}$, додавши до її i-го рядка ліву лінійну комбінацію її інших рядків, де $c_l \in \boldsymbol{S}$ для всіх $l = \overline{1,k}$ таких, що $k < n$, тоді за теоремою 2.4.5 для довільного $i = \overline{1,n}$ одержимо

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.} + c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = \\ = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} + \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right),$$

а також

$$\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.} + c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = \\ = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} + \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right).$$

Оскільки, за теоремою 2.6.9 $\boldsymbol{rdet}_i\, A_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$ та $\boldsymbol{cdet}_i\, A_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = 0$, то для ермітової матриці $\mathbf{A}$ одержимо

$$\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(\mathbf{a}_{i.} + c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{A},$$
$$\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(c_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1.} + \ldots + c_k \cdot \mathbf{a}_{i_k.}\right) = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}.$$

Теорему доведено.

Теорема 2.6.12. *Якщо до всіх елементів* j *-го стовпця ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *додати довільну праву лінійну комбінацію її інших стовпців, то стовпцевий визначник по* j *-му стовпцю та рядковий визначник по* j *-му рядку такої матриці дорівнюють визначнику ермітової матриці* $\mathbf{A}$ *(для довільного* $j = \overline{1,n}$*).*

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.6.11, опираючись на теореми 2.4.6 та 2.6.10.

2.7. Діагоналізація ермітової матриці

Теорема 2.7.1. *Якщо* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *- ермітова матриця і* $\mathbf{P}_{ij}(b)$ *- елементарна унімодулярна матриця, тоді* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{ij}(b) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{ij}^{*}(b)\right)$ *для всіх* $i, j = \overline{1,n}$ *таких, що* $i \neq j$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що для довільної квадратної матриці $\mathbf{U} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ й ермітової $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$, матриця $\mathbf{U}^{*}\mathbf{A}\mathbf{U}$ - ермітова. Дійсно, із властивостей спряженої матриці за лемою 2.3.2 одержимо $\left(\mathbf{U}^{*}\mathbf{A}\mathbf{U}\right)^{*} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{A}^{*}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{A}\mathbf{U}$.

Множення матриці $\mathbf{A}$ зліва на елементарну унімодулярну матрицю $\mathbf{P}_{ij}(b)$ рівносильне додаванню до i-го рядка матриці $\mathbf{A}$ її j-го рядка помноженого зліва на $b \in \boldsymbol{S}$. Множення матриці $\mathbf{A}$ справа на матрицю $\mathbf{P}_{ij}^{*}(b)$, у свою чергу, рівносильне додаванню до i-го стовпця матриці $\mathbf{A}$ її j-го стовпця помноженого справа на $\overline{b}$. Таким чином,

$$\mathbf{P}_{ij}(b) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{ij}^{*}(b) =$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + a_{1j}\overline{b} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ba_{j1} & \dots & \left(ba_{jj} + a_{ij}\right)\overline{b} + ba_{ji} + a_{ii} & \dots & a_{in} + ba_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + a_{nj}\overline{b} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i\text{-й} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} i\text{-й} \end{array} & \end{array}$$

Тоді, в силу теорем 2.4.5 та 2.4.6, одержимо

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_{ij}^{*}(b)\right)=\boldsymbol{cdet}_i\left(\mathbf{P}_{ij}(b)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}_{ij}^{*}(b)\right)=$$

$$=\boldsymbol{cdet}_i\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1}+ba_{j1} & \dots & a_{ii}+ba_{ji} & \dots & a_{in}+ba_{jn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}+$$

i-й

$$+\boldsymbol{cdet}_i\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}\overline{b} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1}+ba_{j1} & \dots & \left(ba_{jj}+a_{ij}\right)\overline{b} & \dots & a_{in}+ba_{jn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nj}\overline{b} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}=$$

i-й

$$=\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}+\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{i.}\left(b\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)+\boldsymbol{cdet}_i\,\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\cdot\overline{b}+$$

$$+\boldsymbol{cdet}_i\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ ba_{j1} & \dots & ba_{jj} & \dots & ba_{jn}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot b\,.$$

Матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ba_{j1} & \dots & ba_{jj} & \dots & ba_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right)_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{j.}\right)$ одержуєть-ся з матриці $\mathbf{A}$ послідовним застосуванням заміни її i-го стовпця її j-м стовпцем, а потім заміни i-го рядка отриманої матриці її j-м рядком помноженим зліва на елемент $b \in \boldsymbol{S}$. Таким чином, її i-м рядком є $b \cdot \mathbf{a}_{j.}$, а її j-м рядком є рядок $\mathbf{a}_{j.}$, тому за теоремою 2.6.8 $\boldsymbol{cdet}_i \left(\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right)_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{j.}\right) = 0$. Крім того, за теоремою 2.6.4 $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right) = 0$ та за теоремою 2.6.8 $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}\left(b \cdot \mathbf{a}_{j.}\right) = 0$.

Отже, $\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{ij}(b) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{ij}^*(b)\right) = \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}$.

Теорему доведено.

Теорема 2.7.2. *Якщо* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *- ермітова матриця і* $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ *- довільна унімодулярна матриця, тоді*

$$\boldsymbol{det}\, \mathbf{A} = \boldsymbol{det}\left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^*\right). \tag{2.17}$$

Доведення. Відмітимо, що для довільної унімодулярної матриці $\mathbf{U} \in \mathrm{SL}(n, \mathrm{S})$ існує такий ряд $\exists\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m\} \subset \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ елементарних унімодулярних матриць $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}(b_k)$, тобто існує таке натуральне число $m \in \boldsymbol{N}$, що для довільного $k = \overline{1, m}$ існує елемент тіла $b_k \in \boldsymbol{S}$ та існують індекси $i \in I_n$ і $j \in I_n$, при цьому $i \neq j$, що $\mathbf{U} = \mathbf{P}_m \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1$. Тоді $\mathbf{U}^* = \mathbf{P}_1^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_m^*$.

Доведемо формулу (2.17) методом індукції по m.

а) Випадок $m = 1$ доводить теорема 2.7.1.

б) Нехай теорема справджується для $m-1$, тобто, $\mathbf{U} = \mathbf{P}_{m-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1$ і

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_{m-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1{}^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_{m-1}{}^*\right)$$

Позначимо $\mathbf{P}_{m-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1{}^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_{m-1}{}^* := \widetilde{\mathbf{A}}$, як випливає з теореми 2.7.1, матриця $\widetilde{\mathbf{A}}$ - ермітова.

в) Доведемо тепер рівність (2.17) для випадку m. Нехай $\mathbf{U} = \mathbf{P}_m \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1$, тоді в силу теореми 2.7.1

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_m \mathbf{P}_{m-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1{}^* \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_{m-1}{}^* \mathbf{P}_m^*\right) = \boldsymbol{det}\left(\mathbf{P}_m \cdot \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}_m^*\right) = \boldsymbol{det}\,\widetilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}.$$

Теорему доведено.

Лема 2.7.1. *Якщо* $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{S})$, *тоді* $\{\mathbf{U}^{-1}, \mathbf{U}^*\} \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{S})$.

Доведення. Нехай довільна унімодулярна матриця факторизується наступним чином

$$\mathbf{U} = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k\,, \tag{2.18}$$

де $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}(b_k)$ - елементарні унімодулярні матриці. Тобто, існує таке $m \in \boldsymbol{N}$, що для всіх $k = \overline{1, m}$ існують елементи $b_k \in \boldsymbol{S}$ та індекси $i \in I_n$ і $j \in I_n$ такі, що $i \neq j$ для яких виконується рівність (2.18). Тоді

$$\mathbf{P}_k^{-1} = \mathbf{P}_{ij}^{-1}(b_k) = \mathbf{P}_{ij}(-b_k) \in \boldsymbol{SL(n,S)} \text{ і } \prod_{k=m}^{1} \mathbf{P}_k^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \in \boldsymbol{SL(n,S)},$$

$$\mathbf{P}_k^* = \mathbf{P}_{ij}^*(b_k) = \mathbf{P}_{ji}\left(\overline{b_k}\right) \in \boldsymbol{SL(n,S)} \text{ і } \prod_{k=m}^{1} \mathbf{P}_k^* = \mathbf{U}^* \in \boldsymbol{SL(n,S)}.$$

Лему доведено.

Означення 2.7.1. Будемо говорити, що *ермітова матриця* $\mathbf{A}$ *унімодулярно подібна ермітовій матриці* $\mathbf{B}$, якщо існує така унімодулярна матриця $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, що $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^*$.

Відношення “ермітова матриця $\mathbf{A}$ унімодулярно подібна ермітовій матриці $\mathbf{B}$” позначатимемо: $\mathbf{A} \overset{\sim}{*} \mathbf{B}$.

Теорема 2.7.3. *Відношення унімодулярної подібності ермітових матриць являється відношенням еквівалентності, а саме воно*

а) рефлексивне: $\mathbf{A} \overset{\sim}{*} \mathbf{A}$*;*

б) симетричне: $\mathbf{A} \overset{\sim}{*} \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B} \overset{\sim}{*} \mathbf{A}$*;*

в) транзитивне: $(\mathbf{A} \overset{\sim}{*} \mathbf{B},\ \mathbf{B} \overset{\sim}{*} \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{A} \overset{\sim}{*} \mathbf{C}$.

Доведення. Пункт а) теореми доведений теоремою 2.7.2.

Доведемо пункт б). Нехай $\mathbf{A} \overset{\sim}{*} \mathbf{B}$. Це означає, що існує така унімодулярна матриця $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, що $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^*$. Помноживши цю рівність зліва на $\mathbf{U}^{-1}$ і справа на $(\mathbf{U}^*)^{-1}$, одержимо $\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{U}^*)^{-1}$. Оскільки, в силу леми 2.7.1, $\mathbf{U}^{-1} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ і $(\mathbf{U}^*)^{-1} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, то твердження пункту б) доведено.

Доведемо пункт в). Оскільки, $\mathbf{A} \overset{\sim}{*} \mathbf{B}$ означає існування унімодулярної матриці $\exists \mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ такої, що $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^*$, а з $\mathbf{B} \overset{\sim}{*} \mathbf{C}$ випливає існування $\exists \mathbf{V} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ такої, що $\mathbf{B} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}^*$. Тоді, помноживши останню рівність зліва на $\mathbf{U}$ і справа на $\mathbf{U}^*$, одержимо

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}^* = \mathbf{UV} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{UV} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{UV})^*, \tag{2.19}$$

Зрозуміло, що $\mathbf{UV} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, тому рівність (2.19) доводить пункт в).

Теорему доведено.

Теорема 2.7.4. *Якщо* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ *- ермітова матриця, тоді* $\mathbf{A}$ *унімодулярно подібна деякій діагональній матриці з елементами поля* $\boldsymbol{F}$ *на головній діагоналі, тобто, існує така унімодулярна матриця* $\exists \mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n,\boldsymbol{S})$*, що*

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^* = \boldsymbol{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n),$$

де $\boldsymbol{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ *- діагональна матриця з елементами* $\mu_i \in \boldsymbol{F}$ *для всіх* $i = \overline{1,n}$ *на головній діагоналі. При цьому* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n$.

Доведення. Розглянемо перший стовпець матриці $\mathbf{A}$. Можливі наступні випадки:

1. Нехай $a_{11} \neq 0$, тоді покладемо $\mu_1 = a_{11} \in \boldsymbol{F}$. Домножуючи послідовно матрицю $\mathbf{A}$ зліва на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_{i1}\left(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ для всіх $i = \overline{2,n}$ одержимо матрицю, в якій усі елементи першого стовпця, крім діагонального, нульові.

Оскільки, $\overline{-\frac{a_{i1}}{\mu_1}} = -\frac{a_{1i}}{\mu_1}$, то $\mathbf{P}_{i1}^*\left(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\right) = \mathbf{P}_{1i}\left(-\frac{a_{1i}}{\mu_1}\right)$. Домножуючи послідовно матрицю $\mathbf{A}$ справа на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_{i1}^*\left(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ для всіх $i = \overline{2,n}$ одержимо нульовими всі елементи першого рядка, крім діагонального. При цьому з огляду на теорему 2.7.1 матриця $\mathbf{P}_{i1}\left(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\right) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{i1}^*\left(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ залишається ермітовою.

2. Нехай $a_{11} = 0$ і такий індекс $i \in I_n$, що $a_{i1} \neq 0$. Тоді, помноживши матрицю $\mathbf{A}$ зліва на елементарну унімодулярну матрицю $\mathbf{P}_{1i}(a_{1i})$ і справа на $\mathbf{P}_{i1}(a_{i1})$, одержимо матрицю $\widetilde{\mathbf{A}}$ з елементом $\widetilde{a}_{11} = \boldsymbol{n}(a_{i1})(2 + a_{ii}) \in \boldsymbol{F}$. Покладемо $\mu_1 = \widetilde{a}_{11}$. Тоді, знову домножуючи

послідовно матрицю $\mathbf{A}$ зліва на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_{i1}\left(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ і справа на матриці $\mathbf{P}_{i1}^*\left(-\frac{a_{i1}}{\mu_1}\right)$ для всіх $i=\overline{2,n}$, побудуємо матрицю, в якій усі елементи першого рядка і стовпця, крім діагонального, є нулями.

в) Нехай $a_{i1}=0$ для всіх $i=\overline{1,n}$, тоді покладемо $\mu_1=a_{11}$.

Провівши описану процедуру для кожного діагонального елемента та елементів відповідних рядків і стовпців, через скінчену кількість операцій множення ермітової матриці $\mathbf{A}$ зліва на елементарні унімодулярні матриці $\mathbf{P}_k=\mathbf{P}_{ij}(b_k)$ і справа на $\mathbf{P}_k^*=\mathbf{P}_{ij}\left(\overline{b_k}\right)$ побудуємо діагональну матрицю з елементами головної діагоналі $\mu_i\in \boldsymbol{F}$ для всіх $i=\overline{1,n}$. Покладемо $\mathbf{U}=\prod\limits_k \mathbf{P}_k$, тоді за теоремою 2.7.2

$$\boldsymbol{det(}\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}^*\boldsymbol{)}=\boldsymbol{det\,(diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)\boldsymbol{)}=\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_n .$$

Теорему доведено.

Зауваження 2.7.1. Аксіома 2 для визначника ермітової матриці виконується тільки для комутуючих ермітових матриць, оскільки добуток ермітових матриць є ермітовою матрицею тільки, коли множники комутують. Дійсно, з того, що $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, де $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*$ і $\mathbf{B}=\mathbf{B}^*$ випливає $(\mathbf{AB})^*=\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*=\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$, тоді

$$\boldsymbol{det}(\mathbf{AB})=\boldsymbol{det}\left(\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}^*\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}^*\right)=\boldsymbol{det}(\boldsymbol{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)\boldsymbol{diag}(\eta_1,\ldots,\eta_n))=$$
$$=\mu_1\cdot\eta_1\cdot\ldots\cdot\mu_n\cdot\eta_n=\mu_1\cdot\ldots\cdot\mu_n\cdot\eta_1\cdot\ldots\cdot\eta_n=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{det}\,\mathbf{B} .$$

2.8. Висновки.

