ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА НАН УКРАЇНИ

Відділ диференціальних рівнянь і теорії функцій
Лабораторія математичної фізики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІППММ ім. Я. С. Підстригача
НАН України, академік НАН України
________________Роман КУШНІР

Протокол від «29»серпня 2024 року № 9

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

СУЧАСНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

/код і назва навчальної дисципліни/

III рівень, доктор філософії

/рівень вищої освіти/

вид дисципліни ____обов'язкова____
(обов'язкова / за вибором)

мова викладання ____українська____

галузь знань ____11 Математика та статистика____
/шифр і назва/

спеціальність ____113 Прикладна математика____
/шифр і назва /

Львів – 2024 рік

Робоча програма з навчальної дисципліни «Сучасні методи розв'язування крайових задач для рівнянь із частинними похідними» для здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії.

Розробник

Зав. лаб., к. ф.-м. н., ст. н. с. Михайло СИМОТЮК

"24" 06 2024 р.

1. Структура навчальної дисципліни

Найменування показників	**Всього годин**
Кількість кредитів/год.	4
Усього годин аудиторної роботи, у т.ч.:	60
• лекційні заняття, год.	30
• семінарські заняття, год.	30
• практичні заняття, год.	-
• лабораторні заняття, год.	-
Усього годин самостійної роботи, у т.ч.:	60
Екзамен	

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

2.1. Мета вивчення навчальної дисципліни

Мета вивчення дисципліни полягає у формуванні знань у молодих науковців про сучасні методи розв'язування крайових задач для рівнянь із частинними похідними і оволодінні ними практичних навиків для побудови й обґрунтування формул для розв'язків таких задач у різних функціональних просторах.

2.2. Завдання навчальної дисципліни

У результаті вивчення дисципліни аспірант повинен оволодіти такими знаннями та навиками:

1) знати основні задачі для рівнянь із частинними похідними, які моделюють реальні природничі процеси;
2) ефективно застосовувати асимптотичні методи та методи функцій Гріна для розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь;
3) уміти залучати методи характеристик, інтегральних перетворень, рядів Фур'є, потенціалів для побудови розв'язків крайових задач для рівнянь із частинними похідними;
4) використовувати методи математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, алгебри для встановлення оцінок розв'язків крайових задач у різних функціональних просторах;
5) уміти застосовувати результати метричної теорії чисел для вирішення проблеми малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків некласичних (багатоточкових, нелокальних) задач для рівнянь із частинними похідними.

Вивчення навчальної дисципліни передбачає формування та розвиток у аспірантів компетентностей:

загальних:

1) знання сучасних методів проведення досліджень у теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними;
2) критичний аналіз, оцінка і синтез нових та складних ідей;
3) уміння ефективно спілкуватися з широкою науковою спільнотою та громадськістю в питаннях теоретичної математики;
4) наполегливість у досягненні мети;

5) здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися впродовж життя, відповідальність за навчання інших;
6) соціальна відповідальність за результати прийняття стратегічних рішень;
7) ініціювання оригінальних дослідницьких проектів;
8) лідерство та здатність як до автономної, так і до командної роботи під час реалізації проектів.

фахових:
1) знання і розуміння сучасних наукових теорій і методів у теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними; вміння їх ефективно застосовувати для аналізу природничих процесів, систем та явищ;
2) здатність ефективно застосовувати аналітичні методи аналізу та математичного моделювання складних процесів та систем, виконувати комп'ютерні експерименти при проведенні наукових досліджень;
3) здатність інтегрувати знання з інших дисциплін, застосовувати системний підхід та враховувати нетехнічні аспекти при розв'язанні науково-прикладних задач і виконанні досліджень;
4) здатність розробляти та реалізовувати проекти, включаючи власні дослідження, які дають можливість переосмислювати наявні чи створювати нові знання, а також розв'язувати складні задачі в галузі математичного, числового та комп'ютерного моделювання.

