Sov. Phys.-Dokl (USA) vol. 30 no. 11
p. 923-5 (Nov. 1985)

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1985

ТОМ 285 № 2

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 531.12/.13.01 : 530.12:
531.314.2 : [517.972.7 + 512.816.7]

Р.Я. МАЦЮК

ЛАГРАНЖЕВ АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 19 XI 1984)

В последнее время возрос интерес к описанию движения классических скалярных и спиновых частиц в калибровочных и гравитационном полях. Соответствующие уравнения обобщают уравнения Лоренца и Папапетру–Пирани [1, 2]. Между тем, уже уравнения Матиссона–Папапетру с условием Пирани $u_\beta S^{\alpha\beta} = 0$ $(u^\alpha = \dot{x}^\alpha)$ приводят к уравнению движения третьего порядка [3]

$$(1) \qquad m_0 \frac{Du^\alpha}{ds} = S^{\alpha\beta} \frac{D^2 u_\beta}{ds^2} - \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\sigma} u^\beta S^{\gamma\sigma},$$

$$u_\beta u^\beta = 1.$$

Уравнения Матиссона–Папапетру, как и более ранние уравнения Френкеля, выводятся из вариационного принципа многими авторами. Однако до сих пор не исследовался вопрос о существовании лагранжиана для уравнения Матиссона (1). С другой стороны, если частица не предполагается пробной, сила радиационного трения, входящая в уравнение движения, также содержит слагаемое третьего порядка [4, 5], как, например, в уравнении Лоренца–Дирака

$$m_0 \left[\frac{\dot{u}^\alpha}{\|u\|^2} - \frac{\dot{u}_\beta u^\beta}{\|u\|^4} u^\alpha \right] =$$

$$= \frac{2}{3} e^2 \left[\frac{\ddot{u}^\alpha}{\|u\|^3} - \frac{\ddot{u}_\beta u^\beta}{\|u\|^5} u^\alpha - 3 \frac{\dot{u}_\beta u^\beta}{\|u\|^5} \dot{u}^\alpha + 3 \frac{(\dot{u}_\beta u^\beta)^2}{\|u\|^7} u^\alpha \right] + \frac{e}{\|u\|} F^{\alpha\beta} u_\beta .$$

Вопрос о существовании лагранжиана для уравнения Лоренца–Дирака до настоящего времени не был решен полностью [6]. Уравнение (2) инвариантно относительно изменения способа параметризации интегральной кривой. Если положить $m_0 = 0$ и $F^{\alpha\beta} = 0$, оно перейдет в уравнение геодезических окружностей, которое определяет гиперболическое движение релятивистских частиц и исследовалось в связи с проблемой равноускоренных систем отсчета [7].

Параметрически-инвариантную форму уравнений Матиссона (1) можно получить непосредственно из уравнений Диксона [8]

$$\frac{Dp^\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\sigma} u^\beta S^{\gamma\delta}, \qquad \frac{DS^{\alpha\beta}}{d\lambda} = 2p^{[\alpha} u^{\beta]},$$

где λ – произвольный параметр вдоль мировой линии. Здесь предлагается эквивалентная формулировка в терминах четыре-вектора спина

$$(3) \qquad \|u\| \sigma_\alpha = \frac{\sqrt{|g|}}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\beta S^{\gamma\delta}:$$

$$(4)\qquad m_0\|u\|\left[(u\cdot u)^2\frac{Du_\alpha}{dz}-(u\cdot u)u_\beta\frac{Du^\beta}{dz}u_\alpha\right]=$$

$$=\sqrt{|g|}\;\|u\|\sigma^\nu\left[(u\cdot u)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}\frac{D^2u^\beta}{dz}u^\gamma-\right.$$

$$\left.-3u_\delta\frac{Du^\delta}{dz}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}\frac{Du^\beta}{dz}u^\gamma-\frac{(u\cdot u)^2}{2}\epsilon_{\gamma\delta\mu\nu}R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}u^\beta u^\mu\right].$$

Уравнение (4) необходимо дополнить условием $\|u\|u_\beta\sigma^\beta = 0$ и спиновой частью уравнений Диксона

$$(5)\qquad \|u\|^3\frac{D\sigma^\alpha}{d\lambda}+\|u\|\sigma_\beta\frac{Du^\beta}{d\lambda}u^\alpha=0.$$

Если мировая линия частицы нулевая геодезическая, в уравнениях (4), (5) выражение $\|u\|\sigma_\alpha$ следует понимать в смысле (3). Если частица лишена массы покоя, в уравнении (4) следует положить $\|u\|m_0 = 0$ [9]. При движении частицы с ненулевой массой покоя в неискривленном пространстве-времени четыре-вектор спина остается постоянным и уравнение (5) отпадает.