1. У першому підрозділі показано, що основним тілом над яким розглядається об’єкт досліджень, – алгебра матриць, є тіло з інволюцією, що є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над полем нульової характеристики. Єдиним прикладом асоціативної некомутативної композиційної нерозщеплюваної алгебри є кватерніонова алгебра з діленням.
2. У другому підрозділі вводяться нові поняття стовпцевих та рядкових визначників квадратних матриць над тілом. Показано, що кожен з них задовольняє властивість розкладу Лапласа по відповідному рядку чи стовпцю. А в цілому множина всіх рядкових та стовпцевих визначників дозволяє провести розклад по будь-якому рядку (2.5) чи стовпцю (2.10). Доведені леми, що розкривають ліві та праві алгебричні доповнення.
3. У третьому підрозділі вводяться основні поняття алгебри матриць над даним тілом. Розглядаються властивості спряженої та транспонованої матриць.
4. У четвертому підрозділі досліджуються властивості рядкових та стовпцевих визначників довільної квадратної матриці над тілом з інволюцією. Зокрема, показано, що ці визначники, як матричні функціонали, є адитивними по будь-якому рядку чи стовпцю, тобто, задовольняють аксіому 3^*, а також аксіому 3. В той же час, в цілому вони не задовольняють ні аксіому 2, ні ключову для означення визначника аксіому 1. Тому для довільної квадратної матриці над асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю введені матричні функціонали ще не є визначниками в повному сенсі.

5. У п'ятому підрозділі доведена рівність між собою всіх стовпцевих та рядкових визначників ермітової матриці над тілом з інволюцією та показано, що своє значення вони приймають в полі – центрі даного тіла. Це значення, в силу його однозначності, приймається як визначник ермітової матриці. Показано, що для ермітової матриці над тілом цей визначник співпадає з визначником Мура, а вся множина стовпцевих та рядкових визначників є його повним та природним узагальненням для довільних квадратних матриць над тілом з інволюцією.

6. У шостому підрозділі досліджуються властивості визначника ермітової матриці, виражені через її стовпцеві та рядкові визначники.

7. У сьомому підрозділі вводиться поняття унімодулярної подібності ермітових матриць над тілом. Показано, що ця подібність є відношенням еквівалентності для ермітових матриць. Доведено, що будь-яка ермітова матриця над тілом з інволюцією унімодулярно подібна діагональній матриці, елементи якої належать полю. Показано, що при певних умовах визначник ермітової матриці задовольняє аксіому 2.

Основні результати розділу викладені в роботах [9 - 11, 14, 15].

РОЗДІЛ 3
АНАЛОГ КЛАСИЧНОЇ ПРИЄДНАНОЇ МАТРИЦІ НАД ТІЛОМ

3.1. Класична приєднана матриця для ермітової над тілом

Означення 3.1.1. Нехай $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Матриця $(L\mathbf{A})^{-1}$ називається *лівою оберненою* до матриці $\mathbf{A}$, якщо $(L\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Означення 3.1.2. Нехай $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Матриця $(R\mathbf{A})^{-1}$ називається *правою оберненою* до матриці $\mathbf{A}$, якщо $\mathbf{A} \cdot (R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I}$.

Означення 3.1.3. Ермітову матрицю над тілом $\boldsymbol{S}$ будемо називати *невиродженою*, якщо її визначник не дорівнює нулю, і *виродженою* в протилежному випадку.

Теорема 3.1.1. *Для ермітової невиродженої матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *існує єдина права обернена матриця* $(R\mathbf{A})^{-1}$ *і єдина ліва обернена матриця* $(L\mathbf{A})^{-1}$, *і вони рівні між собою,* $(R\mathbf{A})^{-1} = (L\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$. *При цьому*

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{n1} \\ R_{12} & R_{22} & \cdots & R_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{1n} & R_{2n} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$(L\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \cdots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & L_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

де R_{ij} *та* L_{ij} *- відповідно праве та ліве алгебричні доповнення елемента* a_{ij} *матриці* $\mathbf{A}$ *для всіх* $i, j = \overline{1,n}$.

Доведення. Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (R\mathbf{A})^{-1}$. Знайдемо елементи матриці $\mathbf{B}$, безпосередньо перемножуючи матриці та застосувавши формулу (2.5). Для всіх $i = \overline{1,n}$ одержимо

$$b_{ii} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot R_{ij} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\, \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}} = 1,$$

а при умові $i \neq j$,

$$b_{ij} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot R_{js} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\, \boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}),$$

де $\mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.})$ - матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$, замінивши її j-й рядок i-м рядком. За теоремою 2.6.3 $\boldsymbol{rdet}_j\, \mathbf{A}_{j.}(\mathbf{a}_{i.}) = 0$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$ таких, що $i \neq j$.

Отже, $b_{ij} = 0$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$ таких, що $i \neq j$.

Таким чином, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ - одинична матриця, а тому матриця $(R\mathbf{A})^{-1}$ є правою оберненою до ермітової матриці $\mathbf{A}$.

Нехай тепер $\mathbf{D} = (L\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Знову знайдемо елементи матриці $\mathbf{D}$, безпосередньо перемножуючи матриці та скориставшись формулою (2.10). Для всіх $i = \overline{1,n}$ одержимо

$$d_{ii} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot a_{ij} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\, \boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}} = 1,$$

а при умові $i \neq j$ маємо,

$$d_{i\,j} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \sum_{s=1}^{n} L_{s\,i} \cdot a_{s\,j} = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)$$

де $\mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)$ - матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$, замінивши її i-й стовпець j-м стовпцем. За теоремою 2.6.4 $\boldsymbol{cdet}_i\, \mathbf{A}_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right) = 0$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$ таких, що $i \neq j$.

Отже, $d_{ij} = 0$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$ таких, що $i \neq j$.

Таким чином, $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ - одинична матриця, а тому матриця $\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}$ є лівою оберненою до матриці $\mathbf{A}$.

Рівність матриць $\left(L\mathbf{A}\right)^{-1} = \left(R\mathbf{A}\right)^{-1}$ випливає (див., наприклад [27]) з умови єдиності оберненої матриці для оборотної матриці з кільця $\boldsymbol{M}\left(n, \boldsymbol{S}\right)$. Рівність матриць можна також довести, показавши рівність їх відповідних елементів.

Розглянемо два відповідні елементи цих матриць, розміщених на перетині i-го рядка та j-го стовпця, $\left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} L_{i\,j}$ та $\left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\right)^{-1} R_{i\,j}$, для деяких $i, j = \overline{1, n}$. Ліве алгебричне доповнення $L_{i\,j}$ є сумою мономів - добутків елементів матриці $\mathbf{A}^{i\,j}$, кожен з яких розпочинається справа елементом i-го стовпця. Розглянемо довільний такий моном

$$d_1 = (-1)^{n-r} a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \ldots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \ldots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} \times$$
$$\times a_{j\, i_{k_1+l_1}} \ldots a_{i_{k_1+1} i} = (-1)^{n-r}\, h_r \cdot \ldots \cdot h_2 \cdot a_{j\, i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1}\, i},$$

де $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s + l_s}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}}$ для всіх $s = \overline{2, r}$. Якщо $l_s = 1$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s+1}} \cdot a_{i_{k_s+1} i_{k_s}} = \boldsymbol{n}(a_{i_{k_s} i_{k_s+1}}) \in \boldsymbol{F}$, а якщо $l_s = 0$, то $h_s = a_{i_{k_s} i_{k_s}} \in \boldsymbol{F}$ для всіх $s = \overline{2, r}$. Якщо ж $l_1 = 1$, тоді покладемо $i_{k_1+1} = j$.

Нехай τ - кількість циклів першого та другого порядків в підстановці, що її утворюють індекси елементів монома d_1. Добуток елементів матриці, індекси яких утворюють цикли першого та другого порядків, є елементом поля. Позначимо його через $\alpha \in \boldsymbol{F}$. Через $u_i := h_{s_i}$ для всіх $i = \overline{1, p}$, де $p = r - \tau$, позначимо добутки елементів, індекси яких утворюють цикли більше ніж другого порядку, тоді

$$d_1 = (-1)^{n-r} \alpha u_p \cdot \ldots \cdot u_1 \cdot a_{j i_{k_1 + l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1} i}.$$

Серед доданків суми L_{ij} розглянемо ще $2^p - 1$ таких, які мають однаковий знак і є добутками виразу $(-1)^n \alpha \cdot a_{j i_{k_1 + l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1} i}$ зліва на кожен з множників виду u_k або $\overline{u_k}$ для всіх $k = \overline{1, p}$, зберігаючи їх спадаючу послідовність по k. Скориставшись лемою 2.5.2, знайдемо суму C_1, - цих доданків разом з d_1.

$$C_1 = (-1)^{n-r} \alpha \boldsymbol{t}(u_p) \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{t}(u_1) \cdot a_{j i_{k_1 + l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1} i}.$$

Розглянемо праве алгебричне доповнення R_{ij}, що є сумою мономів - добутків елементів матриці $\mathbf{A}^{ij}$, кожен з яких розпочинається зліва елементом j-го рядка. Серед них можна вибрати такий d_2, що відповідає моному d_1,

$$d_2 = (-1)^{n-r} a_{j i_{k_1+l_1}} \dots a_{i_{k_1+1} i} a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \dots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} \dots a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \dots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} =$$

$$= (-1)^{n-r} \alpha a_{j i_{k_1+l_1}} \dots a_{i_{k_1+1} i} u_1 \dots u_p ,$$

де $\alpha \in \boldsymbol{F}$ - добуток елементів, індекси яких утворюють цикли першого та другого порядків, а u_i - добутки елементів матриці, індекси яких утворюють цикли більше ніж другого порядку для всіх $i = \overline{1, p}$, де $p = r - \tau$.

Серед доданків суми R_{ij} знову розглянемо ще $2^p - 1$ таких, які мають однаковий знак і є добутками виразу $(-1)^n \alpha \cdot a_{j i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1} i}$ справа на кожен з множників виду u_k або $\overline{u_k}$ для всіх $k = \overline{1, p}$, зберігаючи їх упорядкованість по k. Знайдемо суму C_2, - цих доданків разом з d_2, скориставшись лемою 2.5.2,

$$C_2 = (-1)^{n-r} \alpha \boldsymbol{t}(u_p) \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{t}(u_1) \cdot a_{j i_{k_1+l_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k_1+1} i} .$$

Очевидно, що $C_1 = C_2$. Отже, будь-якій сумі 2^p відповідних мономів лівого алгебричного доповнення L_{ij} відповідає рівна їй сума 2^p відповідних мономів правого алгебричного доповнення R_{ij}. Звідси, для всіх $i, j = \overline{1, n}$ одержимо рівність $(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} L_{ij} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} R_{ij}$, що означає $(L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1} := \mathbf{A}^{-1}$.

Теорему доведено.

Зауваження 3.1.1. Як випливає з теореми 3.1.1, можна однозначно побудувати класичну приєднану $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ до ермітової матриці $\mathbf{A}$. Тобто, у випадку, коли $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ - ермітова матриця, то її класичну приєднану можна представити, як матрицю, елементи якої є лівими алгебричними доповненнями $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]=\left(L_{ij}\right)_{n\times n}$ або правими алгебричними доповненнями $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]=\left(R_{ij}\right)_{n\times n}$ матриці $\mathbf{A}$. І над тілом $\boldsymbol{S}$ для ермітової невиродженої матриці $\mathbf{A}$ справджується формула відома з лінійної алгебри над полем комплексних чисел:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}.$$

Теорема 3.1.2. *Матриця обернена до ермітової матриці над тілом* $\boldsymbol{S}$ *є ермітовою.*

Доведення. Твердження теореми, очевидно, випливає з властивості добутку спряжених матриць. А саме, для ермітової матриці $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ за лемою 2.3.2-в) виконується наступне

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=I=\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^{*}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{*}\mathbf{A}^{*}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{*}\mathbf{A}.$$

Звідки, $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{*}=\mathbf{A}^{-1}$. А це й означає, що матриця $\mathbf{A}$ є ермітовою.

Наведемо також інше доведення теореми в рамках та засобами теорії стовпцевих та рядкових визначників.

Нехай $\mathbf{A}^{-1}=\left(d_{ij}\right)_{n\times n}$ - матриця, обернена до невиродженої ермітової матриці $\mathbf{A}\in\boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$. Розглянемо її у вигляді правої оберненої матриці $(R\mathbf{A})^{-1}$. Елементами її головної діагоналі є $d_{ii}=(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}R_{ii}$ для всіх $i=\overline{1,n}$. Згідно леми 2.2.1, $R_{ii}=\boldsymbol{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii}$, де $k=\boldsymbol{min}\{l\mid l\in\{1,\ldots,n\},l\neq i\}$. Оскільки, для всіх $i=\overline{1,n}$ підматриця $\mathbf{A}^{ii}$ матриці $\mathbf{A}$ також є ермітовою матрицею, то $\boldsymbol{rdet}_k\,\mathbf{A}^{ii}=\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{ii}\in\boldsymbol{F}$ для всіх $i=\overline{1,n}$ та індексу

$k = \boldsymbol{min}\{l \mid l \in \{1,\ldots,n\}, l \neq i\}$. Звідси, $d_{ii} = (\boldsymbol{det}\,\mathrm{A})^{-1}\boldsymbol{det}\,\mathrm{A}^{ii} \in \boldsymbol{F}$ для всіх $i = \overline{1,n}$, тобто, всі елементи головної діагоналі є елементами поля $\boldsymbol{F}$.