Результати навчання даної дисципліни деталізують такі **програмні результати навчання:**

1. здатність застосовувати методи характеристик, інтегральних перетворень, рядів Фур'є, потенціалів для побудови розв'язків крайових задач для рівнянь із частинними похідними;
2. уміти залучати методи характеристик, інтегральних перетворень, рядів Фур'є, потенціалів для побудови розв'язків крайових задач для рівнянь із частинними похідними;
3. вміти залучати методи математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, алгебри для встановлення оцінок розв'язків крайових задач у різних функціональних просторах;
4. уміти застосовувати результати метричної теорії чисел для вирішення проблеми малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків некласичних (багатоточкових, нелокальних) задач для рівнянь із частинними похідними;
5. здатність обрати раціональний метод знаходження розв'язків і побудови алгоритмів розв'язання сформульованих задач;
6. здатність продемонструвати поглиблені знання у вибраній спеціалізації;
7. здійснювати пошук, аналізувати і критично оцінювати інформацію з різних наукових джерел;
8. самостійно планувати й виконувати дослідження, а також оцінювати отримані результати;
9. ефективно працювати як індивідуально, так і у складі команди;
10. поєднувати теорію і практику, а також приймати рішення та виробляти стратегію діяльності для вирішення завдань спеціалізації з урахуванням загальнолюдських цінностей, суспільних, державних та виробничих інтересів;

11. самостійно виконувати наукові дослідження та застосовувати дослідницькі навички за професійною тематикою;
12. застосовувати системний підхід під час проведення досліджень задач з обраної спеціалізації;
13. аргументувати вибір методів розв'язування спеціалізованої задачі, критично оцінювати отримані результати та захищати прийняті рішення.

3. Опис навчальної дисципліни

3.1. Лекційні заняття

№ п/п	Найменування тем	Кількість годин
1.	Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Власні значення і власні функції крайової задачі для диференціального рівняння. Функція Гріна крайової задачі та її властивості.	2
2.	Асимптотична поведінка власних значень і власних функцій для великих за модулем значень спектрального параметра. Розвинення за власними функціями крайової задачі. Обгрунтування методу Фур'є.	4
3.	Математичні моделі, які описуються задачами для гіперболічних, параболічних і еліптичних рівнянь. Моделі коливних процесів: малі поперечні коливання струни, малі коливання мембрани, малі повздовжні коливання стержня, електричні коливання у провідниках, поширення звукових хвиль. Моделі поширення тепла та дифузії: рівняння теплопровідності для стержня, рівняння дифузії. Моделі стаціонарних процесів: потенціальний рух нестисливої рідини, стаціонарне температурне поле, рівняння електростатики, магнітостатики, рівняння Лапласа в ортогональній системі координат.	4
4.	Рівняння з частинними похідними другого порядку: зведення рівнянь з двома незалежними змінними до канонічного вигляду за допомогою методу характеристик, зведення до канонічного вигляду рівнянь з багатьма незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами. Поняття коректності задач для рівнянь з частинними похідними. Задача Коші в класі аналітичних функцій, метод степеневих рядів, теорема Коші-Ковалевської.	2
5.	Методи розв'язування задач для гіперболічних рівнянь. Задачі Коші, Гурса, Дарбу для хвильового рівняння. Формули Кірхгофа, Пуассона, Д'Аламбера розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.	2
6.	Метод відокремлення змінних та методи інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа розв'язування мішаних крайових задач з однорідними і неоднорідними крайовими умовами для гіперболічних рівнянь.	2
7.	Методи розв'язування задач для параболічних рівнянь. Принцип максимуму в обмеженій і необмеженій області, єдиність	2

