Приклад контрольного (індивідуального) завдання з навчальної дисципліни «Методи розв'язування нелінійних крайових задач» з відповіддю аспіранта

Побудувати методику розв'язування зв'язаної задачі про індукційне нагрівання довгого циліндра радіусу R:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + Q \quad (Q_J = \gamma E_\varphi^2) \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\right) - \mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

за початкових

$$T(r,0) = T_0(r), \tag{3}$$

$$H_z(r,0) = 0, r \in [R_1, R_2], \tag{4}$$

крайових умов

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \tag{5}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \beta(T - T_S) \text{ при } r = R \tag{6}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0 \tag{7}$$

та заданих на поверхні циліндра значень напруженості магнітного поля

$$H_z = H_z^0 sin(2\pi\nu_\omega t) \text{ при } r = R \tag{8}$$

Напруженість електричного поля у циліндрі за відомої напруженості магнітного поля визначаємо за формулою

$$E_\varphi = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r} \tag{9}$$

(інші компоненти напруженості електричного поля рівні 0).

Етап 1. Домножимо рівняння (1) на довільну ненульову на проміжку $[0, R]$ вагову функцію w і проінтегруємо отриману рівність по області визначення. Тоді отримаємо

$$\int_0^R \left(c\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - Q\right) w\boldsymbol{r}dr = 0 \qquad (10)$$

Зауважимо, що $\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right) w = \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}w\right) - \lambda\boldsymbol{r}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dw}{\partial r}$. Підставимо цю тотожність у (10), маємо

$$\int_0^R \left(c\boldsymbol{r}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \boldsymbol{r}Q\right) wdr =$$

$$= \int_0^R cr\frac{\partial T}{\partial t}wdr + \int_0^R \lambda\boldsymbol{r}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dw}{\partial r}dr - \int_0^R rQwdr - \left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}w\right)\Big|_{r=R} + \left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}w\right)\Big|_{r=0} =$$

$$= \int_0^R cr\frac{\partial T}{\partial t}wdr + \int_0^R r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dw}{\partial r}dr - \int_0^R rQwdr - R\cdot\beta(R)(T(R) - T_S)w(R). \qquad (11)$$

Домножимо рівняння (2) на довільну ненульову на проміжку $[0, R]$ вагову функцію w і проінтегруємо отриману рівність по області визначення. Тоді отримаємо

$$\int_0^R \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\right) - \mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) w\boldsymbol{r}dr = 0. \qquad (12)$$

Зауважимо, що $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\right) w = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}w\right) - \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}$. Підставимо цю тотожність у (12), маємо

$$\int_0^R \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}w\right) - \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r} - \boldsymbol{r}\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}w\right) dr =$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}w\right)\Big|_{r=R} - \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}w\right)\Big|_{r=0} - \int_0^R \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}dr - \int_0^R \boldsymbol{r}\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}wdr =$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}w\right)\Big|_{r=R} - \int_0^R \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}dr - \int_0^R \mu\boldsymbol{r}\frac{\partial H_z}{\partial t}wdr =$$

$$= \frac{R}{\gamma(R)}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)_R w(R) - \int_0^R \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}dr - \int_0^R \boldsymbol{r}\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}wdr. \qquad (13)$$

Замість рівнянь (1) та (2), які містили**похідну другого порядку** від шуканої функції, отримали рівності (11) і (13), які містять похідну лише **першого** порядку. При виведенні цихрівностей також вже враховано крайові умови (5), (6) і (7).

Застосовану на цьому етапі побудови розв'язку процедуру в науковій літературі називають **методом зважених залишків** (домножили вихідне рівняння на довільну вагову функцію, проінтегрували, тобто зважили з вагою w, отримане співвідношення і понизили порядок підінтегрального виразу).