Розглянемо тепер елементи матриці $(R\mathrm{A})^{-1}$ симетричні відносно головної діагоналі, $d_{ij} = (\boldsymbol{det}\,\mathrm{A})^{-1}R_{ij}$ та $d_{ji} = (\boldsymbol{det}\,\mathrm{A})^{-1}R_{ji}$, для деяких $i, j = \overline{1,n}$ таких, що $i \neq j$. З теореми 3.1.1, з рівності правої та лівої обернених до ермітової матриць випливає рівність їх віповідних елемнтів $R_{ij} = L_{ij}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$. Розглянемо довільний моном g лівого алгебричного доповнення L_{ij}

$$g = (-1)^{n-r} a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \ldots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \ldots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} a_{j i_{k_1+l_1}} \ldots a_{i_{k_1+1} i}.$$

Серед мономів правого алгебричного доповнення R_{ji} знайдемо відповідний йому моном f такий, що

$$\begin{aligned} f &= \\ &= (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} j} a_{i_{k_2} i_{k_2+1}} \ldots a_{i_{k_2+l_2} i_{k_2}} \ldots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \\ &= (-1)^{n-r} \overline{a_{i_{k_1+1} i}} \ldots \overline{a_{j i_{k_1+l_1}}}\, \overline{a_{i_{k_2+1} i_{k_2}}} \ldots \overline{a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}}} \ldots \overline{a_{i_{k_r+1} i_{k_r}}} \ldots \overline{a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}}} = \\ &= (-1)^{n-r} \overline{a_{i_{k_r} i_{k_r+l_r}} \ldots a_{i_{k_r+1} i_{k_r}} \ldots a_{i_{k_2} i_{k_2+l_2}} \ldots a_{i_{k_2+1} i_{k_2}} a_{j i_{k_1+l_1}} \ldots a_{i_{k_1+1} i}} = \\ &= \overline{g}\,. \end{aligned}$$

Таким чином, для кожного монома лівого алгебричного доповнення L_{ij} серед мономів правого алгебричного доповнення R_{ji} можемо знайти спряжений до нього, тому $R_{ij} = L_{ij} = \overline{R_{ji}}$.

Звідси, $d_{ij} = \overline{d_{ji}}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$ таких, що $i \neq j$.

Теорему доведено.

Теорема 3.1.3. *Якщо* $\mathbf{A}$ *- невироджена ермітова матриця над тілом* $\boldsymbol{S}$*, тоді* $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{-1} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}$.

Доведення. Оскільки, матриця $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ - невироджена ермітова, то, як випливає з теореми 2.7.3, існують такі елементи поля $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \boldsymbol{F}$ і така унімодулярна матриця $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, що $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \mathbf{U}^*$ і $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Тоді для ермітової матриці $\mathbf{A}^{-1}$, одержимо

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \mathbf{U}^*\right)^{-1} = \left(\mathbf{U}^*\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{diag}\left(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\right) \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

За лемою 2.7.1 $\left\{\mathbf{U}^{-1}, \left(\mathbf{U}^*\right)^{-1}\right\} \subset \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, тоді за теоремою 2.7.3 та в силу симетричності унімодулярної подібності, одержимо

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{diag}\left(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}\right)\right) = \lambda_1^{-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{-1} = (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)^{-1} = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}.$$

Теорему доведено.

Зауваження 3.1.2. Оскільки, $(R\mathbf{A})^{-1} \equiv (L\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$, і за теоремою 3.1.2 матриця $\mathbf{A}^{-1}$ - ермітова, то матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}^{-1}$, а отже $\mathbf{A}$ і $\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]$ є ермітовими комутуючими матрицями. Тоді, згідно зауваження 2.7.1 про мультиплікативність визначника ермітової матриці для комутуючих ермітових матриць, одержимо

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{diag}(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}, \ldots, \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}).$$

Звідки, $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{Adj}[\mathbf{A}]) = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{n-1}$.

Підсумуємо цей підрозділ критерієм оборотності ермітової матриці над тілом з інволюцією $\boldsymbol{S}$:

Теорема 3.1.4. *Нехай* $\mathbf{A}$ *- ермітова матриця над тілом* $\boldsymbol{S}$*, тоді наступні твердження еквівалентні:*

а) матриця $\mathbf{A}$ *оборотна, тобто,* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{S})$*;*

б) $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \neq 0$*;*

в) рядки матриці $\mathbf{A}$ *лінійно незалежні зліва;*

г) стовпці матриці $\mathbf{A}$ *лінійно незалежні справа.*

Доведення. Еквівалентність тверджень а) і б) випливає з теорем 3.1.1 та 3.1.3. Еквівалентність тверджень б) і в) та б) і г) випливає, відповідно, із теорем 2.6.9 та 2.6.10 і з наслідку 2.6.4.

Теорему доведено.

Зауваження 3.1.2. З теореми 3.1.4 випливає виконання визначником ермітової матриці аксіоми 1 означення 1.1.1. Отже, враховуючи зауваження 2.4.1 та 2.5.1 визначник довільної ермітової матриці над тілом $\boldsymbol{S}$ задовольняє аксіоми 1 та 3 означення 1.1.1 некомутативного визначника.

3.2. Властивості правої та лівої відповідних ермітових матриць над тілом

Означення 3.2.1. Нехай $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ матриця над тілом $\boldsymbol{S}$. Будемо називати матрицю $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ її *лівою відповідною ермітовою,* а $\mathbf{A}\mathbf{A}^* \in \boldsymbol{M}(m, \boldsymbol{S})$ - її *правою відповідною ермітовою матрицею*.

Множину $m \times n$-матриць над тілом $\boldsymbol{S}$ позначимо через $\boldsymbol{S}^{m\times n}$.

Теорема 3.2.1. *Якщо* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *для будь-якого* $j = \overline{1,n}$ *помножити справа на довільний елемент* $b \in \boldsymbol{S}$*, тоді ви-*

значник її лівої відповідної ермітової матриці домножується на норму цього елемента $\mathbf{n}(b)$.

Доведення. Нехай $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j}\cdot b)$ - матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}\in \boldsymbol{S}^{m\times n}$, помноживши справа її j-й стовпець $\mathbf{A}\in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ для будь-якого $j=\overline{1,n}$ на довільний елемент $b\in \boldsymbol{S}$. Тоді для її спряженої матриці одержимо

$$\left(\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j}\cdot b)\right)^{*}=\mathbf{A}^{*}_{j.}(\overline{b}\cdot\mathbf{a}_{j.}),$$

де матриця $\mathbf{A}^{*}_{j.}(\overline{b}\cdot\mathbf{a}_{j.})$ одержується з матриці $\mathbf{A}\in \boldsymbol{S}^{n\times m}$, помноживши її j-й рядок на елемент $\overline{b}$, спряжений до елемента b. Розглянемо добуток цих матриць.

$$\mathbf{A}^{*}_{j.}(\overline{b}\cdot\mathbf{a}_{j.})\cdot\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j}\cdot b)=$$

$$=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}
\sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{k1}}a_{k1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{k1}}a_{kj}\cdot b & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{k1}}a_{kn}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\sum\limits_{k=1}^{m}\overline{b}\cdot\overline{a_{kj}}a_{k1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{b}\cdot\overline{a_{kj}}a_{kj}\cdot b & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{b}\cdot\overline{a_{kj}}a_{kn}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{kn}}a_{k1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{kn}}a_{kj}\cdot b & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\overline{a_{kn}}a_{kn}
\end{pmatrix} & j\text{ - й}\\
\qquad\qquad\qquad j\text{ - й} & \end{array}$$

Матриця $\mathbf{A}^{*}_{j.}(\overline{b}\cdot\mathbf{a}_{j.})\cdot\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{a}_{.j}\cdot b)$ - ермітова, j-й стовпець якої домножується справа на b, а j-й рядок - зліва на $\overline{b}$.Тоді, за теоремою 2.4.3 та за лемою 2.6.1, одержимо

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*_{j.}\left(\overline{b}\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)\cdot\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)\right)=\overline{b}\cdot\boldsymbol{rdet}_j\left(\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)\right)=$$
$$=\overline{b}\cdot\boldsymbol{rdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)\cdot b=\overline{b}\cdot\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)\cdot b=\boldsymbol{n}(b)\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 3.2.2. *Якщо* i*-й рядок матриці* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ *для будь-якого* $i=\overline{1,n}$ *помножити зліва на довільний елемент* $b\in\mathbf{S}$, *тоді визначник її правої відповідної ермітової матриці домножується на норму цього елемента* $\boldsymbol{n}(b)$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.2.1.

Теорема 3.2.3. *Якщо матриця* $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ *має два однакові стовпці, тоді визначник її лівої відповідної ермітової матриці* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай у матриці $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ її s-й та t-й стовпці є однаковими, тобто $a_{is}=a_{it}$ для всіх $i\in I_m$ таких, що $s\neq t$, де $\{s,t\}\subset J_n$. Тоді в спряженої матриці $\mathbf{A}^*$ будуть однаковими s-й і t-й рядки. Розглянемо добуток цих матриць – ермітову матрицю $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=$$

$$\begin{pmatrix}\overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{s1}} & \cdots & \overline{a_{t1}} & \cdots & \overline{a_{m1}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \overline{a_{1s}} & \cdots & \overline{a_{ss}} & \cdots & \overline{a_{ts}} & \cdots & \overline{a_{ms}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \overline{a_{1t}} & \cdots & \overline{a_{st}} & \cdots & \overline{a_{tt}} & \cdots & \overline{a_{mt}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{sn}} & \cdots & \overline{a_{tn}} & \cdots & \overline{a_{mn}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & \cdots & a_{st} & \cdots & a_{sn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{t1} & \cdots & a_{ts} & \cdots & a_{tt} & \cdots & a_{tn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mt} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k1}} \cdot a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k1}} \cdot a_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k1}} \cdot a_{kt} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k1}} \cdot a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ks}} \cdot a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ks}} \cdot a_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ks}} \cdot a_{kt} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ks}} \cdot a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kt}} \cdot a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kt}} \cdot a_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kt}} \cdot a_{kt} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kt}} \cdot a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{km}} \cdot a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{km}} \cdot a_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{km}} \cdot a_{kt} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{km}} \cdot a_{kn} \end{pmatrix}$$

Оскільки, для довільного $k \in I_m$ маємо рівність $a_{ks} = a_{kt}$, то $\sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kl}} \cdot a_{ks} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kl}} \cdot a_{kt}$ для всіх $l = \overline{1,n}$. Таким чином, в ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ s-й та t-й стовпці є також однаковими, тоді за наслідком 2.6.1 її визначник дорівнює нулю, $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}^*\mathbf{A} = 0$**.**

Теорему доведено.

Теорема 3.2.4. *Якщо матриця* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *містить два однакові рядки, тоді визначник її лівої відповідної ермітової матриці дорівнює нулю.*

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 3.2.3.

Теорема 3.2.5. *Якщо* i*-й стовпець матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *замінити її* j*-м стовпцем, (при цьому* $i \neq j$*), помноженим справа на довільний елемент* $b \in \boldsymbol{S}$*, тоді визначник її лівої відповідної ермітової матриці дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай $\mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.\,j} \cdot b\right)$ - матриця, яку одержимо з матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$, замінивши її i-й стовпець її j-м стовпцем помноженим справа на довільний елемент $b \in \boldsymbol{S}$, при цьому $i \neq j$ для всіх $j, i = \overline{1,n}$.

Тоді її спряженою буде матриця $\mathbf{A}^*_{i.}\left(\overline{b}\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)$, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}^*\in\boldsymbol{S}^{n\times m}$, замінивши її i-й рядок її j-м рядком помноженим зліва на елемент $\overline{b}$. Тоді за теоремою 3.2.1, одержимо

$$\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*_{i.}\left(\overline{b}\cdot\mathbf{a}_{j.}\right)\cdot\mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}\cdot b\right)\right)=\boldsymbol{n}(b)\cdot\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*_{i.}\left(\mathbf{a}_{j.}\right)\cdot\mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right).$$

Оскільки, матриця $\mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)$ має два однакові стовпці, а саме $a_{k\,i}=a_{k\,j}$ для всіх $k=\overline{1,m}$, тоді за теоремою 3.2.3 її ліва відповідна ермітова матриця дорівнює нулю, $\boldsymbol{det}\left(\mathbf{A}^*_{i.}\left(\mathbf{a}_{j.}\right)\cdot\mathbf{A}_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right)=0$.

Теорему доведено.

Теорема 3.2.6. *Якщо i-й рядок матриці $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ замінити її j-м рядком, (де $i\neq j$), помноженим зліва на довільний елемент $b\in\mathbf{S}$, тоді визначник її правої відповідної ермітової матриці дорівнює нулю.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.2.5 та випливає з теорем 3.2.2 та 3.2.4.

Теорема 3.2.7. *Якщо довільний стовпець матриці $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ є правою лінійною комбінацією її інших стовпців, тоді визначник її лівої відповідної ермітової матриці дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай j-й стовпець матриці $\mathbf{A}\in\boldsymbol{S}^{m\times n}$ є правою лінійною комбінацією її k інших стовпців з індексами $j_1,\ldots,j_k$ та з коефіцієнтами $b_1,\ldots,b_k$, де $j_l\in\{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}$ та $b_l\in\mathbf{S}$ для всіх $l=\overline{1,k}$ і $k<n$.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i_1}\cdot b_1+\ldots+a_{1j_k}\cdot b_k & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{m\,j_1}\cdot b_1+\ldots+a_{m\,j_k}\cdot b_k & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

j - й

Тоді j-й рядок матриці $\mathbf{A}^*$ є лівою лінійною комбінацією рядків $j_1,\ldots,j_k$ з коефіцієнтами $\overline{b_1},\ldots,\overline{b_k}$,

$$\begin{array}{cl} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{b_1}\cdot\overline{a_{1j_1}}+\ldots+\overline{b_k}\cdot\overline{a_{1j_k}} & \cdots & \overline{b_1}\cdot\overline{a_{mj_1}}+\ldots+\overline{b_k}\cdot\overline{a_{mj_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} & j\text{ - й} \end{array}$$

Розглянемо праву відповідну ермітову матрицю $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} =$$

$$\begin{array}{c} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{s=1}^{m}\overline{a_{s1}}\cdot a_{s1} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m}\overline{a_{s1}}\cdot\left(a_{sj_1}\cdot b_1+\ldots+a_{sj_k}\cdot b_k\right) & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m}\overline{a_{s1}}\cdot a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{m}\left(\overline{b_1}\overline{a_{sj_1}}+\ldots+\overline{b_k}\cdot\overline{a_{sj_k}}\right)a_{s1} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m}\left(\overline{b_1}\cdot\overline{a_{sj_1}}+\ldots+\overline{b_k}\cdot\overline{a_{sj_k}}\right)\left(a_{sj_1}b_1+\ldots+a_{sj_k}b_k\right) & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m}\left(\overline{b_1}\cdot\overline{a_{sj_1}}+\ldots+\overline{b_k}\overline{a_{sj_k}}\right)a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{m}\overline{a_{sn}}\cdot a_{s1} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m}\overline{a_{sn}}\left(a_{sj_1}b_1+\cdots+a_{sj_k}b_k\right) & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{m}\overline{a_{sn}}\cdot a_{sn} \end{pmatrix} \\ j\text{ - й} \end{array}$$

Матриця $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ - ермітова і її j - й стовпець є правою лінійною комбінацією стовпців $j_1,\ldots,j_k$, тоді за наслідком 2.6.4 одержимо

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = 0.$$

Теорему доведено.