Функция Лагранжа с высшими производными используется в механике классических частиц уже давно [10, 11]. Соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа высшего порядка называют еще уравнениями Эйлера–Пуассона. В настоящем сообщении исследуется вопрос о существовании в псевдоевклидовом пространстве инвариантных уравнений Эйлера–Пуассона третьего порядка. Локально вариационная задача определяется лагранжевой плотностью $L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v},\ \mathbf{v}')dt$ на пространстве струй второго порядка $J_2(\mathbf{R},\ \mathbf{R}^{n-1})$. Пусть $\mathbf{p}$: $T_r(\mathbf{R}^n)\to J_r(\mathbf{R},\ \mathbf{R}^{n-1})$ – локальное выражение канонической проекции пространства 1^r-скоростей $T_n(\mathbf{R}^n) = J_r(\mathbf{R},\ \mathbf{R}^n)(0)$ на многообразие $C_r(\mathbf{R}^n,\ 1)$ одномерных контактных элементов в $\mathbf{R}^n$. Отождествляя $\mathbf{R}^n$ с прямым произведением $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$, обозначим $x = (t,\ \mathbf{x})$, $u=\dot{x}=(u^0,\ \mathbf{u})$, $\dot{u},\ldots,\overset{(r)}{u}$ канонические координаты на $T_r(\mathbf{R}^n)$. В пространстве $\mathbf{R}^n$ возникает параметрически-инвариантная вариационная задача с функцией Лагранжа $\mathcal{L}(x,\ u,\ \dot{u}) = u^0L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}\circ\mathbf{p},\ \mathbf{v}'\circ\mathbf{p})$, локально определенной на $T_2(\mathbf{R}^n)$. Обозначим $\mathbf{E}$ и $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0,\ \underline{\mathcal{E}})$ выражения Эйлера–Пуассона, порождаемые соответственно функциями Лагранжа L и $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{E}_0u^0 + \underline{\mathcal{E}}.\mathbf{u} = 0$ и имеет место соотношение $\underline{\mathcal{E}}(x,\ u,\ \dot{u},\ \ddot{u}) = u^0\mathbf{E}(t,\ \mathbf{x},\mathbf{v}\circ\mathbf{p},\mathbf{v}'\circ\ \mathbf{p},\ \mathbf{v}''\circ\ \mathbf{p})$. Произвольное выражение $\mathbf{E}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}',\ \mathbf{v}'')$ тогда и только тогда является выражением Эйлера–Пуассона, если

$$(6)\qquad \mathbf{E}=\mathbf{A}.\mathbf{v}''+(\mathbf{v}'.\vec{\partial}_v)\mathbf{A}.\mathbf{v}'+\mathbf{B}.\mathbf{v}'+\mathbf{c},$$

где кососимметрическая матрица $\mathbf{A}$, матрица $\mathbf{B}$ и строка $\mathbf{c}$ зависят лишь от переменных t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}'$ и удовлетворяют известным условиям лагранжевости [12]. Морфизм Эйлера [13] E: $J_3(\mathbf{R},\ \mathbf{R}^{n-1})\to T^*(\mathbf{R}^{n-1})\otimes_{\mathbf{R}^n}T^*(\mathbf{R})$, $E(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v},\ \mathbf{v}',\ \mathbf{v}'') = \mathbf{E}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v},\mathbf{v}',\mathbf{v}'')\otimes dt$, является афинным отображением над $J_2(\mathbf{R},\ \mathbf{R}^{n-1})$. Поэтому с ним естественно ассоциируется форма Пфаффа со значениями в векторном пространстве $\mathbf{R}^{n-1*}$

$$\underline{\epsilon}=(\epsilon_i)=\mathbf{A}.d\mathbf{v}'+\underline{\kappa}\,dt,\qquad \underline{\kappa}=(\mathbf{v}'.\vec{\partial}_v)\mathbf{A}.\mathbf{v}'+\mathbf{B}.\mathbf{v}'+\mathbf{c}.$$

Форма $\underline{\epsilon}$ и контактная $T(\mathbf{R}^{n-1})$-значная форма $\theta = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\otimes(dx^i - v^idt) + \dfrac{\partial}{\partial v^i}\otimes$