Етап 2. Подамо інтервал $[0, R]$, на якому шукатимемо розв'язок, у вигляді

об'єднання множини *n* скінченних проміжків $[r_{i-1},\ r_i]$, де

$0 = r_0 < r_1 \ldots < r_n = R, r_{i+1} = r_0 + i \cdot R/n; i = 1,2,\ \ldots,\ n$. Будемо називати ці

проміжки надалі скінченними елементами. Тоді рівняння (11) можна записати так:

$$\int_0^R cr\frac{\partial T}{\partial t}wdr + \int_0^R r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dw}{\partial r}dr - \int_0^R rQwdr - R \cdot \beta(R)(T(R) - T_S)w(R) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{r_{i-1}}^{r_i} c\boldsymbol{r}\frac{\partial T}{\partial t}wdr + \sum_{i=1}^{n}\int_{r_{i-1}}^{r_i} \lambda\boldsymbol{r}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dw}{\partial r}dr - \sum_{i=1}^{n}\int_{r_{i-1}}^{r_i} Qw\boldsymbol{r}dr - \beta(T_n - T_S)w_n\boldsymbol{r_n},$$

де $T_n = T(r_n,\ t), w_n = w(r_n)$.

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{r_{i-1}}^{r_i} c\frac{\partial T}{\partial t}w\boldsymbol{r}dr + \sum_{i=1}^{n}\int_{r_{i-1}}^{r_i} \lambda\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}\boldsymbol{r}dr - \sum_{i=1}^{n}\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)^2 wdr - \beta(T_n - T_S)w_n\boldsymbol{r_n}$$

Рівняння (13) можна записати так:

$$\frac{R}{\gamma(R)}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)_R w(R) - \int_0^R \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial w_1}{\partial r}dr - \int_0^R \mu\boldsymbol{r}\frac{\partial H_z}{\partial t}wdr =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}dr + \sum_{i=1}^{n}\int_{r_{i-1}}^{r_i} \boldsymbol{r}\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}wdr - \frac{\boldsymbol{r_n}}{\gamma_n}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)_n w_n,$$

де $T_n = T(r_n,\ t)$, $w_n = w(r_n), H_{z_n} = H_z(r_n,\ t)$.

Введемо апроксимацію як шуканої, так і вагової функції на кожному із скінчених елементів у вигляді

$$T(r) = N_{i-1}(r) \cdot T_{i-1} + N_i(r) \cdot T_i, \tag{14}$$

$$w(r) = N_{i-1}(r) \cdot w_{i-1} + N_i(r) \cdot w_i, \tag{15}$$

$$H_z(r) = N_{i-1}(r) \cdot H_{z_{i-1}} + N_i(r) \cdot H_{z_i}, \tag{16}$$

де функції розкладу приймемо такими

$$N_{i-1} = \frac{r_i - r}{r_i - r_{i-1}}, N_i = \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}. \tag{17}$$

$$\frac{dN_{i-1}}{dr} = \frac{-1}{r_i - r_{i-1}}, \frac{dN_i}{dr} = \frac{1}{r_i - r_{i-1}}.$$

Підставимо подання (14), (15) та (16) у рівняння. Тоді для довільного скінченного елемента $i = 1,\ 2,\ \dots, n$матимемо

$$\int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} \boldsymbol{\lambda} \frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dr}} \frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{dr}} \boldsymbol{rdr} = \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} \lambda \left(\frac{dN_{i-1}}{dr} T_{i-1} + \frac{dN_i}{dr} T_i \right) \left(\frac{dN_{i-1}}{dr} w_{i-1} + \frac{dN_i}{dr} w_i \right) \boldsymbol{r} dr =$$

$$= \int_{r_{i-1}}^{r_i} \lambda \left[\left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dr} \right)^2 T_{i-1} + \frac{dN_{i-1}}{dr} \frac{dN_i}{dr} T_i \right) w_{i-1} + \left(\frac{dN_{i-1}}{dr} \frac{dN_i}{dr} T_{i-1} + \left(\frac{dN_i}{dr} \right)^2 T_i \right) w_i \right] \boldsymbol{r} dr =$$