Теорема 3.2.8. *Якщо довільний рядок матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *є лівою лінійною комбінацією її інших рядків, тоді визначник її відповідної правої ермітової матриці* $\mathbf{AA}^*$ *дорівнює нулю.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.2.7.

3.3. Критерії виродженості відповідних ермітових матриць

Означення 3.3.1. Вектор – рядки

$$\begin{gathered} \mathbf{a}_{1.} = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m.} = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}), \end{gathered} \tag{3.3}$$

де $a_{ij} \in \boldsymbol{S}$ для всіх $i \in I_m$ та $j \in J_n$, будемо називати *лінійно залежними зліва*, якщо знайдуться такі коефіцієнти $b_1, \ldots, b_m$ - елементи тіла $\boldsymbol{S}$, не всі рівні нулю, що ліва лінійна комбінація цих вектор - рядків дорівнює нульовому вектор - рядку,

$$b_1 \cdot \mathbf{a}_{1.} + \ldots + b_m \cdot \mathbf{a}_{m.} = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Означення 3.3.2. Вектор - рядки (3.3) називаються *лінійно незалежними зліва*, якщо рівність (3.4) можлива тільки, коли всі коефіцієнти $b_1, \ldots, b_m$ дорівнюють нулю.

Означення 3.3.3. Вектор - стовпці

$$\mathbf{a}_{.1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{a}_{.n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

де $a_{ij} \in \boldsymbol{S}$ для всіх $i \in I_m$ та $j \in J_n$, будемо називати *лінійно залежними справа*, якщо знайдуться такі коефіцієнти $c_1,\dots,c_n$, - елементи тіла $\boldsymbol{S}$ не всі рівні нулю, що права лінійна комбінація цих вектор - стовпців дорівнює нульовому вектор - стовпцю,

$$\mathbf{a}_{\cdot j_1} \cdot c_1 + \ldots + \mathbf{a}_{\cdot j_n} \cdot c_n = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Означення 3.3.4. Вектор - стовпці (3.5) називаються *лінійно незалежними справа*, якщо рівність (3.6) можлива тільки, коли всі коефіцієнти $c_1,\dots,c_n$ дорівнюють нулю.

Для вектор-стовпців та вектор-рядків над тілом $\boldsymbol{S}$ справджуються (див., наприклад [34]) критерії лінійної залежності аналогічні комутативному випадку:

Теорема 3.3.1. [34] *Для того, щоб вектор - рядки (3.3) були лінійно залежними зліва, необхідно і достатньо, щоб один з них був лівою лінійною комбінацією решти.*

Теорема 3.3.2. [34] *Для того, щоб вектор - стовпці (3.5) були лінійно залежними справа, необхідно і достатньо, щоб один з них був правою лінійною комбінацією решти вектор - стовпців.*

Означення 3.3.5. *Головним мінором ермітової матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ будемо називати визначник її головної підматриці, яка є ермітовою матрицею k-го порядку, де $k \le n$, з елементами, які лежать на перетині рядків з індексами $i_1,\dots i_k$ та відповідних їм стовпців з індексами $i_1,\dots i_k$, при цьому матрицю мінору будуємо так, що $i_1 < \ldots < i_s < \ldots < i_k$, де $i_s \in I_n$ при $s = \overline{1,k}$.

Означення 3.3.6. Нехай ермітова матриця $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ має головний мінор r-го порядку, де $r \le n$, відмінний від нуля, а всі головні мінори $r+1$-го порядку та вищих, якщо вони існують, дорівнюють нулю, тоді натуральне число r будемо називати *рангом по головних мінорах* ермітової матриці $\mathbf{A}$. Головний мінор r-го порядку, відмінний від нуля, будемо називати *базисним*, а рядки та стовпці на перетині яких він стоїть, - *базисними*.

Означення 3.3.7. Нехай рядки та стовпці з індексами $i_1,\ldots,i_r$, де $r \leq n$, ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ є базисними, тоді рядки з індексами $i_1,\ldots,i_r$ назвемо *базисними* для матриці $\mathbf{A}^*$, а стовпці з індексами $i_1,\ldots,i_r$, назвемо *базисними* для матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$.

Теорема 3.3.3. (про базисний головний мінор лівої відповідної ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$). *Базисні стовпці матриць* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *є лінійно незалежними справа, а базисні рядки матриць* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{A}^* \in \boldsymbol{S}^{n\times m}$ *- лінійно незалежні зліва.*

Доведення. Якщо б базисні рядки матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ були лінійно залежними зліва, тоді за теоремою 3.2.1 один з них являвся б лівою лінійною комбінацією решти. Віднявши від цього рядка вказану лінійну комбінацію, одержимо рядок, який цілком складається з нулів. Тоді за теоремою 2.4.1 базисний мінор матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ дорівнював би нулю, що суперечило б його означенню.

Аналогічно, якщо б базисні стовпці матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ були лінійно залежними справа, то за теоремою 3.2.2 один з них являвся б правою лінійною комбінацією решти стовпців. Віднявши від цього стовпця вказану лінійну комбінацію, одержимо стовпець, який цілком складається з нулів. Тоді за теоремою 2.4.1 базисний мінор матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ дорівнював би нулю, що суперечило б його означенню.

Припустивши, що базисні стовпці матриці $\mathbf{A}$ будуть лінійно залежними справа, за теоремою 3.3.2 одержимо, що один з них є правою лінійною комбінацією решти. Тоді за теоремою 3.2.7 визначник ермітової матриці, складеної з базисних рядків та базисних стовпців матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ дорівнював би нулю, що суперечило би означенню базисних стовпців матриці $\mathbf{A}$.

Аналогічно, припустивши, що базисні рядки матриці $\mathbf{A}^*$ будуть лінійно залежними зліва, за теоремою 3.3.1 одержимо, що один з них є лівою лінійною комбінацією решти. Тоді за теоремою 3.2.8 визначник ермітової матриці, складеної з базисних рядків та базисних стовпців матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ дорівнював би нулю, що суперечило би означенню базисних рядків матриці $\mathbf{A}^*$.

Теорему доведено.

Теорема 3.3.4. *Довільний стовпець матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *є правою лінійною комбінацією її базисних стовпців.*

Доведення. Нехай стовпці з індексами $i_1,\ldots,i_r$ є базисними для матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$, тоді базисний головний мінор її лівої відповідної ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n,\boldsymbol{S})$ міститься на перетині стовпців та рядків із тими ж індексами $i_1,\ldots,i_r$. Позначимо матрицю $\mathbf{A}^*\mathbf{A} =: \mathbf{D} = \left(d_{ij}\right)_{n\times n}$, а також через $\mathbf{M}$ - матрицю, що відповідає базисному головному мінорові матриці $\mathbf{D}$. Доповнимо ермітову матрицю $\mathbf{M}$ $r+1$-м рядком та стовпцем, що складаються з відповідних елементів її j-го рядка та j-го стовпця, при цьому $j \in \{i_1,\ldots,i_r\}$. Позначимо одержану матрицю $\mathbf{D}_j$,

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & \cdots & d_{i_1 i_r} & d_{i_1 j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_r i_1} & \cdots & d_{i_r i_r} & d_{i_r j} \\ d_{j i_1} & \cdots & d_{j i_r} & d_{jj} \end{pmatrix}.$$

Оскільки, матриця $\mathbf{D}_j$ - ермітова і містить два одинакові стовпці, то за наслідком 2.6.1 її визначник дорівнює нулю,

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{D}_j = \boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{D}_j = \sum_{l=1}^{r} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} + L_{j j} \cdot d_{j j} = 0,$$

де $L_{i_l j}$ - ліве алгебричне доповнення елемента $d_{i_l j}$ матриці $\mathbf{D}_j$. Оскільки, $L_{j j} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{M}$, а за означенням базисного головного мінору $\boldsymbol{det}\,\mathbf{M} \neq 0$, тоді для довільного $j \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ одержимо

$$d_{j j} = -\sum_{l=1}^{r} \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{M}\right)^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} \,. \tag{3.7}$$

Нехай тепер $j \notin \{i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_r\}$, при цьому $i_k < j < i_{k+1}$. Розглянемо матрицю $\mathbf{D}_j$, яку одержимо, доповнивши матрицю $\mathbf{M}$ j-м рядком та j-м стовпцем,

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & \cdots & d_{i_1 i_k} & d_{i_1 j} & d_{i_1 i_{k+1}} & \cdots & d_{i_1 i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_k i_1} & \cdots & d_{i_k i_k} & d_{i_k j} & d_{i_k i_{k+1}} & \cdots & d_{i_k i_r} \\ d_{j i_1} & \cdots & d_{j i_k} & d_{j j} & d_{j i_{k+1}} & \cdots & d_{j i_r} \\ d_{i_{k+1} i_1} & \cdots & d_{i_{k+1} i_k} & d_{i_{k+1} j} & d_{i_{k+1} i_{k+1}} & \cdots & d_{i_{k+1} i_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i_r i_1} & \cdots & d_{i_r i_k} & d_{i_r j} & d_{i_r i_{k+1}} & \cdots & d_{i_r i_r} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{D}_j$ і в цьому випадку є ермітовою. Її визначником є головний мінор $r+1$-го порядку матриці $\mathbf{D}$, який за означенням базисного головного мінору дорівнює нулю,

$$\boldsymbol{det}\,\mathbf{D}_j = \boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{D}_j = \sum_{l=1}^{r} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j} + L_{jj} \cdot d_{jj} = 0.$$

Оскільки, $L_{jj} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{M}$, а за означенням базисного головного мінору $\boldsymbol{det}\,\mathbf{M} \neq 0$, то для будь-якого $j = \overline{1,n}$ такого, що $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, одержимо

$$d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} (\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j}. \tag{3.8}$$

Об'єднавши вирази (3.7) і (3.8), для всіх $j = \overline{1,n}$ маємо рівність

$$d_{jj} = -\sum_{l=1}^{r} (\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} \cdot d_{i_l j}.$$

Нехай $-(\boldsymbol{det}\,\mathbf{M})^{-1} L_{i_l j} = \mu_l$, тоді $d_{jj} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot d_{i_l j}$. Оскільки, $d_{jj} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} \cdot a_{kj}$ і $d_{i_l j} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k i_l}} \cdot a_{kj}$, тоді

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} \cdot a_{kj} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k i_l}} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \overline{a_{k i_l}} \cdot a_{kj}.$$

Звідси, для всіх $k = \overline{1,m}$ одержимо $\overline{a_{kj}} = \sum_{l=1}^{r} \mu_l \cdot \overline{a_{k i_l}}$. В свою чергу використавши властивість інволюції маємо $a_{kj} = \sum_{l=1}^{r} a_{k i_l} \cdot \overline{\mu_l}$. Це означає, що довільний j-й стовпець матриці $\mathbf{A}$ є правою лінійною комбінацією її базисних стовпців з коефіцієнтами $\overline{\mu_1},\ldots,\overline{\mu_r}$, тобто $\mathbf{a}_{\cdot j_1} \cdot \overline{\mu_1} + \ldots + \mathbf{a}_{\cdot j_r} \cdot \overline{\mu_r} = \mathbf{a}_{\cdot j}$ для довільного $j \in J_n$.

Теорему доведено.

Теорема 3.3.5. *Довільний рядок матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *є лівою лінійною комбінацією її базисних рядків.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.3.4, розглядаючи її праву відповідну ермітову матрицю $\mathbf{AA}^*$.

Теорема 3.3.6. (Критерій виродженості лівої відповідної ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$). *Для того, щоб визначник ермітової матриці* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб стовпці матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ *були лінійно залежними справа.*

Доведення. (Необхідність). Якщо визначник ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ дорівнює нулю, тоді її базисний головний мінор має порядок $r < n$. Тоді хоча б один із стовпців матриці $\mathbf{A}$ не є базисним. За теоремою 3.3.4 цей стовпець є правою лінійною комбінацією її базисних стовпців. В цю комбінацію можемо включити і решту стовпців, поставивши біля них справа нулі. Таким чином, один із стовпців матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ є правою лінійною комбінацією її решти стовпців, тоді за теоремою 3.3.2 стовпці матриці $\mathbf{A}$ лінійно залежні.

(Достатність). Якщо стовпці матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m\times n}$ лінійно залежні справа, тоді за теоремою 3.3.2 один з них являється правою лінійною комбінацією інших її стовпців. Звідси за теоремою 3.2.7 одержимо, що визначник лівої відповідної ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ дорівнює нулю.

Теорему доведено.

Теорема 3.3.7. (Критерій виродженості правої відповідної ермітової матриці $\mathbf{AA}^*$). *Для того, щоб визначник ермітової матриці* $\mathbf{AA}^*$ *дорів-*

нював нулю, необхідно і достатньо, щоб рядки матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ *були лінійно залежними зліва.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.2.7.

3.4. Ранг матриці над тілом

Означення 3.4.1. Будемо говорити, що матриця $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ має *стовпцевий ранг* r, якщо r - максимальне число лінійно незалежних справа стовпців матриці $\mathbf{A}$.

Означення 3.4.2. Будемо говорити, що матриця $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$ має *рядковий ранг* r, якщо r - максимальне число лінійно незалежних зліва рядків матриці $\mathbf{A}$.

Відомо (див., наприклад [34, 38]), що для довільної матриці $\mathbf{A}$ над тілом стовпцевий ранг дорівнює її рядковому рангу, тому можемо дати означення *рангу* матриці над тілом, як максимального числа лінійно незалежних зліва рядків або лінійно незалежних справа стовпців.

Теорема 3.4.1. *Ранг по головних мінорах лівої відповідної ермітової матриці* $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ *над тілом* $\boldsymbol{S}$ *дорівнює її рангу та рангу матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$.

Доведення**.** Нехай r - ранг по головних мінорах лівої відповідної ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, тоді за теоремою 3.3.3 r базисних m-мірних стовпців матриці $\mathbf{A}$ є лінійно незалежними справа. В правому векторному просторі m-мірних стовпців $R\boldsymbol{S}^m$ над тілом $\boldsymbol{S}$ розглянемо лінійну оболонку $\boldsymbol{L}$ базисних стовпців матриці $\mathbf{A}$. Оскільки, за теоремою 3.3.4 довільний стовпець матриці $\mathbf{A}$ однозначно виражається через праву лінійну комбінацію її базисних стовпців, то базисні стовпці є базисом лінійної оболонки $\boldsymbol{L}$.