	розв'язку задачі Коші. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності. Формула Пуассона. Існування і неперервна залежність розв'язку задачі Коші для параболічних рівнянь від вхідних даних. Мішані задачі для параболічних рівнянь.	
8.	Операторні рівняння. Крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь: для рівняння типу "рівняння Пуассона", для рівняння типу "рівняння коливання струни", для рівнянь з малим параметром. Принцип Каччіопполлі-Банаха. Сингулярні крайові задачі.	2
9.	Проблема малих знаменників у задачах для рівнянь із частинними похідними.	2
10.	Наближення дійсних чисел раціональними дробами. Діофантові наближення на многовидах.	2
11.	Оцінки мір виняткових множин гладких функцій. Міра Лебега, фрактальні міри та розмірність Гаусдорфа. Лема Бореля-Кантеллі. Метричні оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків крайових задач для рівнянь із частинними похідними.	2
12.	Методи розв'язування задач для еліптичних рівнянь. Фундаментальні розв'язки. Перша і друга формули Ґріна. Гармонічні функції та їх властивості, принцип екстремуму для гармонічних функцій. Перетворення Кельвіна гармонічних функцій.	2
13.	Функції Ґріна для задач Діріхле, Неймана і третьої крайової задачі. Задача Діріхле у крузі та кулі. Використання рядів та конформних відображень. Теорія потенціалу: об'ємний потенціал, потенціал простого шару, потенціал подвійного шару. Застосування потенціалів до розв'язування крайових задач.	2
	Усього годин	**30**

3.2. Семінарські заняття

№ п/п	**Найменування тем**	**Кількість годин**
1.	Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Власні значення і власні функції крайової задачі для диференціального рівняння. Функція Гріна крайової задачі та її властивості.	2
2.	Асимптотична поведінка власних значень і власних функцій для великих за модулем значень спектрального параметра. Розвинення за власними функціями крайової задачі. Обґрунтування методу Фур'є.	4
3.	Математичні моделі, які описуються задачами для гіперболічних, параболічних і еліптичних рівнянь. Моделі коливних процесів: малі поперечні коливання струни, малі коливання мембрани, малі повздовжні коливання стержня, електричні коливання у провідниках, поширення звукових хвиль. Моделі поширення тепла та дифузії: рівняння теплопровідності для стержня, рівняння дифузії. Моделі	4

	стаціонарних процесів: потенціальний рух нестисливої рідини, стаціонарне температурне поле, рівняння електро-статики, магнітостатики, рівняння Лапласа в ортогональній системі координат.	
4.	Рівняння з частинними похідними другого порядку: зведення рівнянь з двома незалежними змінними до канонічного вигляду за допомогою методу характеристик, зведення до канонічного вигляду рівнянь з багатьма незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами. Поняття коректності задач для рівнянь з частинними похідними. Задача Коші в класі аналітичних функцій, метод степеневих рядів, теорема Коші-Ковалевської.	2
5.	Методи розв'язування задач для гіперболічних рівнянь. Задачі Коші, Гурса, Дарбу для хвильового рівняння. Формули Кірхгофа, Пуассона, Д'Аламбера розв'язку задачі Коші для рівняння коливань.	2
6.	Метод відокремлення змінних та методи інтегральних пере-творень Фур'є та Лапласа розв'язування мішаних крайових задач з однорідними і неоднорідними крайовими умовами для гіперболічних рівнянь.	2
7.	Методи розв'язування задач для параболічних рівнянь. Прин-цип максимуму в обмеженій і необмеженій області, єдиність розв'язку задачі Коші. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності. Формула Пуассона. Існування і неперервна залежність розв'язку задачі Коші для параболічних рівнянь від вхідних даних. Мішані задачі для параболічних рівнянь.	2
8.	Операторні рівняння. Крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь: для рівняння типу "рівняння Пуассона", для рівняння типу "рівняння коливання струни", для рівнянь з малим параметром. Принцип Каччіопполлі-Банаха. Сингуляр-ні крайові задачі.	2
9.	Проблема малих знаменників у задачах для рівнянь із частин-ними похідними.	2
10.	Наближення дійсних чисел раціональними дробами. Діофан-тові наближення на многовидах.	2
11.	Оцінки мір виняткових множин гладких функцій. Міра Лебега, фрактальні міри та розмірність Гаусдорфа. Лема Бореля-Кантеллі. Метричні оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків крайових задач для рівнянь із частинними похідними.	2
12.	Методи розв'язування задач для еліптичних рівнянь. Фунда-ментальні розв'язки. Перша і друга формули Ґріна. Гармонічні функції та їх властивості, принцип екстремуму для гармонічних функцій. Перетворення Кельвіна гармонічних функцій.	2
13.	Функції Ґріна для задач Діріхле, Неймана і третьої крайової задачі. Задача Діріхле у крузі та кулі. Використання рядів та конформних відображень. Теорія потенціалу: об'ємний потенціал, потенціал простого шару, потенціал подвійного щару. Застосування потенціалів до розв'язування крайових задач.	2
	Усього годин	**30**