$$= w_{i-1} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \lambda \left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dr} \right)^2 T_{i-1} + \frac{dN_i}{dr} \frac{dN_{i-1}}{dr} T_i \right) \boldsymbol{r} dr + w_i \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(\frac{dN_{i-1}}{dr} \frac{dN_i}{dr} T_{i-1} + \left(\frac{dN_i}{dr} \right)^2 T_i \right) \boldsymbol{rdr} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \int_{r_{i-1}}^{r_i} \lambda \begin{pmatrix} \left(\frac{dN_{i-1}}{dr} \right)^2 & \frac{dN_i}{dr} \frac{dN_{i-1}}{dr} \\ \frac{dN_i}{dr} \frac{dN_{i-1}}{dr} & \left(\frac{dN_i}{dr} \right)^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{r} dr \begin{pmatrix} T_{i-1} \\ T_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \int_{r_{i-1}}^{r_i} \lambda \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{r}}{(r_i - r_{i-1})^2} & \frac{-\boldsymbol{r}}{(r_i - r_{i-1})^2} \\ \frac{-\boldsymbol{r}}{(r_i - r_{i-1})^2} & \frac{\boldsymbol{r}}{(r_i - r_{i-1})^2} \end{pmatrix} dr \begin{pmatrix} T_{i-1} \\ T_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \lambda_c^{(i)} \begin{pmatrix} \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} & -\frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} \\ -\frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} & \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i-1} \\ T_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T_{i-1} \\ T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w_{i-1}} \\ \boldsymbol{w_i} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} [\boldsymbol{K}]^{(\boldsymbol{i})} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T_{i-1}} \\ \boldsymbol{T_i} \end{pmatrix}.$$

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \boldsymbol{cr} \frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial t}} \boldsymbol{wdr} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} c \left(N_{i-1} \dot{T}_{i-1} + N_i \dot{T}_i \right) (N_{i-1} w_{i-1} + N_i w_i) \boldsymbol{r} dr =$$

$$= \int_{r_{i-1}}^{r_i} c \left[\left({N_{i-1}}^2 \dot{T}_{i-1} + N_{i-1} N_i \dot{T}_i \right) w_{i-1} + \left(N_{i-1} N_i \dot{T}_{i-1} + {N_i}^2 \dot{T}_i \right) w_i \right] \boldsymbol{r} dr =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \int_{r_{i-1}}^{r_i} c \begin{pmatrix} {N_{i-1}}^2 N_{i-1} N_i \\ N_{i-1} N_i {N_i}^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{r} dr \begin{pmatrix} \dot{T}_{i-1} \\ \dot{T}_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \int_{r_{i-1}}^{r_i} c \begin{pmatrix} \left(\frac{r_i - r}{r_i - r_{i-1}}\right)^2 & \frac{(r_i - r)(r - r_{i-1})}{(r_i - r_{i-1})^2} \\ \frac{(r_i - r)(r - r_{i-1})}{(r_i - r_{i-1})^2} & \left(\frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}\right)^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{r} dr \begin{pmatrix} \dot{T}_{i-1} \\ \dot{T}_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T c_c^{(i)} \begin{pmatrix} \frac{3r_{i-1}^2 - 2r_{i-1}r_i - r_i^2}{12} & -\frac{r_{i-1}^2 - r_i^2}{12} \\ -\frac{r_{i-1}^2 - r_i^2}{12} & \frac{r_{i-1}^2 + 2r_{i-1}r_i - 3r_i^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_{i-1} \\ \dot{T}_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \frac{c_c^{(i)}}{12} \begin{pmatrix} 3r_{i-1}^2 - 2r_{i-1}r_i - r_i^2 & -(r_{i-1}^2 - r_i^2) \\ -(r_{i-1}^2 - r_i^2) & r_{i-1}^2 + 2r_{i-1}r_i - 3r_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_{i-1} \\ \dot{T}_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{w_{i-1}} \\ \boldsymbol{w_i} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} [\boldsymbol{L}]^{(\boldsymbol{i})} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{i-1}} \\ \dot{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{i}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q} = \gamma E_\varphi^2 = \gamma \left(-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)^2;$$

$$\int\limits_{\boldsymbol{r_{i-1}}}^{\boldsymbol{r_i}} \boldsymbol{rQwdr} = \int\limits_{\boldsymbol{r_{i-1}}}^{\boldsymbol{r_i}} \frac{\boldsymbol{r}}{\gamma}\left(\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)^2 w dr = \int\limits_{\boldsymbol{r_{i-1}}}^{\boldsymbol{r_i}} \frac{1}{\gamma}\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}H_{i-1} + \frac{dN_i}{dr}H_i\right)^2 (N_{i-1}w_{i-1} + N_i w_i) dr =$$