Оскільки, в скінченновимірному просторі число елементів базису не залежить від базису, тому будь-які $r+1$ векторів лінійної оболонки $\boldsymbol{L}$, а звідси, будь-які $r+1$ стовпців матриці $\mathbf{A}$ - лінійно залежні справа і r - максимальне число лінійно незалежних справа стовпців матриці $\mathbf{A}$. А це означає, що ранг матриці $\mathbf{A}$ дорівнює r.

Аналогічно, за теоремою 3.3.3 r базисних n-мірних стовпців матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ є лінійно незалежними справа. В правому векторному просторі n-мірних стовпців $R\boldsymbol{S}^n$ над тілом $\boldsymbol{S}$ розглянемо лінійну оболонку $\boldsymbol{L}_1$ базисних стовпців матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Оскільки, за теоремою 3.3.4 довільний стовпець матриці $\mathbf{A}$ однозначно виражається через праву лінійну комбінацію її базисних стовпців, то, як було показано в теоремі 3.2.7, і довільний стовпець матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ однозначно виражається через праву лінійну комбінацію її базисних. Звідси, базисні стовпці матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ є базисом лінійної оболонки $\boldsymbol{L}_1$, а її розмір дорівнює r. Тоді будь-які $r+1$ векторів лінійної оболонки $\boldsymbol{L}_1$, а звідси будь-які $r+1$ стовпців матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ - лінійно залежні справа.

Отже**,** r - максимальне число лінійно незалежних справа стовпців матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. А тому ранг матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ дорівнює r.

Теорему доведено.

Теорема 3.4.2. *Ранг по головних мінорах правої відповідної ермітової матриці* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ *над тілом* $\mathbf{S}$ *дорівнює її рангу та рангу матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{S}^{m \times n}$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.4.1.

Теорема 3.4.3. *Для довільних матриць* $\mathbf{A}$ *і* $\mathbf{B}$ *над тілом* $\boldsymbol{S}$ *ранг добутку* $\mathbf{AB}$ *не більший ні рангу матриці* $\mathbf{A}$, *ні рангу матриці* $\mathbf{B}$.

Доведення. Із означення добутку матриць випливає, що рядки матриці $\mathbf{AB}$ є лівими лінійними комбінаціями рядків матриці $\mathbf{B}$ і тому максимальне число лінійно незалежних зліва рядків матриці $\mathbf{AB}$ не може бути більшим числа лінійно незалежних зліва рядків матриці $\mathbf{B}$. Отже, рядковий ранг матриці $\mathbf{AB}$ не більший рядкового рангу матриці $\mathbf{B}$.

Аналогічно, стовпці матриці $\mathbf{AB}$ є правими лінійними комбінаціями стовпців матриці $\mathbf{A}$, і тому стовпцевий ранг матриці $\mathbf{AB}$ не більший стовпцевого рангу матриці $\mathbf{A}$.

Теорему доведено.

3.5. Властивості подвійного визначника квадратних матриць над тілом

Лема 3.5.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, *тоді* $\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$.

Доведення. Очевидно, що матриці $\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ є ермітовими матрицями порядку $2n$ над тілом $\boldsymbol{S}$. Позначимо $\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} =: \mathbf{B} = (b_{ij})$.

Не втрачаючи загальності, будемо розкривати визначник ермітової матриці, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{B}$, як рядковий $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{B}$ для довільного $i = \overline{1, 2n}$. Довільний моном d рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{B}$ для всіх $i = \overline{1, 2n}$ дорівнює нулю в наступних трьох випадках.

1) Серед множників монома d є елемент $b_{mj} = 0$ для довільних $m \geq n+1$ та $j \geq n+1$.
2) Серед множників монома d є елемент $b_{mj} = 0$ для всіх $m \leq n$ та $j \leq n$ таких, що $m \neq j$.
3) Серед множників монома d є елемент $b_{mm} = -1$ для деякого $1 \leq m \leq n$. Наявність серед множників монома d елемента $b_{mm} = -1$ для деякого $1 \leq m \leq n$, внаслідок упорядкованості його елементів згід-

но означення 2.2.4 з необхідністю викликає належність йому або елемента з випадків 1 чи 2, або інших елементів $b_{kk} = -1$ для всіх $k = \overline{m,n}$, а за ними з необхідністю слідує елемент $b_{n+1j} = 0$ з випадку 1 при $j \geq n+1$.

Єдиним випадком невиродженості монома d є випадок, коли він є добутком ненульових елементів виду $b_{kl} = a^{*}_{k-n,l}$ та $b_{lk} = a_{l,k-n}$, коли $k \geq n+1$ та $l \leq n$, де $a^{*}_{k-n,l}$ - елемент матриці $\mathbf{A}^{*}$, а $a_{l,k-n}$ - елемент матриці $\mathbf{A}$. При цьому внаслідок упорядкованості справа ці елементи вибираються з підматриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}^{*}$ та розміщуються в мономі d так, що їх індекси утворюють підстановку, яка в нормальній формі записується прямим добутком незалежних циклів у парних степенях. Крім того, елементи підматриць чергуються як множники в мономі d наступним чином:

а) якщо $i \leq n$, то елементи розміщуються в мономі так, що індекс елемента підматриці $\mathbf{A}$ розпочинає кожен цикл індексів монома, а за ним йде елемент підматриці $\mathbf{A}^{*}$, далі елементи підматриць продовжують чергуватися;

б) якщо $i \geq n+1$, то індекс елемента підматриці $\mathbf{A}^{*}$ розпочинає кожен цикл, за ним йде елемент підматриці $\mathbf{A}$ і далі елементи підматриць продовжують чергуватися.

Розглянемо тепер матрицю $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{*} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} =: \boldsymbol{C} = \left(c_{ij}\right)$. Довільний моном $\tilde{d}$ рядкового визначника $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{C}$ для всіх $i = \overline{1,2n}$ дорівнює нулю в наступних трьох випадках.

1) Серед множників монома $\tilde{d}$ є елемент $c_{mj} = 0$ для деяких $m \leq n$ та $j \leq n$.

2) Серед множників монома $\tilde{d}$ є елемент $c_{mj} = 0$ для деяких $m \geq n+1$ та $j \geq n+1$ таких, що $i \neq j$.

3) Серед множників монома $\tilde{d}$ є елемент $c_{mm} = -1$ для довільного $m \in \{n+1,\ldots,2n\}$. Наявність серед множників монома $\tilde{d}$ елемента $c_{mm} = -1$ для довільного $m = \overline{n+1,\, 2n}$, внаслідок упорядкованості його елементів згідно з означенням рядкового визначника з необхідністю викликає належність йому або елемента з випадків 1 чи 2, або елемента $c_{kk} = 0$, коли $1 \leq k \leq n$.

Єдиним випадком невиродженості монома $\tilde{d}$ є випадок, коли він є добутком ненульових елементів виду $c_{kl} = a^{*}_{k-n,l}$ та $c_{lk} = a_{l,k-n}$, коли $k \geq n+1$ та $l \leq n$, де $a^{*}_{k-n,l}$ - елементи матриці $\mathbf{A}^{*}$, а $a_{l,k-n}$ - елементи матриці $\mathbf{A}$. При цьому порядок множників у невиродженому мономі $\tilde{d}$, очевидно, є тотожним до порядку множників невиродженого монома d.

Таким чином, рядкові визначники $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{B}$ та $\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{C}$ для довільного $i = \overline{1, 2n}$ відрізняються тільки у побудові вироджених мономів з випадків 1)-3), тому $\boldsymbol{rdet}_i \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{*} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{rdet}_i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{*} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$. А звідси, внаслідок ермітовості даних матриць і випливає твердження леми.

Лему доведено.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, *тоді* $\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}\mathbf{A}^{*} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$.

Доведення. Розглянемо ермітові матриці порядку $2n$:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{*} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{*} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

За лемою 3.5.1 визначники цих матриць рівні,

$$\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Довільну квадратну матрицю $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ можна зобразити у вигляді добутку $m \le n^2$ елементарних унімодулярних матриць порядку $2n$. Тобто, існують такі елементарні унімодулярні матриці порядку $2n$ $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{ij}^{(k)}(a_{ij})$ для деякого $k = \overline{1,m}$, де $m \le n^2$, а a_{ij} - ненульові елементи підматриці $\mathbf{A}$ для всіх $i = \overline{1,n}$ та $j = \overline{n+1,2n}$, що маємо наступну факторизацію

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \prod_k \mathbf{P}_k .$$

Отже, $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{SL(}n\boldsymbol{,S)}$, тоді за теоремою 2.7.2, одержимо:

$$\boldsymbol{(}-1\boldsymbol{)}^n \boldsymbol{det}\,\mathbf{AA}^* = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{AA}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{I} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & -\mathbf{I} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{det}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^*\mathbf{A} \end{pmatrix} = \boldsymbol{(}-1\boldsymbol{)}^n \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}.$$

Теорему доведено.

Означення 3.5.1. Для квадратної матриці $\mathbf{A}$ над тілом $\boldsymbol{S}$ визначник її відповідної ермітової матриці будемо називати її *подвійним (double) визначником*: $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} := \boldsymbol{det}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \boldsymbol{det}(\mathbf{AA}^*)$.

Зауваження 3.5.1. Теорема 3.5.1 узагальнює з тіла кватерніонів на тіло $\boldsymbol{S}$ відповідну теорему про властивості подвійного визначника з [50]. Крім того, пропонується позначати подвійний визначник довільної матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, як $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}$, оскільки позначення $\|\mathbf{A}\|$, яке використовує Л. Чен, прийнято застосовувати для поняття норми матриці. В теоремі 3.5.2 ми також слідували [50], доводячи її в рамках побудованої теорії стовпцевих та рядкових визначників.

Означення 3.5.2. [2, 3] Впорядковане поле називається *максимальним*, якщо кожне алгебричне впорядковане розширення поля $\boldsymbol{F}$ співпадає з $\boldsymbol{F}$.

Твердження 3.5.1. [2] *Довільний додатний елемент максимального впорядкованого поля має в* $\boldsymbol{F}$ *квадратний корінь.*

Теорема 3.5.2. *Нехай тіло* $\boldsymbol{S}$ *є композиційною асоціативною алгеброю з діленням над максимальним впорядкованим полем* $\boldsymbol{F}$*, тоді для довільних квадратних матриць над тілом* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \subset \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *маємо рівність*

$$\boldsymbol{ddet}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{B}.$$

Доведення. За теоремою 2.7.4 ермітова матриця $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ унімодулярно подібна діагональній матриці, тобто, для матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ знайдеться така унімодулярна матриця $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, що $\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{A}^*\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \boldsymbol{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, де $\alpha_i \in \boldsymbol{F}$ для всіх $i = \overline{1, n}$. Тоді,

$$\boldsymbol{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{A}^*\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U})^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}.$$

Нехай $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = (q_{ij}) \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, тоді для всіх $i = \overline{1, n}$

$$\alpha_i = \sum_k \overline{q_{ki}} q_{ki} = \sum_k \boldsymbol{n}(q_{ki}) \in \boldsymbol{F}_+, \tag{3.9}$$

де $\boldsymbol{F}_+$ - множина невід'ємних елементів поля $\boldsymbol{F}$. З максимальної впорядкованості поля $\boldsymbol{F}$ згідно твердження 3.5.1 випливає, що для всіх $i = \overline{1,n}$ існує $\sqrt{\alpha_i} \in \boldsymbol{F}_+$. Крім того, оскільки $(\mathbf{U}^*)^{-1} = (\mathbf{U}^{-1})^*$, то для ермітової матриці $(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})$ в силу теореми 2.7.1, знайдеться така унімодулярна матриця $\mathbf{W} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$, що

$$\mathbf{W}^*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{W} = \boldsymbol{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Тоді, за теоремою 3.5.1 та за лемою 2.7.1, одержимо

$$\boldsymbol{ddet}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \boldsymbol{det}(\mathbf{B}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{B}) = \boldsymbol{det}(\mathbf{B}^*(\mathbf{U}^*)^{-1}\mathbf{U}^*(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}) =$$
$$= \boldsymbol{det}\left(\left(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\right)^* \boldsymbol{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B}\right) =$$
$$= \boldsymbol{det}\left((\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*(\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})\right) =$$
$$= \boldsymbol{det}\left((\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})(\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^*\right) =$$
$$= \boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{B})^* \boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\right) =$$
$$= \boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)(\mathbf{W}^{-1})^* \boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\right) =$$
$$= \boldsymbol{det}\left((\mathbf{W}^{-1})^T \boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\boldsymbol{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\left((\mathbf{W}^{-1})^T\right)^*\right) =$$
$$= \boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\boldsymbol{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)\boldsymbol{diag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\right)\right) =$$
$$= \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n \cdot \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_n = \boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{det}\,\mathbf{B} = \boldsymbol{det}\,\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{det}\,\mathbf{A}.$$

Теорему доведено.

Зауваження 3.5.2. Як випливає з формули (3.9) і в силу теореми 2.7.4, якщо тіло $\boldsymbol{S}$ є композиційною асоціативною нерозщеплюваною алгеброю над максимальним впорядкованими полем $\boldsymbol{F}$, то подвійний визначник довільної матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ є невід'ємним, $\boldsymbol{ddet}\, \mathbf{A} \geq 0$.

Теорема 3.5.3. *Якщо* $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ *- довільна унімодулярна матриця, тоді її подвійний визначник дорівнює одиниці,* $\boldsymbol{ddet}\, \mathbf{U} = 1$.

Доведення. За теоремою 2.7.4 для довільної унімодулярної матриці $\mathbf{U} \in \boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{S})$ справедливо, що $\boldsymbol{ddet}\, \mathbf{U} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{U}^* \mathbf{U} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{U}^* \mathbf{I} \mathbf{U} = \boldsymbol{det}\, \mathbf{I} = 1$.

Теорему доведено.

Зауваження 3.5.3. В силу теореми 3.5.3 унімодулярну матрицю над тілом $\boldsymbol{S}$ можна означити як матрицю, подвійний визначник якої дорівнює 1.

Зауваження 3.5.4. З теорем 3.2.7, 3.2.8, 3.5.2 та 3.5.3 випливає, якщо тіло $\boldsymbol{S}$ є композиційною асоціативною нерозщеплюваною алгеброю над максимальним впорядкованим полем $\boldsymbol{F}$, то подвійний визначник $\boldsymbol{ddet}\, \mathbf{A}$ довільної матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ задовольняє аксіоми 1, 2, 3 означення 1.1.1. Коли $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{H})$, то, використавши співвідношення з [45, 51], яке встановлює залежність між визначниками Мура, Стаді та Дьйодонне, а також зауваження 2.5.2, одержимо наступне співвідношення між подвійним визначником та некомутативними визначниками Мура, Стаді та Дьйодонне: $\boldsymbol{ddet}\, \mathbf{A} = \boldsymbol{M\, det}\left(\mathbf{A}^* \mathbf{A}\right) = \boldsymbol{Sdet}\, \mathbf{A} = \boldsymbol{Ddet}^2\, \mathbf{A}$.