$\otimes (dv^i - v'^i dt)$ порождают модуль $\mathfrak{M}(\underline{\epsilon}, \underline{\theta})$ над алгеброй дифференциальных форм на пространстве $J_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$ со значениями в векторном пространстве End $[\mathbf{R}^{n-1\,*} \oplus \oplus T(\mathbf{R}^{n-1})]$. Пусть в $\mathbf{R}^n$ действует псевдогруппа преобразований Г, порождаемая векторным полем $X = \tau\partial_t + \underline{\xi}.\vec{\partial}_x$, и пусть $X_{(r)} = X + \sum_{l=0}^{r-1} \underline{\xi}^{(l+1)} .\vec{\partial}_{v^{(l)}}$ – продолжение генератора X на пространство $J_r(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$. Инфинитезимальное условие инвариантности уравнений Эйлера–Пуассона относительно псевдогруппы Г заключается в инвариантности модуля $\mathfrak{M}(\underline{\epsilon}, \underline{\theta})$ под действием векторного поля $X_{(2)}$. Определяющие уравнения имеют вид

$$X_{(1)}(\mathbf{A}) = \underline{\Lambda}.\mathbf{A} - \mathbf{A}.\underline{\xi}^{(2)}_{,\mathbf{v}},$$

(7) $$X_{(2)}(\underline{\kappa}) = \underline{\Lambda}.\underline{\kappa} - \mathbf{A}.(\partial_t + \mathbf{v}.\vec{\partial}_x + \mathbf{v}'.\vec{\partial}_v)\underline{\xi}^{(2)} - \underline{\kappa}(\partial_t + \mathbf{v}.\vec{\partial}_x)\tau.$$

Матрица $\underline{\Lambda}$ служит неопределенным множителем. В дальнейшем инвариантность предполагается относительно псевдоортогональных преобразований.

Пусть функция Лагранжа $\mathcal{L}$ трансляционно-инвариантна. Решая уравнения в частных производных (7) совместно с условиями лагранжевости [12], можно доказать следующее.

1. В трехмерном псевдоевклидовом пространстве существует только однопараметрическое семейство инвариантных уравнений Эйлера–Пуассона третьего порядка

(8) $$\frac{m}{\|u\|^3}\,[(u\cdot u)\dot u - (\dot u\cdot u)u] = \frac{\ddot u \times u}{\|u\|^3} - 3\,\frac{\dot u\cdot u}{\|u\|^5}\,\dot u \times u.$$

Если $m = 0$, уравнение (8) алгебраически эквивалентно уравнению геодезических окружностей.

2. В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве не существует инвариантных уравнений Эйлера–Пуассона третьего порядка. В этом случае можно, однако, найти инвариантное семейство зависящих от четыре-векторного параметра $\sigma = (\sigma^0, \underline{\sigma})$ уравнений Эйлера–Пуассона

(9) $$\frac{m}{\|\sigma\|^3}\left[\frac{\dot u}{\|u\|} - \frac{\dot u\cdot u}{\|u\|^3}\,u\right] = -\frac{*\ddot u \wedge u \wedge \sigma}{\|\sigma \wedge u\|^3} + 3\,\frac{*\dot u \wedge u \wedge \sigma}{\|\sigma \wedge u\|^5}\,(\sigma \wedge \dot u)\cdot(\sigma \wedge u).$$

Сравнивая с (4), можно показать, что уравнение (9) описывает движение свободных частиц с массой покоя $m_0 = m\left[1 - \frac{(\sigma\cdot u)^2}{(\sigma\cdot\sigma)(u\cdot u)}\right]^{3/2}$ и постоянным четыре-вектором спина σ. Если $m = 0$, уравнение (9) с дополнительным условием $\sigma\cdot u = 0$ описывает движение безмассовых времениподобных частиц с постоянным четыре-вектором спина.

3. Если $m = 0$, множество интегральных линий уравнения (9) включает те геодезические окружности, при движении по которым единичный вектор четыре-скорости образует произвольный постоянный угол с выделенным направлением σ: $\left(\frac{\sigma\cdot u}{\|u\|}\right)^{\cdot} = 0$. Геодезические окружности выделяются из множества интегральных кривых уравнения (9) условиями $m = 0$,

$$\left(\frac{\sigma\cdot u}{\|u\|}\right)^{\cdot} = 0 \quad \text{и} \quad (\sigma\cdot u)\dot u \wedge u = 0.$$

4. Уравнение (8) также имеет физический смысл. Оно описывает плоское движение свободной частицы с массой покоя $m\,\|\sigma\|$ и спином $\underline{\sigma}$, ортогональным к плоскости движения. Такие движения рассматривались в [14].