$$= \int\limits_{\boldsymbol{r_{i-1}}}^{\boldsymbol{r_i}} \frac{1}{\gamma}\left[\left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}H_{i-1}\right)^2 + 2\frac{dN_{i-1}}{dr}\frac{dN_i}{dr}H_{i-1}H_i + \left(\frac{dN_i}{dr}H_i\right)^2\right)(N_{i-1}w_{i-1} + N_i w_i)\right] dr =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^3 & 2\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^2 \frac{dN_i}{dr} & \left(\frac{dN_i}{dr}\right)^2 \frac{dN_{i-1}}{dr} \\ \left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^2 \frac{dN_i}{dr} & 2\left(\frac{dN_i}{dr}\right)^2 \frac{dN_{i-1}}{dr} & \left(\frac{dN_i}{dr}\right)^3 \end{pmatrix} r dr \begin{pmatrix} H_{z\,i-1}^2 \\ H_{z_{i-1}}H_{z_i} \\ H_{z\,i}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \frac{-1}{(r_i - r_{i-1})^3} & \frac{2}{(r_i - r_{i-1})^3} & \frac{-1}{(r_i - r_{i-1})^3} \\ \frac{1}{(r_i - r_{i-1})^3} & \frac{-2}{(r_i - r_{i-1})^3} & \frac{1}{(r_i - r_{i-1})^3} \end{pmatrix} r dr \begin{pmatrix} H_{z\,i-1}^2 \\ H_{z_{i-1}}H_{z_i} \\ H_{z\,i}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \frac{1}{\gamma_i} \begin{pmatrix} \frac{r_{i-1} + r_i}{2(r_{i-1} - r_i)^2} & \frac{r_{i-1} + r_i}{(r_{i-1} - r_i)^2} & \frac{r_{i-1} + r_i}{2(r_{i-1} - r_i)^2} \\ -\frac{r_{i-1} + r_i}{2(r_{i-1} - r_i)^2} & -\frac{r_{i-1} + r_i}{(r_{i-1} - r_i)^2} & -\frac{r_{i-1} + r_i}{2(r_{i-1} - r_i)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{z\,i-1}^2 \\ H_{z_{i-1}}H_{z_i} \\ H_{z\,i}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \frac{m_i}{\gamma_i n_i} \begin{pmatrix} 0.5 \;\, 10.5 \\ -0.5 \;\, -1 - 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{z\,i-1}^2 \\ H_{z_{i-1}}H_{z_i} \\ H_{z\,i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T [M]^{(i)} \begin{pmatrix} H_{z\,i-1}^2 \\ H_{z_{i-1}}H_{z_i} \\ H_{z\,i}^2 \end{pmatrix}$$

$$r_n \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{T_n} - \boldsymbol{T_S})\boldsymbol{w_n} = \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ r_n \beta T_S \end{pmatrix};$$

$$[K]^{(i)} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \lambda_i \begin{pmatrix} \left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^2 & \frac{dN_i}{dr}\frac{dN_{i-1}}{dr} \\ \frac{dN_i}{dr}\frac{dN_{i-1}}{dr} & \left(\frac{dN_i}{dr}\right)^2 \end{pmatrix} r dr = \frac{z_i \lambda_c^{(i)}}{2\, l_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

де $z_i = r_i + r_{i-1}$, $l_i = r_i - r_{i-1}$

$$[L]^{(i)} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} c_i \begin{pmatrix} (N_{i-1})^2 & N_{i-1}N_i \\ N_{i-1}N_i & (N_i)^2 \end{pmatrix} r dr = \frac{c_c^{(i)}}{12} \begin{pmatrix} 3r_{i-1}^2 - 2r_{i-1}r_i - r_i^2 - (r_{i-1}^2 - r_i^2) \\ -(r_{i-1}^2 - r_i^2) \qquad r_{i-1}^2 + 2r_{i-1}r_i - 3r_i^2 \end{pmatrix},$$

$$[M]^{(i)} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^3 & 2\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^2 \frac{dN_i}{dr} \left(\frac{dN_i}{dr}\right)^2 \frac{dN_{i-1}}{dr} \\ \left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^2 \frac{dN_i}{dr} & 2\left(\frac{dN_i}{dr}\right)^2 \frac{dN_{i-1}}{dr} \left(\frac{dN_i}{dr}\right)^3 \end{pmatrix} rdr = = \frac{m_i}{\gamma_i n_i} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix},$$