3.6. Визначникове зображення оберненої матриці над тілом з інволюцією через аналог класичної приєднаної

Означення. 3.6.1. Нехай $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Для всіх $j = \overline{1, n}$ її подвійний визначник можна розкласти по j-му стовпцю наступним чином,

$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{cdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{L}_{ij} a_{ij}$, тоді $\mathbb{L}_{ij}$ будемо називати *лівим подвійним алгебричним доповненням* елемента a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Означення. 3.6.2. Нехай $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Для всіх $i = \overline{1, n}$ її подвійний визначник можна розкласти по i-му рядку наступним чином, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right) = \sum\limits_{j} a_{ij} \mathbb{R}_{ij}$, тоді $\mathbb{R}_{ij}$ будемо називати *правим подвійним алгебричним доповненням* елемента a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Теорема 3.6.1. *Для того, щоб довільна матриця* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$ *була оборотною необхідно і достатньо, щоб* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*, тоді існують єдині її ліва обернена матриця* $(L\mathbf{A})^{-1}$ *та права обернена* $(R\mathbf{A})^{-1}$ *такі, що* $(L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}$ і

$$(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^* = \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathbb{L}_{11} & \mathbb{L}_{21} & \cdots & \mathbb{L}_{n1} \\ \mathbb{L}_{12} & \mathbb{L}_{22} & \cdots & \mathbb{L}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{L}_{1n} & \mathbb{L}_{2n} & \cdots & \mathbb{L}_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

$$(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathbb{R}_{11} & \mathbb{R}_{21} & \cdots & \mathbb{R}_{n1} \\ \mathbb{R}_{12} & \mathbb{R}_{22} & \cdots & \mathbb{R}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{R}_{1n} & \mathbb{R}_{2n} & \cdots & \mathbb{R}_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

при цьому $\mathbb{L}_{ij} = \boldsymbol{cdet}_j\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)$ *та* $\mathbb{R}_{ij} = \boldsymbol{rdet}_i\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)_{i.}\left(\mathbf{a}^*_{j.}\right)$ *для всіх* $i, j = \overline{1, n}$.

Доведення. (Необхідність). Нехай існує обернена $\mathbf{A}^{-1}$ для довільної матриці $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$. Тоді в силу теореми 3.4.3 одержимо,

$$\textbf{\textit{rank}}\,\mathbf{A} \ge \textbf{\textit{rank(}}\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\,\textbf{\textit{)}} = \textbf{\textit{rank}}\,\mathbf{I} = n\,.$$

Звідси, в силу того, що матриця $\mathbf{A}$ n-о порядку, $\textbf{\textit{rank}}\,\mathbf{A} = n$. Оскільки за теоремою 3.4.1 $\textbf{\textit{rank}}\,\mathbf{A} = \textbf{\textit{rank}}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$, то стовпці ермітової матриці $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$ лінійно незалежні справа. Тоді, за теоремою 3.1.4 $\textbf{\textit{det(}}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\,\textbf{\textit{)}} = \textbf{\textit{ddet}}\,\mathbf{A} \ne 0$.

(Достатність) Оскільки, $\textbf{\textit{ddet}}\,\mathbf{A} = \textbf{\textit{det(}}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\,\textbf{\textit{)}} \ne 0$, то за теоремою 3.1.1 для правої відповідної ермітової $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$ існує обернена матриця $\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}$. Помноживши її справа на матрицю $\mathbf{A}^{*}$, одержимо ліву обернену до $\mathbf{A}$, $\left(L\mathbf{A}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*}$. Дійсно,

$$\left(L\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{*}\mathbf{A} = \mathbf{I}\,.$$

Розкриваючи $\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)^{-1}$ як ліву обернену та використовуючи формулу (2.10), одержимо:

$$\left(L\mathbf{A}\right)^{-1} = \left(L\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)\right)^{-1}\mathbf{A}^{*} =$$

$$= \frac{1}{\textbf{\textit{det(}}\,\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\,\textbf{\textit{)}}}\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} & L_{2n} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}^{*} & a_{12}^{*} & \dots & a_{1n}^{*} \\ a_{21}^{*} & a_{22}^{*} & \dots & a_{2n}^{*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{*} & a_{n2}^{*} & \dots & a_{nn}^{*} \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\mathbf{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \sum\limits_k L_{k1}a_{k1}^* & \sum\limits_k L_{k1}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_k L_{k1}a_{kn}^* \\ \sum\limits_k L_{k2}a_{k1}^* & \sum\limits_k L_{k2}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_k L_{k2}a_{kn}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_k L_{kn}a_{k1}^* & \sum\limits_k L_{kn}a_{k2}^* & \dots & \sum\limits_k L_{kn}a_{kn}^* \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\mathbf{ddet}\,\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathbf{cdet}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}\left(\mathbf{a}_{.1}^*\right) & \mathbf{cdet}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}\left(\mathbf{a}_{.2}^*\right) & \dots & \mathbf{cdet}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}\left(\mathbf{a}_{.n}^*\right) \\ \mathbf{cdet}_2(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.2}\left(\mathbf{a}_{.1}^*\right) & \mathbf{cdet}_2(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.2}\left(\mathbf{a}_{.2}^*\right) & \dots & \mathbf{cdet}_2(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.2}\left(\mathbf{a}_{.n}^*\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{cdet}_n(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.n}\left(\mathbf{a}_{.1}^*\right) & \mathbf{cdet}_n(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.n}\left(\mathbf{a}_{.2}^*\right) & \dots & \mathbf{cdet}_n(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.n}\left(\mathbf{a}_{.n}^*\right) \end{pmatrix}$$

Оскільки для всіх $j=\overline{1,n}$ j-й стовпець матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ має вигляд $\begin{pmatrix} \sum\limits_i a_{1i}^* a_{ij} \\ \vdots \\ \sum\limits_i a_{ni}^* a_{ij} \end{pmatrix}$, то справедливим є співвідношення

$$\mathbf{ddet}\,\mathbf{A}=\mathbf{det}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})=\mathbf{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})=\sum_i \mathbf{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{a}_{.i}^*\right)\cdot a_{ij}=\sum_i \mathbb{L}_{ij}\cdot a_{ij}\,. \tag{3.12}$$

Звідки й одержимо формулу (3.10).

Доведемо тепер формулу (3.11) для визначникового зображення правої оберненої матиці над тілом $\boldsymbol{S}$. За означенням 3.5.1 і за умовою теореми $\mathbf{ddet}\,\mathbf{A}=\mathbf{det}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)\neq 0$, тоді за теоремою 3.1.1 для ермітової $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ існує обернена матриця $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1}$. Помноживши її зліва на матрицю $\mathbf{A}^*$, одержимо праву обернену матрицю до матриці $\mathbf{A}$, $(R\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1}$. Дійсно, $\mathbf{A}(R\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{A}\mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1}=\mathbf{I}$.

Розкриваючи $\left(\mathbf{AA}^*\right)^{-1}$, як праву обернену, та використовуючи формулу (2.5), одержимо:

$$\left(R\mathbf{A}\right)^{-1} = \mathbf{A}^*\left(R\left(\mathbf{AA}^*\right)\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{det\,(}\,\mathbf{AA}^*\,\boldsymbol{)}} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & \dots & R_{n1} \\ R_{12} & R_{22} & \dots & R_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{1n} & R_{2n} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum\limits_k a_{1k}^* R_{1k} & \sum\limits_k a_{1k}^* R_{2k} & \dots & \sum\limits_k a_{1k}^* R_{nk} \\ \sum\limits_k a_{2k}^* R_{1k} & \sum\limits_k a_{2k}^* R_{2k} & \dots & \sum\limits_k a_{2k}^* R_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_k a_{nk}^* R_{1k} & \sum\limits_k a_{1k}^* R_{1k} & \dots & \sum\limits_k a_{nk}^* R_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{rdet}_1(\mathbf{AA}^*)_{1.}\left(\mathbf{a}_{1.}^*\right) & \boldsymbol{rdet}_2(\mathbf{AA}^*)_{2.}\left(\mathbf{a}_{1.}^*\right) & \dots & \boldsymbol{rdet}_n(\mathbf{AA}^*)_{n.}\left(\mathbf{a}_{1.}^*\right) \\ \boldsymbol{rdet}_1(\mathbf{AA}^*)_{1.}\left(\mathbf{a}_{2.}^*\right) & \boldsymbol{rdet}_2(\mathbf{AA}^*)_{2.}\left(\mathbf{a}_{2.}^*\right) & \dots & \boldsymbol{rdet}_n(\mathbf{AA}^*)_{n.}\left(\mathbf{a}_{2.}^*\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{rdet}_1(\mathbf{AA}^*)_{1.}\left(\mathbf{a}_{n.}^*\right) & \boldsymbol{rdet}_2(\mathbf{AA}^*)_{2.}\left(\mathbf{a}_{n.}^*\right) & \dots & \boldsymbol{rdet}_n(\mathbf{AA}^*)_{n.}\left(\mathbf{a}_{n.}^*\right) \end{pmatrix}$$

Оскільки для всіх $i = \overline{1,n}$ i-й рядок матриці $\mathbf{AA}^*$ має вигляд $\left(\sum\limits_j a_{ij} a_{j1}^* \dots \sum\limits_j a_{ij} a_{jn}^*\right)$, то справедливим є співвідношення

$$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{det\,(}\,\mathbf{AA}^*\,\boldsymbol{)} = \boldsymbol{rdet}_i\boldsymbol{(}\,\mathbf{AA}^*\,\boldsymbol{)} = \sum_j a_{ij} \cdot \boldsymbol{rdet}_i\,\mathbf{G}_{i\,.}\left(\mathbf{a}_{j\,.}^*\right) = \sum_j a_{ij} \cdot \mathbb{R}_{ij}\,.$$

Звідки й одержуємо формулу (3.11).

Рівність $(L\mathbf{A})^{-1} = (R\mathbf{A})^{-1}$ випливає з єдиності оберненої матриці над тілом.

Теорему доведено.

Зауваження 3.6.1. В теоремі 3.6.1 пропонується класичний метод визначникового зображення оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$ для довільної $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n, S)}$, подвійний визначник якої не дорівнює нулю, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, через матрицю, яка є аналогом класичної приєднаної. Тобто, її класичну приєднану можна представити, як матрицю, елементи якої є лівими подвійними алгебричними доповненнями $(\mathbb{L}_{ij})_{n\times n}$, - формула (3.10), або правими подвійними алгебричними доповненнями $(\mathbb{R}_{ij})_{n\times n}$, - формула (3.11), матриці $\mathbf{A}$. Позначимо її $\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]$, тоді в тілі $\boldsymbol{S}$ виконується формула:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}.$$

Теорема 3.6.2. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n, S)}$ *і тіло* $\boldsymbol{S}$ *є композиційною асоціативною нерозщеплюваною алгеброю над максимальним впорядкованим полем* $\boldsymbol{F}$ *, тоді виконуються рівності,*

1) $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^{-1} = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^{-1}$;

2) $\boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]) = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^{n-1}$.

Доведення. З теореми 3.5.2 одержимо

$$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{I} = \boldsymbol{ddet}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = 1.$$

Звідси, очевидно, випливає рівність 1) теореми.

Доведемо тепер рівність 2). Використавши зображення оберненої матриці (3.10), одержимо

$$\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)=\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]\cdot\mathbf{A}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)\cdot a_{i1} & \ldots & \sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_1(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.1}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)\cdot a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_n(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.n}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)\cdot a_{i1} & \ldots & \sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_n(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.n}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)\cdot a_{in}\end{pmatrix}. \qquad (3.13)$$

За співвідношенням (3.12) для всіх $j=\overline{1,n}$ маємо

$$\sum_i \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)\cdot a_{ij}=\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}.$$

Отже, всі елементи головної діагоналі матриці (3.13) дорівнюють $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}$. При умові $j\neq k$ вираз $\sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)\cdot a_{ik}$ відображає розклад по j-у стовпцю стовпцевого визначника по j-тому стовпцю матриці, яку одержимо з ермітової матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, замінивши її j-й стовпець її k-м стовпцем. За теоремою 2.6.4 такий визначник дорівнює нулю. Тому для всіх $j\neq k$ маємо $\sum\limits_i \boldsymbol{cdet}_j(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{a}^*_{.i}\right)\cdot a_{ik}=0$.

Таким чином, $\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]\cdot\mathbf{A}=\boldsymbol{diag}(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A},\ldots,\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})$. Звідси, одержимо

$$\boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]\cdot\mathbf{A})=\boldsymbol{det}(\boldsymbol{diag}(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A},\ldots,\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}))=(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^n.$$

Оскільки, тіло $\boldsymbol{S}$ є композиційною асоціативною нерозщеплюваною алгеброю над максимальним впорядкованим полем $\boldsymbol{F}$, то за теоремою 3.5.2 маємо

$$\boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]\cdot\mathbf{A}) = \boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]])\cdot\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^{n}.$$

Звідси, $\boldsymbol{ddet}(\boldsymbol{Adj}[[\mathbf{A}]]) = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^{n-1}$.

Теорему доведено.

Цей підрозділ підсумуємо більш загальним критерієм оборотності довільної квадратної матриці над тілом $\boldsymbol{S}$:

Теорема 3.6.3. *Нехай* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M}(n, \boldsymbol{S})$, *тоді наступні твердження еквівалентні:*

а) матриця $\mathbf{A}$ *оборотна;*

б) $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*;*

в) її відповідні ермітові матриці $\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}$ *і* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}$ *невироджені;*

г) стовпці матриці $\mathbf{A}$ *лінійно незалежні справа;*

д) рядки матриці $\mathbf{A}$ *лінійно незалежні зліва;*

е) $\boldsymbol{rank}\,\mathbf{A} = n$.

Доведення. Еквівалентність тверджень а) і б) випливає з теореми 3.6.1. Еквівалентність тверджень б) і в) випливає з теореми 3.5.1 та означення невиродженості ермітової матриці. З теорем 3.3.6 та 3.3.7 випливає, відповідно, еквівалентність тверджень в) і г) та в) і д). З теорем 3.4.1 та 3.4.2, очевидно, випливає еквівалентність твердження е) з твердженнями д) та г).

Теорему доведено.

