11

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

РЖ Мат. 4А672 (1982)

# ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Сборник научных трудов



КИЕВ "НАУКОВА ДУМКА" 1981

УДК 514.764.27

Р.Я.Мацюк

# ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Геодезические окружности в (псевдо)римановом пространстве $V_k^n$ с метрикой $ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$ характеризуются постоянством первой кривизны $\varkappa$ и равенством нулю второй. Они удовлетворяют определяющее уравнение [1]

$$\frac{D^3x^k}{ds^3}+g_{ij}\frac{D^2x^i}{ds^2}\frac{D^2x^j}{ds^2}\frac{Dx^k}{ds}=0, \quad (i,j,k=1,\dots,n). \qquad (1)$$

Оказывается, что это определение эквивалентно в (псевдо)евклидовом пространстве $E_1^4$ определению [2] мировой линии равноускоренно движущегося наблюдателя.

В пространстве $V_k^2$ уравнению (1) удовлетворяют экстремали вариационной задачи в параметрической форме, определяемой функционалом

$$\int\limits_{x(\tau)} \varkappa\, d\tau + a\, ds \qquad (2)$$

Здесь $a$ произвольное число; $\tau$ – параметр.

Отметим, что множество экстремалей функционала (2) включает все геодезические пространства $V_k^2$, т.е. линии, удовлетворяющие уравнение

$$\frac{D^2x^i}{d\tau^2}=0, \qquad (i=1,2).$$

В (псевдо)евклидовом пространстве $E_k^2$, где действует (псевдо)евклидова группа $E(2,k)$, справедливо более точное

Предложение.

Уравнение третьего порядка

$$\xi_i\left(x^j, \frac{dx^j}{d\tau}, \frac{d^2x^j}{d\tau^2}, \frac{d^3x^j}{d\tau^3}\right)=0, \qquad (i,j=1,2) \qquad (3)$$

тогда и только тогда является $E(2,k)$ – инвариантным уравнением Эйлера-Пуассона, имеющим кривизну $\varkappa$ первым интегралом и удовлетворяющимся также решениями уравнения

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2}=0 \qquad (i=1,2),$$

когда оно есть уравнение Эйлера – Пуассона для функционала (2).

Найденное уравнение (3) обобщается на случай пространства $E_k^n$ следующим образом:

$$(\dot{x}_l \dot{x}^l)^{-3/2} A_{ij} \dddot{x}^j - 3(\dot{x}_l \dot{x}^l)^{-\frac{5}{2}}(\dot{x}_l \ddot{x}^i) A_{ij} \ddot{x}^j = 0 \quad (i,j,l=1,\dots,n), \tag{4}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по параметру $\tau$; $A_{ij} = -A_{ji}$. Уравнение (4) инвариантно относительно группы $E(n,k)$, его решения суть геодезические окружности и включают все геодезические пространства $E_k^n$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Приведенное выше предложение, проверяется с помощью следующего критерия.

Система дифференциальных уравнений

$$\lambda_j\left(x^i, \frac{dx^i}{d\tau}, \dots, \frac{d^r x^i}{d\tau^r}\right)=0 \qquad (i,j=1,\dots,m)$$

является системой уравнений Эйлера – Пуассона в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \frac{d^s}{d\tau^s}\left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^{(s)i}} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^{(s)j}}\right)=0$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^{(v)j}} - \sum_{s=v}^{r} (-1)^s \frac{s!}{(s-v)!\, v!} \frac{d^{s-v}}{d\tau^{s-v}} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^{(s)j}} = 0,$$

$$(i,j=1,\dots,n;\ r \le v \le 1),$$

где $x^{(s)i}$ обозначает производную $\dfrac{d^s x^i}{d\tau^s}$.

Таким образом, konциркулярную геометрию [1], занимающуюся изучением геодезических окружностей, можно рассматривать также и с точки зрения пространств высшего порядка [3], где элемент длины зависит от производных высшего порядка как, например, в (2). Кроме того, открывается возможность построить механику Остроградского с высшими производными [4] для равноускоренного движения в теории относительности. В двухмерном пространстве – времени в качестве лагранжиана можно использовать подынтегральное выражение в (2).

1. Yano K. Concircular geometry I. - Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, 16, 6, p. 195-200.
2. Hill E.L. On the kinematics of uniformly accelerated motions and classical electromagnetic theory. - Phys. Rev., 1947, 72, N 2, p. 143-149.
3. Kawaguchi M. On introduction to the theory of higher-order spaces. Iü - RAAG Mem. Unifying Study Basic Probl. Eng. and Phys. Sci. Means Geom., 1972, N 3, p. 718-734.
4. Rodrigues Paulo R. Sur les systémes mécaniques généralises. - C.R.Acad.Sci., 1976, 282, N 22, p. A1307-A1309.