де $m_i = r_{i-1} + r_i,\ \ n_i = (r_{i-1} - r_i)^2.$

Отримаємо поелементнотакі диференціальні рівняння на шукані значення температури у вузлах скінченно-елементного поділу, записані в матрично-векторному вигляді:

i=1,	$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T [K]^{(1)} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T [L]^{(1)} \begin{pmatrix} \dot{T}_0 \\ \dot{T}_1 \end{pmatrix} +$ $+ \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T [M]^{(1)} \begin{pmatrix} H_{z\,0}^2 \\ H_{z_0} H_{z_1} \\ H_{z\,1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$
$\forall i\colon i = 2,\ \ldots, n-1,$	$\begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T [K]^{(i)} \begin{pmatrix} T_{i-1} \\ T_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T [L]^{(i)} \begin{pmatrix} \dot{T}_{i-1} \\ \dot{T}_i \end{pmatrix} +$ $+ \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T [M]^{(i)} \begin{pmatrix} H_{z\,i-1}^2 \\ H_{z_{i-1}} H_{z_i} \\ H_{z\,i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$
i=n,	$\begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T [K]^{(n)} \begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T [L]^{(n)} \begin{pmatrix} \dot{T}_{n-1} \\ \dot{T}_n \end{pmatrix} +$ $+ \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T [M]^{(n)} \begin{pmatrix} H_{z\,n-1}^2 \\ H_{z_{n-1}} H_{z_n} \\ H_{z\,n}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_n\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_n \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ r_n \beta T_s \end{pmatrix};$

Для першогоелемента:

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \frac{z_1 \lambda_1}{2\, l_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \frac{c_1}{12} \begin{pmatrix} 3r_0^2 - 2r_0 r_1 - r_1^2 & -(\,r_0^2 - r_1^2) \\ -(\,r_0^2 - r_1^2) & r_0^2 + 2r_0 r_1 - 3r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_0 \\ \dot{T}_1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \frac{m_1}{\gamma_1 n_1} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{z\,0}^2 \\ H_{z_0} H_{z_1} \\ H_{z\,1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Для i-гоелемента:

$$\begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \frac{z_i \lambda_i}{2\, l_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{i-1} \\ T_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \frac{c_c^{(i)}}{12} \begin{pmatrix} 3r_{i-1}^2 - 2r_{i-1} r_i - r_i^2 & -(\,r_{i-1}^2 - r_i^2) \\ -(\,r_{i-1}^2 - r_i^2) & r_{i-1}^2 + 2r_{i-1} r_i - 3r_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_{i-1} \\ \dot{T}_i \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} w_{i-1} \\ w_i \end{pmatrix}^T \frac{m_i}{\gamma_i n_i} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{z\,i-1}^2 \\ H_{z_{i-1}} H_{z_i} \\ H_{z\,i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для останнього елемента:

$$\begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n}\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -1 \quad 1 + r_n\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_n \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \frac{c_c^{(n)}}{12}\begin{pmatrix} 3r_{n-1}^2 - 2r_{n-1}r_n - r_n^2 - (\, r_{n-1}^2 - r_n^2) \\ -(\, r_{n-1}^2 - r_n^2) \;\; r_{n-1}^2 + 2r_{n-1}r_n - 3r_n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{T}_{n-1} \\ \dot{T}_n \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \frac{m_n}{\gamma_n n_n}\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_{z\,n-1}^2 \\ H_{z_{n-1}}H_{z_n} \\ H_{z\,n}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ r_n\beta T_s \end{pmatrix};$$

Якщо просумувати по усіх елементах рівнянь, отримаємо

$$\{w\}^T[K]_T\{T_h\} + \{w\}^T[L]\left\{\dot{T}_h\right\} + \{w\}^T[M]\{H_h\} = \{w\}^T\{f\},$$

Де

$$[K]_T = \begin{pmatrix} \frac{z_1\lambda_1}{2\,l_1} & -\frac{z_1\lambda_1}{2\,l_1} & 0 & & 0 & 0 \\ & & \frac{z_2\lambda_2}{2\,l_2} + \frac{z_3\lambda_3}{2\,l_3} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{z_1\lambda_1}{2\,l_1} & \frac{z_1\lambda_1}{2\,l_1} + \frac{z_2\lambda_2}{2\,l_2} & & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\frac{z_2\lambda_2}{2\,l_2} & \frac{z_2\lambda_2}{2\,l_2} + \frac{z_3\lambda_3}{2\,l_3} & \dots & \frac{z_{n-1}\lambda_{n-1}}{2\,l_{n-1}} + \frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n} & -\frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n} & \frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n} \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$[L] =$$