3.7. Правило Крамера для систем лінійних рівнянь над тілом

3.7.1. Розв'язок правої системи лінійних рівнянь. Розглянемо праву систему лінійних рівнянь над тілом $\boldsymbol{S}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{3.14}$$

із матрицею коефіцієнтів $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n, S)}$, стовпцем вільних елементів $\mathbf{y} = \left(y_1, \ldots, y_n\right)^T$, де $y_i \in \boldsymbol{S}$ для всіх $i = \overline{1, n}$, і стовпцем невідомих $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T$. Матриця $\mathbf{A}$ є основною матрицею системи лінійних рівнянь (3.14), тоді її розширена матриця має вигляд:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \end{pmatrix}$$

Для систем лінійних рівнянь над тілом має місце теорема Кронекера-Капеллі:

Теорема 3.7.1. [34] *Для того, щоб система лінійних рівнянь над тілом була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці цієї системи дорівнював рангу її основної матриці.*

Теорема 3.7.2. *Якщо подвійний визначник основної матриці* $\mathbf{A}$ *правої системи лінійних рівнянь (3.14) над тілом* $\mathbf{S}$ *не дорівнює нулю,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, *тоді система має і при цьому єдиний розв'язок, який задається формулою для всіх* $j = \overline{1, n}$:

$$x_j = \frac{\boldsymbol{cdet}_j\,(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}\left(\mathbf{f}\right)}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}, \tag{3.15}$$

де $\mathbf{f} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$.

Доведення. Доведемо існування розв'язку системи, тобто, покажемо, що система лінійних рівнянь (3.14) сумісна.

Оскільки, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} \neq 0$, то базисний мінор матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ має порядок n. Це означає, що всі n стовпців матриці $\mathbf{A}$ є базисними. В силу теореми 3.3.3 стовпці основної матриці $\mathbf{A}$ лінійно незалежні справа і ранг її дорівнює n. Перші n стовпців розширеної матриці $\mathbf{A}_1$ співпадають з відповідними стовпцями основної матриці, отже, вони також лінійно незалежні справа. Оскільки правий векторний простір n-мірних стовпців $R\boldsymbol{S}^n$ має розмір n, то $n+1$ довільних n-мірних стовпців лінійно залежні справа, тоді $n+1$ стовпців розширеної матриці $\mathbf{A}_1$ також лінійно залежні справа, а n - максимальне число лінійно незалежних справа стовпців матриці $\mathbf{A}_1$. Таким чином, ранг розширеної матриці системи лінійних рівнянь (3.14) також дорівнює n і за теоремою 3.7.1 система лінійних рівнянь (3.14) є сумісною.

Доведемо єдиність розв'язку системи (3.14). Нехай стовпець $\mathbf{x}$ є розв'язком системи, тобто, існує такий n-мірний стовпець $\mathbf{x}$ над тілом $\boldsymbol{S}$, який перетворює рівняння (3.14) в тотожність. Оскільки, $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}^*\mathbf{A} \neq 0$, то в силу теореми 3.6.1 існує матриця $\mathbf{A}^{-1}$ - обернена до матриці $\mathbf{A}$. Будемо розглядати її, як ліву обернену $(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*$. Помноживши тотожність (3.14) зліва на $(L\mathbf{A})^{-1} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^*$, одержимо

$$\mathbf{x} = (L\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y} = \left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{y} \tag{3.16}$$

Оскільки матриця $(L\mathbf{A})^{-1}$ задається однозначно, то стовпець $\mathbf{x}$, що задається співвідношенням (3.16), є єдиним розв'язком системи лінійних рівнянь (3.14) над тілом $\boldsymbol{S}$.

Нехай $\mathbf{f} := \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{y}$, де $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ - n-мірний стовпець над тілом $\boldsymbol{S}$. Запишемо розв'язок системи лінійних рівнянь (3.14) покомпонентно, розглядаючи матрицю $\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)^{-1}$ як ліву обернену, тоді з рівності (3.16) одержимо для всіх $j = \overline{1, n}$

$$x_j = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^{-1} \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \cdot f_i \,,$$

де L_{ij} - ліве алгебричне доповнення відповідного елемента матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Сума записана справа, в силу леми 2.2.2, відповідає стовпцевому визначнику по j-му стовпцю матриці, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, замінивши її j-й стовпець стовпцем $\mathbf{f}$, тоді для всіх $j = \overline{1,n}$

$$x_j = (\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A})^{-1}\, \boldsymbol{cdet}_j (\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.j}(\mathbf{f}),$$

де $\mathbf{f} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$.

Теорему доведено.

Зауваження 3.7.1. Формула (3.15) є очевидним і природним узагальненням правила Крамера для правої системи лінійних рівнянь над тілом $\boldsymbol{S}$. Ще більшу аналогію правилу Крамера можна одержати в наступному частковому випадку.

Теорема 3.7.3. *Якщо основна матриця* $\mathbf{A}$ *правої системи лінійних рівнянь (3.14) над тілом* $\mathbf{S}$ *невироджена ермітова, тоді система має і при цьому єдиний розв'язок, який задається формулою для всіх* $j = \overline{1,n}$*:*

$$x_j = \frac{\boldsymbol{cdet}_j\, \mathbf{A}_{.j}(\mathbf{y})}{\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}}.$$

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 3.7.2, можна показати, що система сумісна. Знайдемо її розв'язок.

Оскільки, ермітова матриця $\mathbf{A}$ невироджена, то $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \neq 0$, і в силу теореми 2.8.1 існує єдина матриця $\mathbf{A}^{-1}$ - обернена до матриці $\mathbf{A}$. Будемо розглядати її, як ліву обернену $(L\mathbf{A})^{-1}$. Помноживши рівняння (3.14) зліва на $(L\mathbf{A})^{-1}$, одержимо

$$\mathbf{x} = (L\mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}\,. \tag{3.17}$$

Стовпець $\mathbf{x}$, що задається співвідношенням (3.17), в силу теореми 3.1.1, є єдиним розв'язком системи лінійних рівнянь (3.14) над тілом $\boldsymbol{S}$, коли її основна матриця є невиродженою ермітовою. Запишемо його покомпонентно, тоді для всіх $j = \overline{1,n}$:

$$x_j = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\sum_{i=1}^{n} L_{ij}\cdot y_i\,,$$

де L_{ij} - ліве алгебричне доповнення елемента a_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Оскільки, сума записана справа за лемою 2.2.2 відповідає стовпцевому визначнику по j-му стовпцю матриці, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}$, замінивши її j- й стовпець стовпцем $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)^T$. Тоді для всіх $j = \overline{1,n}$ одержимо

$$x_j = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\,\boldsymbol{cdet}_j\,\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{y}).$$

Теорему доведено.

3.7.2. Розв'язок лівої системи лінійних рівнянь. Розглянемо ліву систему лінійних рівнянь над тілом $\boldsymbol{S}$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{y}, \tag{3.18}$$

із матрицею коефіцієнтів $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n, S)}$, рядком вільних елементів $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, де $y_i \in \boldsymbol{S}$ для всіх $i = \overline{1, n}$, і стовпцем невідомих $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ є основною матрицею системи лінійних рівнянь (3.18), тоді її розширена матриця $\mathbf{A}_1$ має вигляд:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

Теорема 3.7.4. *Якщо подвійний визначник основної матриці* $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(n, S)}$ *лівої системи лінійних рівнянь (3.18) над тілом* $\boldsymbol{S}$ *не дорівнює нулю,* $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$*, тоді система має і при цьому єдиний розв'язок, який задається формулою для всіх* $i = \overline{1, n}$*:*

$$x_i = \frac{\boldsymbol{rdet}_i\,(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{i\,.}(\mathbf{z})}{\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}}, \tag{3.19}$$

де $\mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}^*$.

Доведення. Показавши, аналогічно доведенню теореми 3.7.2, що система сумісна і має єдиний розв'язок, знайдемо його представлення за формулою (3.19).

Оскільки, $\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A} \neq 0$, то в силу теореми 3.6.1 існує матриця $\mathbf{A}^{-1}$ - обернена до матриці $\mathbf{A}$. Будемо розглядати її як праву обернену $(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1}$. Помноживши рівняння (3.19) справа на $(R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^*\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right)^{-1}$, одержимо

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot (R\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}^{*}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}. \tag{3.20}$$

Нехай $\mathbf{z} := \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}^{*}$, де $\mathbf{z} = (z_1, \quad z_2, \quad \ldots \quad z_n)$ - n-мірний вектор - рядок над тілом $\boldsymbol{S}$. Запишемо розв'язок, що задається формулою (3.20), покомпонентно, розглядаючи матрицю $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1}$ як праву обернену, тоді для всіх $i = \overline{1, n}$ маємо

$$x_i = \left(\boldsymbol{det}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot R_{ij} ,$$

де R_{ij} - праве алгебричне доповнення відповідного елемента матриці $\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}$. Оскільки, сума записана справа, за лемою 2.2.1, відповідає рядковому визначнику по i-му рядку матриці, яку одержимо з матриці $\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}$ заміною її i-го рядка рядком $\mathbf{z}$, то для всіх $i = \overline{1, n}$ одержимо

$$x_i = \left(\boldsymbol{ddet}\,\mathbf{A}\right)^{-1} \boldsymbol{rdet}_i\,\boldsymbol{(}\,\mathbf{A}\mathbf{A}^{*}\,\boldsymbol{)}_{i.}(\mathbf{z}),$$

де $\mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}^{*}$.

Теорему доведено.

Зауваження 3.7.2. Формула (3.19) є очевидним і природним узагальненням правила Крамера для лівої системи лінійних рівнянь над тілом $\boldsymbol{S}$. Ще більшу аналогію до формул Крамера можна одержати в частковому випадку, коли основна матриця системи - ермітова.

Теорема 3.7.5. *Якщо основна матриця $\mathbf{A} \in \boldsymbol{M(}\,n\boldsymbol{,}\,\boldsymbol{S)}$ лівої системи лінійних рівнянь (3.19) над тілом $\mathbf{S}$ невироджена ермітова, тоді система* *має і при цьому єдиний розв'язок, який задається формулою для всіх* $i=\overline{1,n}$*:*

$$x_i = \frac{\boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{y})}{\boldsymbol{det}\, \mathbf{A}}.$$

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 3.7.2, можна показати, що система сумісна і має єдиний розв'язок. Знайдемо його аналітичне представлення.

Оскільки, ермітова матриця $\mathbf{A}$ - невироджена, то $\boldsymbol{det}\,\mathbf{A} \neq 0$, і в силу теореми 3.1.1 існує матриця $\mathbf{A}^{-1}$ - обернена до матриці $\mathbf{A}$. Будемо розглядати її, як праву обернену $(R\mathbf{A})^{-1}$. Помноживши рівняння (3.19) справа на $(R\mathbf{A})^{-1}$, одержимо

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot (R\mathbf{A})^{-1}. \tag{3.21}$$

Запишемо розв'язок, що задається формулою (3.21) покомпонентно для всіх $i=\overline{1,n}$:

$$x_i = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1} \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot R_{ij},$$

де R_{ij} - праве алгебричне доповнення елемента b_{ij} матриці $\mathbf{A}$.

Оскільки, сума записана справа за лемою 2.2.1 відповідає рядковому визначнику по i-му рядку матриці, який одержимо з матриці $\mathbf{A}$ заміною її i-го рядка рядком $\mathbf{y}$, то для всіх $i=\overline{1,n}$ маємо $x_i = (\boldsymbol{det}\,\mathbf{A})^{-1}\, \boldsymbol{rdet}_i\, \mathbf{A}_{i.}(\mathbf{y})$.

Теорему доведено.

3.8. Висновки

1. У першому підрозділі одержано визначникове зображення матриці оберненої до ермітової над тілом з інволюцією через класичну приєднану. Доведена теорема про визначник матриці оберненої до ермітової. Показано, що визначник ермітової матриці задовольняє ключову аксіому 1 означення 1.1.1.
2. В другому підрозділі вводяться поняття лівої та правої відповідних ермітових матриць для довільної матриці над тілом. Досліджені властивості, що встановлюють залежність між довільною матрицею над тілом та відповідними їй ермітовими матрицями.
3. В третьому підрозділі доведені теореми про базисні мінори відповідних ермітових матриць над тілом з інволюцією та встановлені критерії виродженості цих матриць в залежності від вихідної довільної матриці. Вводиться поняття рангу по головних мінорах для ермітової матриці. Залежність між цим рангом для відповідних ермітових матриць та рангом вихідної матриці встановлена в четвертому підрозділі.
4. В п’ятому підрозділі доведена теорема про рівність визначників лівої та правої відповідних ермітових матриць для довільної квадратної матриці над тілом з інволюцією, на основі якої вводиться поняття подвійного визначника квадратної матриці над тілом. Показано, що цей визначник задовольняє аксіоми 1 і 3 означення 1.1.1 некомутативного визначника, а також властивість розкладу Лапласа визначника по будь-якому рядку чи стовпцю. А якщо тіло $\boldsymbol{S}$ є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над максимальним впорядкованим полем $\boldsymbol{F}$, зокрема є тілом кватерніонів, то подвійний визначник також задовольняє ще й аксіому 2. Над тілом кватерніонів встановлена залежність між по-

двійним визначником та іншими відомими не комутативними визначниками.

5. В шостому підрозділі встановлені критерії оборотності квадратної матриці над тілом в рамках теорії стовпцевих та рядкових визначників. Вперше для квадратної матриці з некомутуючими елементами одержано визначникове зображення оберненої матриці через матрицю, яка є аналогом класичної приєднаної. Доведено теорему про подвійні визначники оберненої та аналога класичної приєднаної матриць.
6. В сьомому підрозділі вперше розв'язки правої та лівої систем лінійних рівнянь над тілом знаходяться за формулами, що узагальнюють правило Крамера.

Основні результати розділу викладені в роботах [8 -11, 14-25, 27-29].

ВИСНОВКИ

1. Введені нові поняття стовпцевих та рядкових визначників квадратних матриць над тілом, яке є асоціативною композиційною нерозщеплюваною алгеброю над своїм центром – полем нульової характеристики. На основі досліджених властивостей цих визначників показано, що для довільних квадратних матриць над тілом з інволюцією вони є повним та природним узагальненням визначника Мура, що розглядався тільки для ермітових матриць.
2. Для довільної квадратної матриці над даним тілом ці визначники, як матричні функціонали, не задовольняють аксіоми некомутативного визначника, а тому є пре-визначниками. Але, введений в рамках теорії стовпцевих та рядкових визначників, визначник ермітової матриці задовольняє ключову аксіому некомутативного визначника, а також властивість розкладу Лапласа по будь-якому рядку чи стовпцю матриці. Це дозволяє ввести поняття правого чи лівого алгебричного доповнення довільного елемента ермітової матриці та одержати визначникове зображення матриці оберненої до ермітової через класичну приєднану.
3. На основі теорії стовпцевих та рядкових визначників для довільної квадратної матриці над тілом вводиться поняття подвійного визначника. Подвійний визначник представлений як визначник, що задовольняє як аксіоми некомутативного визначника, так і властивість розкладу Лапласа по будь-якому стовпцю чи рядку матриці над тілом, яке є кватерніоновою алгеброю з діленням над своїм центром – полем нульової характеристики.
4. Встановлено критерій оборотності довільної квадратної матриці над тілом з інволюцією в термінах теорії стовпцевих та рядкових

визначників. Одержано визначникове зображення оберненої матриці над тілом з інволюцією через аналог класичної приєднаної.