3.3. Самостійна робота

№ п/п	Зміст роботи	Кількість годин
1.	Індивідуальне науково-дослідне завдання	10
2.	Підготовка до заліку та іспиту	20
	Усього годин	**30**

4. Оцінювання результатів засвоєння дисципліни

4.1. Урахування контрольно-моніторингових завдань

№	вид завдання	відсоток
1	Виконання завдань на семінарських заняттях	25%
2	Виконання індивідуального науково-дослідного завдання	25%
3	Екзамен	50%

4.2. Загальна шкала оцінювання

При оцінюванні використовуються критерії згідно з Положенням про рейтингове оцінювання досягнень здобувачів вищої освіти в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України від 9.11.2016 http://iapmm.lviv.ua/aspirant/polozhennya_ro_K.pdf

5. Література

1. *Бокало М.М.* Рівняння математичної фізики (курс лекцій). – Львів [електронний ресурс], https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/11/RMF_Lektsii.pdf
2. *Бугрій О.М.* Методичні рекомендації до вивчення курсу “Рівняння математичної фізики”. – Львів: ЛНУ, 2008.
3. *Вірченко Н.О.* Основні методи розв’язання задач математичної фізики. – К.: Інрес, Воля, 2006. – 332 с.
4. *Вакал Є.С., Ловейкін А.В.* Методи математичної фізики в прикладах і задачах: навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. – К.: Видавець Кравченко Я.О., 2020. – 188 с.
5. *Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Пічкур В.В., Харченко І.І.* Диференціальні рівняння, варіаційне числення та їх застосування.. Навч. посіб.. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 271.
6. *Гой Т.П., Махней О.В., Негрич М.П., Симотюк М.М.*. Практикум з диференціальних рівнянь. Ч. 2. Диференціальні рівняння вищих порядків, системи диференціальних рівнянь: навч. посібн. – Івано-Франківськ: Голіней, 2019. – 176 с.
7. *Каленюк П.І., Нитребич З.М., Ільків В.С., Симотюк М.М.* Лінійні інтегральні задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2020. – 214 с.
8. *Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Мельничук Л.М.* Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі. – Чернівці: Видавничий дім "Родовід", 2016. – 212 с.
9. *Перестюк М.О., Маринець В.В., Рего В.Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам’янець-Подільський: Аксіома, 2012. – 252 с.

10. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. –416 с.
11. *Самойленко В.Г., Конет І.М.* Рівняння математичної фізики: навч. посібн. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2014. – 283 с..
12. *Borodzik M., Goldstein P., Rybka P., Zatorska-Goldstein A.* Problems on Partial Differential Equations-Springer International Publishing (2019).
13. *Lorenzi Luca, Rhandi Abdelaziz.* Semigroups of Bounded Operators and Second-Order Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations. – CRC Press (2020).
14. *Olver Peter J.* Introduction to Partial Differential Equations. Instructor's Solution Manual – Springer (2020).
15. *Sobolev S. L.* Some applications of functional analysis in mathematical physics, American Mathematical Society, 2008, Series Translations of mathematical monographs, Vol. 90, 3rd ed, 286 pp.
16. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of Mathematical Physics, Dover Publ. 2011, 780 p.
17. *Vladimirov V.S.* Methods of the Theory of Generalized Functions, CRC Press, 2002, Series "Analytical Methods and Special Functions", Ed. 1, 327 p.