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} c_1(3r_0^2 - 2r_0r_1 - r_1^2) & -c_1(\, r_0^2 - r_1^2) & 0 & \dots & 0 & \\ -c_1\left(r_0^2 - r_1^2\right) & c_1\left(r_0^2 + 2r_0r_1 - 3r_1^2\right) + & -c_2(\, r_1^2 - r_2^2) & \dots & 0 & 0 \\ & c_2(3r_1^2 - 2r_1r_2 - r_2^2) & c_2\left(r_1^2 + 2r_1r_2 - 2r_2^2\right) + & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2(\, r_1^2 - r_2^2) & c_3(3r_2^2 - 2r_2r_3 - r_3^2) & \dots & \dots & 0 \\ & & & & c_{n-1}\left(r_{n-2}^2 + 2r_{n-2}r_{n-1} - 3r_{n-1}^2\right) + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & c_n(3r_{n-1}^2 - 2r_{n-1}r_n - r_n^2) & -c_n\left(r_{n-1}^2 - r_n^2\right) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n\left(r_{n-1}^2 - r_n^2\right) & c_n(r_{n-1}^2 + 2r_{n-1}r_n - 3r_n^2) \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$[M] =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{0.5 * m_1}{\gamma_1 n_1} & \frac{m_1}{\gamma_1 n_1} & \frac{0.5 * m_1}{\gamma_1 n_1} & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{0.5 * m_2}{\gamma_2 n_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-0.5 * m_1}{\gamma_1 n_1} & \frac{-m_1}{\gamma_1 n_1} + \frac{0.5 * m_2}{\gamma_2 n_2} & \frac{-0.5 * m_1}{\gamma_1 n_1} + \frac{m_2}{\gamma_2 n_2} & & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{-0.5 * m_2}{\gamma_2 n_2} & \frac{-m_2}{\gamma_2 n_2} + \frac{0.5 * m_3}{\gamma_3 n_3} & \frac{-0.5 * m_2}{\gamma_2 n_2} + \frac{m_3}{\gamma_3 n_3} & \dots & \frac{-m_{n-1}}{\gamma_{n-1} n_{n-1}} + \frac{0.5 * m_n}{\gamma_n n_n} & \frac{-0.5 * m_{n-1}}{\gamma_{n-1} n_{n-1}} + \frac{m_n}{\gamma_n n_n} & \frac{0.5 * m_1}{\gamma_1 n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{-0.5 * m_n}{\gamma_n n_n} & \frac{-m_n}{\gamma_n n_n} & \frac{-0.5 * m_1}{\gamma_1 n_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

$$\{f\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ r_n\beta T_s \end{pmatrix}, \{w\}^T = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}^T, \{T_h\} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix} \quad, \left\{\dot{T}_h\right\} = \begin{pmatrix} \dot{T}_0 \\ \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dots \\ \dot{T}_n \end{pmatrix}, \left\{H_{z\,h}\right\} = \begin{pmatrix} H_{z\,0}^2 \\ H_{z_0}H_{z_1} \\ H_{z\,1}^2 \\ H_{z_1}H_{z_2} \\ H_{z\,2}^2 \\ \dots \\ H_{z\,n-1}^2 \\ H_{z_{n-1}}H_{z_n} \\ H_{z\,n}^2 \end{pmatrix}$$

Внаслідок довільності вагової функції w отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$[K]_T\{T_h\}+[L]\{\dot{T}_h\}+[M]\{H_{z_h}\}=\{f\},$$