5. Одержано узагальнення правила Крамера для правих і лівих систем лінійних рівнянь над тілом з інволюцією.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Артин Э. Геометрическая алгебра. - М.: Наука. 1969, 284 с.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. - М.: Наука. 1965, 300 с.
3. Ван-дер-Варден Б. Л. Алгебра.- М.: Наука, 1979.
4. Гельфанд И. М., Ретах В. С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами// Функциональный анализ и его приложения. - 1991.-**25**, Вып. 2. - С. 13-35.
5. Гельфанд И. М., Ретах В. С. Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов// Функциональный анализ и его приложения. –1992.- **26**, Вып. 4. - С. 33-45.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
7. Жевлаков К.А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.. Кольца близкие к ассоциативным. - М.: Наука, 1978.
8. Кирчей І. І. Дробово-раціональна регуляризація системи лінійних рівнянь над тілом кватерніонів// Мат. методи та фізико-механічні поля. – 1996 - **39**, -№ 2. - С. 89 - 95.
9. Кирчей І. І. Класична приєднана матриця для ермітової над тілом// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001 – **44**, №3. – С. 33–48.
10. Кирчей І. І. Матриця, обернена до ермітової над тілом// Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 4. - С. 120-125.
11. Кирчей І. І. Аналог класичної приєднаної матриці над тілом з інволюцією// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, №4. – С.81–91.
12. Кирчей І. І. Зображення узагальненої оберненої Мура-Пенроуза через аналог приєднаної матриці// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, №4. – С.6–11.

13. Кирчей І. І. Визначникове зображення матриці Дразіна// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, №2. – С.58–64.
14. Кирчей І. І.. Правило Крамера над кватерніоновою алгеброю з діленням// Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. - 2006. - №1. - С.28-34.
15. Кирчей И. И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений// Фундамент. и прикл. матем. – 2007. - **13**:4. – С. 67–94.
16. Кирчей І. І. Про системи лінійних рівнянь в алгебрі кватерніонів / Міжнародна школа-семінар "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування" (18-25. 9. 1994, Верхнє Синьовидне). Тези доповідей. – Львів, 1994. - С. 4.
17. Кирчей І. І. J- дробова регуляризація системи лінійних рівнянь над тілом кватерніонів/ Тези доповідей IV Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (11-14. 04. 1995, м. Київ). – Київ. - 1995. - С. 122.
18. Кирчей І. І. Обернена матриця над тілом/ IX Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука (16-19. 04. 2002, м. Київ). Матеріали конференції. - Київ, 2002. - С. 297.
19. Кирчей І. І. Аналог класичної приєднаної матриці над тілом/ Міжнародна школа-семінар "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування" (19-24. 08. 2002, м. Ужгород). Тези доповідей. - Ужгород, 2002. - С. 36.
20. Кирчей І. І. Нормальний розв'язок систем лінійних рівнянь над тілом / III Всеукраїнська наукова конференція (9-12. 09. 2003, м Івано-Франківськ). Тези доповідей. - Івано-Франківськ, 2003. - С. 46.
21. Кирчей І. І. Правило Крамера над тілом кватерніонів / X Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука (13-16 травня 2004, м. Київ). Матеріали конференції. - Київ, 2004. - С. 302.

22. Kyrchei I. I. Determinantal representation of Moore-Penrose inverse / Конференція "Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці II", присв'ячена пам'яті А. Я. Дороговцева (4-8. 10. 2004, м. Київ). Тези доповідей. – Київ, 2004. – С.77.
23. Кирчей І. І. Узагальнена обернена матриця над тілом/ Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (27.09 – 1.10. 2004, м. Дрогобич). Тези доповідей. – Львів, 2004. – С.92.
24. Kyrchei I.I. Generalization of Cramer's rule over a skew field/ Международная агебраическая конференция, посвящённая 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (26. 05 – 2.06 2004, г. Москва, Россия). Тезисы докладов. - Москва, 2004. - С.226-228.
25. Kyrchei I.I. The least square solution of system of linear equations over the quaternion skew field / Международная алгебраическая конференция (29.08. – 3.09. 2005, г. Екатеринбург, Россия). Тезисы докладов. - Екатеринбург, 2005. - С. 128-129.
26. Кирчей І.І. Аналог правила Крамера для нормального розв'язку систем лінійних рівнянь/ Матеріали міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII)" (23 – 28 .09. 2005, м. Ялта) - Київ, 2005. - С. 189.
27. Kyrchei I. Determinantal representation of the inverse matrix over the quaternion skew field/ 5th International Algebraic Conference in Ukraine (20-27.06. 2005, Odessa), Abstracts. - Odessa, 2005. - P. 120.
28. Кирчей І.І. Визначникове зображення узагальненої оберненої Мура - Пенроуза / XI Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука (18-20. 05. 2006, м. Київ). Матеріали конференції. - Київ, 2006. - С. 452.

29. Kyrchei I. Determinantal representation of the Moore-Penrose inverse matrix over quaternion skew field / 6th International Algebraic Conference in Ukraine (1-7. 07. 2007, Kamyanets-Podilsky). Abstracts. - Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 120 – 121.
30. Кирчей І. І. Визначникове зображення матриці Дразіна. / Праці міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)” (23 – 28. 09. 2007, м. Ялта) - Київ, 2007. - С. 121-122.
31. Кирчей І. І. Правило Крамера для системи узагальнених нормальних рівнянь / Міжнародна конференція ім. В. Я. Скоробагатька (24-28. 09. 2007, м. Дрогобич). Тези доповідей. – Львів, 2007. – С.126.
32. Ланкастер П. Теория матриц. - М.: Наука, 1978.
33. Ленг С. Алгебра.- М.: Мир, 1968.
34. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. - М.:Наука, 1970.
35. Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т.1, Под общ. ред. Л. А. Скорнякова - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит. 1990. - 592 с.
36. Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т.2, Под общ. ред. Л.А.Скорнякова - М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит. 1990. – 480 с.
37. Понизовский И. С. Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца// Математический сборник - 1958 - **45** (87) №1. - С. 3-16,
38. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. - М.: Наука. - 1983.
39. Сявавко М. С. Узагальнення формул Крамера// Укр. мат. журнал. - 2001 - **53**, №3. - С. 25-43.
40. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. - 655 с.
41. Adler S. Quaternionic quantum mechanics and quantum Fields. - New York: Oxford UP. - 1995.
42. Albert A. A. Structure of algebras. AMS Colloquium Publications. Vol. **24**. - Rhode Island: Providence, 1961.

43. Amitsur S. A., Rowen L. H., Tignol J.-P. Division algebras of degree 4 and 8 with involution// Israel J. Math. – 1979. – **33**. – P. 133–148.

44. Artin M., Shelter W., Tate J. Quantum deformations of $\boldsymbol{GL_n}$ // Comm. On Pure and Appl. Math.- 1991. - **44** - P.879-895.

45. Aslaksen H. Quaternionic determinants// Mathematics Intelligencer. - 1996. - **18(3) -** P.57–65.

46. Brenner J. L. Applications of the Diedonne determinant// Linear Algebra and its Applications. - 1968 - **1** -P.511-536,.

47. Brenner J. L. Matrices of quaternions// Pacific Journal of Mathematics. – 1951 - **1** - P.329-335.

48. Cayley A. On certain results relating to quaternions// Phil. Mag.-1845. - V.**26**. - P.41-145; reprinted in The Collected Mathematical Papers. – Cambridge University Press, Cambridge. - 1989. - **1** - P.123-126.

49. Chen L. Definition of determinant and Cramer solutions over quaternion field// Acta Math. Sinica (N. S.).– 1991 – **7** – P. 171–180.

50. Chen L. Inverse matrix and properties of double determinant over quaternion field// Science of China. Ser.A - 1991. - **34** - P. 528–540.

51. Cohen N., De Leo S. The quaternionic determinant// The Electronic Journal Linear Algebra. - 2000. - **7 -** P.100-111.

52. Cohn P. M. The similarity reduction of matrices over a skew field. // Math. Z. - 1973. - **132** - P.151-163.

53. Cohn P. M. Skew field constructions. London: Cambridge U. P. 1977.

54. Costa C., Serodio R. A footnote on quaternion block-tridiagonal systems// Electronic Transactions on Numerical Analysis. - 1999 - **9** -P. 53-55.

55. Diedonne J. Les determinantes sur une corps non commutatif. // Bull. Soc. Math. France. - 1943. - **71 -** P.27-45.

56. Dyson F. J. Quaternion determinants. // Helv Phys. Acta. - 1972. - **45** - P.289-302.

57. Eilenberg S., Niven I. The fundamental theorem of algebra for quaternions// Bull. Amer. Math. Soc. – 1944 -50. – P. 246–248.
58. Elduque A., Perez-Izquierdo J. M. Composition algebras of degree two// Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1999- **42** – P.641-653.
59. Finkelstein D., Jauch J. M., D. Speiser. Notes on Quaternion Quantum Mechanics. Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics II. Dordrecht: Hooker Reidel. -1979.- P.367-421.
60. Foata D. A noncommutative version of the matrix inversion formula. // Adv. in Math. - 1996. - **31** (3) - P. 330-349.
61. Fonseca C. M. On determinant preservers over skew fields// Portugallae Mathematica. – 1998. – **55,** N. 2. - P.209-218.
62. Hijikata H., Pizer A. K., Shemanske T. R. Orders in quaternion algebras// J. Reine Angew. Math. - 1989. - **394** - P.59-106, .
63. Heyting A. Die Theorie der linearen Gleichungenin einer Zahlenspezies mit nicht-kommutativer Multiplikation// Math. Ann. - 1927. - **98** - P.465-490.
64. Gelfand I., Retakh V. Quasideterminants// J. Selecta Math. -1997. -**3** (4) - P.517-546.
65. Gürsey F., Tze C. H. On the Role of Division, Fordan and Related Algebras in Particle Physics. Singapore: World Scientific. 1996.
66. Johnson N. W., Weiss A. I. Quaternionic modular groups. // Linear Algebra and its Applications. - 1999. - **295** - P.159-189.
67. Knus M. A., Parimala R., Sridharan R. On compositions and triality// J. Reine Angew. Math. - 1994. - **457 -** P.45– 70.
68. Knus M., Merkurjev A., Rost M., Tignol J.-P. The Book of Involutions, AMS Colloquium Publ. V. **44**. Rhode Island: Providence. 1998.
69. Lee H. S. Eigenvalues and canonical forms for matrices with quaternion coefficients// Proc. Royal Irish Academy, Section A. - 1949. - **52** - P. 253-260.

70. De Leo S., Scolarici G. Right eigenvalue equation in quaternionic quantum mechanics// J.Math. Phys. - 2000. - **36** - P.2971-2995.
71. D. W. Lewis. Sums of squares in central simple algebras// Math. Zeitschrift – 1985. – **190.** – P. 497–498.
72. Lewis D. W. Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton's quaternions// Irish Math. Soc. Bulletin. – 2006. – **57**. P. 41–64.
73. Lewis D. W. Congruence of skew-Hermitian matrices// IMS Bulletin. - 1997. - **39** - P. 6 – 9.
74. Madan Lal Mehta. Determinants of quaternion matrices// J. Math. Phys. Sci. - 1974. - **8** - P.559-570.
75. Marchiafava, Piccinni P., Pontecorvo M. Quaternionic structures in mathematics and physics. New Jersey: World Scientific, River Edge. 2001.
76. McCrimon K. Nonassociative algebra with scalar involution// Pacific Journal of Math. -1985. - **116(1) -** P.85–108.
77. Moore E. H. On the determinant of a hermitian matrix of quaternionic elements// Bull. Amer. Math. Soc. - 1922. - **28** - P.161-162.
78. Moore E. H. General Analysis Part 1. Memoirs of Amer. Phil. Soc. Philadelphia. 1935.
79. Niven I. M. Equations in quaternions// Amer. Math. Monthly – 1941.- **48. -** P.654–661.
80. Ore O. Linear equations in noncommutative rings// Ann. Math. - 1936. - **32 -** P. 463-477.
81. Van Praag P. Une caractérisation des corps de quaternions// Bull. Soc. Math. Belgique. - 1968. - **10** - P.283–285.
82. Van Praag P. Les formes hermitiennes quaternioniennes et le déterminant d'Eliakim Hastings Moore// Bull. Soc. Math. Belgique. - 1990 - Sér. A. **42** - P.767–775.
83. Pierce R. S. Associative Algebras. Springer-Verlag. New York. 1982.

84. Richardson A. R. Hypercomplex determinants// Massenger of Math. - 1926. - **55** - P.145-152.

85. Schafer R. D. An Introduction to Nonassociative Algebras. Academic Press. New-York. 1966.

86. Study E. Zur Theorie der linearen Gleichungen// Acta Math. -1920. - **42** - P.1-61.

87. Szeto G. On generalized quaternion algebras// Internat. J. Math. Sci. – 1980. – **3**, N 2. – P. 27-45.

88. Tignol J. P. Pfaffiens et Déterminant de E.H. Moore// Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin. - 1999. - **6** - P.537–539.

89. Tian Y. Matrix representations of octonions and their applications//Advances in App. Clifford Algebras. – 2000. - **10**, N 1. – P. 61-90.

90. Tian Y. Similarity and consimilarity of elements in the real Cayley-Dickson algebras// Advances in App.Clifford Algebras. - 1999. - **9**, N.1. – P.61-76.

91. Vigneras M.-F. Arithmetiques des algebras de quaternions. Lecture Notes in Mathematics 800. Springer. Berlin. 1980.

92. Ward J. P. Quaternions and Cayley numbers: Algebra and applications// Mathematics and its applications. Kluwer. Dordrecht. - V. **403**. - 1997.

93. Wiegmann N. A. Some theorems on matrices with real quaternion elements// Canad. J. Math. - 1955. – **7**. – P. 191-201.

94. Wolf L. A. Similarity of matrices in which the elements are real quaternions// Bull. Amer. Math. Soc. – 1936. – **42**. – P. 737–743.

95. Zhang F. Quaternions and matrices of quaternions// Linear Algebra and its Applications. - 1997. - **251** - P.21-57.