Привлекая условия лагранжевости [12], можно убедиться, что не существует уравнений Эйлера–Пуассона, эквивалентных уравнению Лоренца–Дирака (2).

Функция Лагранжа для уравнения (8) неинвариантна и имеет следующий общий вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\|u\|}\left[\frac{u_2(\dot{u}_1u_0 - \dot{u}_0u_1)}{u_0u^0 + u_1u^1} - \frac{u_1(\dot{u}_2u_0 - \dot{u}_0u_2)}{u_0u^0 + u_2u^2}\right] +$$
$$+ (\dot{u}.\partial_u)f + c.u - m\|u\|,$$

где произвольная функция $f(u)$ удовлетворяет условию $u.\partial_u f = 0$. Более общим образом: пусть псевдоевклидово пространство имеет размерность больше двух и сигнатура метрики не равна двум. Тогда в нем не существует инвариантной функции Лагранжа, уравнения Эйлера–Пуассона для которой третьего порядка.

Пусть X – генератор преобразований Лоренца, задаваемый векторными параметрами $\underline{\omega}$ и β, и выражения $\mathcal{E}$, **E** соответствуют уравнению (9). Тогда $X_{(3)}(\mathbf{E}) = \underline{\omega} \times \mathbf{E} + (\beta \cdot \bar{\mathbf{v}})\mathbf{E} - (\mathbf{E}.\mathbf{v})\underline{\beta}$. Пусть X – генератор псевдоортогональных преобразований трехмерного пространства, задаваемый векторным параметром w, $X^T_{(3)}$ – его продолжение на пространство $T_3(\mathbf{R}^3)$ и выражение $\mathcal{E}$ соответствует уравнению (8). Тогда $X^T_{(3)}(\mathcal{E}) = w \times \mathcal{E}$. Отсюда заключаем, что псевдоортогональные преобразования и преобразование Лоренца не являются обобщенными преобразованиями инвариантности [13] соответствующих вариационных задач. Тем самым, предложенный метод нахождения инвариантных уравнений Эйлера–Пуассона существенно более общий, чем методы, исходящие из функции Лагранжа.

Мы показали, что уравнение Матиссона и уравнение геодезических окружностей в определенных случаях могут рассматриваться в контексте механики Остроградского и геометрии Кавагучи. Случай двухмерного пространства рассматривался в [15].

Институт прикладных проблем механики и математики
Академии наук УССР, Львов

Поступило
19 XI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wospakrik H.J.* – Phys. Rev. D, 1982, vol. 26, № 2, p. 523–526. 2. *Vanhecke F.J.* – Rev. bras. fis., 1982, vol. 126, № 2, p. 343–360. 3. *Mathisson M.* – Acta phys. Polon., 1937, vol. 6, № 3, p. 163–200. 4. *Havas P., Goldberg J.N.* – Phys. Rev., 1962, vol. 128, № 1, p. 398–414. 5. *Brachet M.E., Tirapegni E.* – Nuovo Cim., 1978, vol. 47A, № 2, p. 210–230. 6. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983. 304 с. 7. *Hill E.L.* – Phys. Rev., 1947, vol. 72, № 2, p. 143–149. 8. *Dixon W.G.* – Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1970, vol. 314, p. 499–527. 9. *Bailyn M., Ragusa S.* – Phys. Rev. D, 1977, vol. 15, № 12, p. 3543–3552. 10. *Bopp F.* – Z. Naturforsch. 1948, Bd. 3a, H. 8–11, S. 564–573. 11. *Honl H.* – Ibid., 1948, Bd. 3a, H. 8–11, S. 573–583. 12. *Мацюк Р.Я.* В сб.: Матем. методы и физ.-мех. поля. Киев, 1984, вып. 20, с. 16–19. 13. *Kolář I.* In: Proc. conf. (CSSR–GDR–Pol.) on diff. geom. and its appl. Praha, 1981, p. 117–123. 14. *Пляцко Р.М.* Эффекты эйнштейновой теории тяготения, обусловленные колебаниями и спином пробного тела.: Автореф. канд. дис. Минск, 1979. 16 с. 15. *Мацюк Р.Я.* В сб.: Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев, 1982, вып. 16, с. 84–88.