Підставимо подання (15) та (16) у рівняння. Тоді для довільного скінченного елемента $i=1,\ 2,\ \dots,n$ матимемо

$$\int_{r_i}^{r_{i-1}}\boldsymbol{\frac{r}{\gamma}\frac{\partial H_z}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}dr}=\int_{r_{i-1}}^{r_i}\lambda\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}H_{z_{i-1}}+\frac{dN_i}{dr}H_{z_i}\right)\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}w_{i-1}+\frac{dN_i}{dr}w_i\right)rdr=$$

$$=\int_{r_{i-1}}^{r_i}\lambda\left[\left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^2H_{z_{i-1}}+\frac{dN_{i-1}}{dr}\frac{dN_i}{dr}H_{z_i}\right)w_{i-1}+\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\frac{dN_i}{dr}H_{z_{i-1}}+\left(\frac{dN_i}{dr}\right)^2H_{z_i}\right)w_i\right]rdr=$$

$$=w_{i-1}\int_{r_{i-1}}^{r_i}\lambda\left(\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^2H_{z_{i-1}}+\frac{dN_i}{dr}\frac{dN_{i-1}}{dr}H_{z_i}\right)rdr+w_i\int_{r_{i-1}}^{r_i}\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\frac{dN_i}{dr}H_{z_{i-1}}+\left(\frac{dN_i}{dr}\right)^2H_{z_i}\right)rdr=$$

$$=\begin{pmatrix}w_{i-1}\\w_i\end{pmatrix}^T\int_{r_{i-1}}^{r_i}\lambda\begin{pmatrix}\left(\frac{dN_{i-1}}{dr}\right)^2&\frac{dN_i}{dr}\frac{dN_{i-1}}{dr}\\\frac{dN_i}{dr}\frac{dN_{i-1}}{dr}&\left(\frac{dN_i}{dr}\right)^2\end{pmatrix}rdr\ \begin{pmatrix}H_{z_{i-1}}\\H_{z_i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{w_{1_{i-1}}}\\\boldsymbol{w_{1_i}}\end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{K}]^{(\boldsymbol{i})}\begin{pmatrix}\boldsymbol{H_{z_{i-1}}}\\\boldsymbol{H_{z_i}}\end{pmatrix}.$$

$$\int_{r_i}^{r_{i-1}}\boldsymbol{\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}wdr}=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mu\left(N_{i-1}(x)\dot{H}_{i-1}+N_i(x)\dot{H}_i\right)(N_{i-1}(x)w_{i-1}+N_i(x)w_i)dx=$$

$$=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mu\left[\left(N_{i-1}(x)^2\dot{H}_{i-1}+N_{i-1}(x)N_i(x)\dot{H}_i\right)w_{1_{i-1}}+\left(N_{i-1}(x)N_i(x)\dot{H}_{i-1}+N_i(x)^2\dot{H}_i\right)w_{1_i}\right]dx=$$

$$=\begin{pmatrix}w_{i-1}\\w_i\end{pmatrix}^T\int_{r_{i-1}}^{r_i}c\begin{pmatrix}N_{i-1}{}^2N_{i-1}N_i\\N_{i-1}N_iN_i{}^2\end{pmatrix}rdr\ \begin{pmatrix}\dot{H}_{z_{i-1}}\\\dot{H}_{z_i}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}w_{i-1}\\w_i\end{pmatrix}^T\frac{c_c^{(i)}}{12}\begin{pmatrix}3r_{i-1}^2-2r_{i-1}r_i-r_i^2&-(r_{i-1}^2-r_i^2)\\-(r_{i-1}^2-r_i^2)&r_{i-1}^2+2r_{i-1}r_i-3r_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{H}_{z_{i-1}}\\\dot{H}_{z_i}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{w_{i-1}}\\\boldsymbol{w_i}\end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{L}]^{(\boldsymbol{i})}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\dot{H}_{z_{i-1}}}\\\boldsymbol{\dot{H}_{z_i}}\end{pmatrix}.$$

$$\frac{r_n}{\boldsymbol{\gamma_n}}\left(\boldsymbol{\frac{\partial H_z}{\partial r}}\right)_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{w_n}=\begin{pmatrix}w_{n-1}\\w_n\end{pmatrix}^T\frac{r_n}{\boldsymbol{\gamma_n}}\begin{pmatrix}0&0\\\frac{dN_{n-1}}{dr}&\frac{dN_n}{dr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{n-1}\\H_n\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}w_{n-1}\\w_n\end{pmatrix}^T\frac{r_n}{\gamma_n\,l_n}\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{n-1}\\H_n\end{pmatrix}$$

i=1,	$\begin{pmatrix}w_0\\w_1\end{pmatrix}^T[K]^{(1)}\begin{pmatrix}H_{z_0}\\H_{z_1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_0\\w_1\end{pmatrix}^T[L]^{(1)}\begin{pmatrix}\dot{H}_{z_0}\\\dot{H}_{z_1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_0\\w_1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{z_0}\\H_{z_1}\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}w_0\\w_1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};$
$\forall i\colon i=2,\ \dots,n-1,$	$\begin{pmatrix}w_{i-1}\\w_i\end{pmatrix}^T[K]^{(i)}\begin{pmatrix}H_{z_{i-1}}\\H_{z_i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_{i-1}\\w_i\end{pmatrix}^T[L]^{(i)}\begin{pmatrix}\dot{H}_{z_{i-1}}\\\dot{H}_{z_i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};$
i=n,	$\begin{pmatrix}w_{n-1}\\w_n\end{pmatrix}^T[K]^{(n)}\begin{pmatrix}H_{z_{n-1}}\\H_{z_n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_{n-1}\\w_n\end{pmatrix}^T[L]^{(n)}\begin{pmatrix}\dot{H}_{z_{n-1}}\\\dot{H}_{z_n}\end{pmatrix}+$ $+\begin{pmatrix}w_{n-1}\\w_n\end{pmatrix}^T\frac{r_n}{\gamma_nl_n}\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{z_{n-1}}\\H_{z_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_{n-1}\\w_n\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};$

Якщо просумувати по усіх елементах рівнянь, отримаємо

$$\{w\}^T[K]_H\{H_h\} + \{w\}^T[L]\left\{\dot{H}_h\right\} = \{w\}^T\{f\},$$

де

$$[K]_H = \begin{pmatrix} \frac{z_1\lambda_1}{2\,l_1} & -\frac{z_1\lambda_1}{2\,l_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{z_1\lambda_1}{2\,l_1} & \frac{z_1\lambda_1}{2\,l_1} + \frac{z_2\lambda_2}{2\,l_2} & \frac{z_2\lambda_2}{2\,l_2} + \frac{z_3\lambda_3}{2\,l_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{z_2\lambda_2}{2\,l_2} & \frac{z_2\lambda_2}{2\,l_2} + \frac{z_3\lambda_3}{2\,l_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{z_{n-1}\lambda_{n-1}}{2\,l_{n-1}} + \frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n} - \frac{r_n}{\gamma_n\,l_n} & -\frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n} + \frac{r_n}{\gamma_n\,l_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n} & \frac{z_n\lambda_n}{2\,l_n} \end{pmatrix}$$

$$\{H_h\} = \begin{pmatrix} H_{z_0} \\ H_{z_1} \\ H_{z_2} \\ \cdots \\ H_{z_n} \end{pmatrix}, \left\{\dot{H}_h\right\} = \begin{pmatrix} \dot{H}_{z_0} \\ \dot{H}_{z_1} \\ \dot{H}_{z_2} \\ \cdots \\ \dot{H}_{z_n} \end{pmatrix}$$

Внаслідок довільності вагової функції w:

$$[K]_H\{H_h\} + [L]\left\{\dot{H}_h\right\} += \{f\}.$$

Отримуємоясистемуязвичайнихядиференціальнихярівнянь:я

$$[K]_H\{H_h\} + [L]\left\{\dot{H}_h\right\} = \{f\}.$$

$$[K]_T\{T_h\} + [L]\left\{\dot{T}_h\right\} + [M]\{H_{z_h}\} = \{f\},$$

відносноязначеньятемпературияя$\{T_h\}$іянапруженостіямагнітногояполяя$\{H_h\}$яуя вузлахяподілу.яя

Задачуя Кошіярозв’язуємоязявикористаннямясім’їяпрости. яоднокрокови. я багатопараметрични. яалгор, тмів,явідом, . яякяметодяЗенкев, ча-Вуда.яПр, я цьомуя залежностія електро- із, чн, . я ія тепло- із, чн, . я . арактер, ст, кя відя температур, ,яаятакожязалежностіяіндукціїямагнітногояполяявідянапруженостія апрокс, муємоя інтерполяційн, м, я сплайнам, ,я побудован, м, я ная основія реальн, . якр, в, . ,яякіяоп, суютьяповедінкуятілаявяелектромагнітномуяполі.

я