

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

Відділ теорії фізико-механічних полів



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІППМ ім. Я. С. Підстригача НАН
України, академік НАН України

 Роман КУШНІР

Протокол від «29» серпня 2024 року №9

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Методи розв'язування нелінійних крайових задач

/код і назва навчальної дисципліни /

Третій рівень, доктор філософії

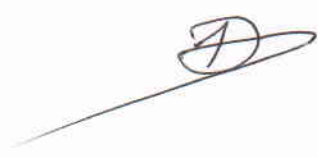
/рівень вищої освіти/

вид дисципліни _____ обов'язкова _____
(обов'язкова / за вибором)
мова викладання _____ українська _____
спеціальність _____ 113 Прикладна математика _____
/шифр і назва /
галузь знань _____ 11 Математика та статистика _____
/шифр і назва/

Львів–2024 рік

Робоча програма з навчальної дисципліни "Математичне та комп'ютерне моделювання
нелінійних процесів"
для здобувачів освіти ступеня доктора філософії

Розробник:
пр. н. с., д. ф.-м. н., ст. н. с.



Богдан ДРОБЕНКО

"27" 06 2024 р.

1. Структура навчальної дисципліни

Найменування показників	Всього годин	
	Денна форма навчання	Заочна форма навчання
Кількість кредитів/год.	4	–
Усього годин аудиторної роботи, у т. ч.:	60	–
• лекційні заняття, год.	30	–
• семінарські заняття, год.	30	–
• практичні заняття, год.	–	–
• лабораторні заняття, год.	–	–
Усього годин самостійної роботи, у т. ч.:	60	–
Екзамен	–	–

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

2.1. Мета вивчення навчальної дисципліни

Метою вивчення дисципліни є оволодіння та розуміння молодими науковцями знань і навичок, необхідних для побудови математичних моделей складних нелінійних систем і процесів, ознайомлення з основними положеннями, загальними підходами та методами математичного та комп'ютерного моделювання.

2.2. Завдання навчальної дисципліни відповідно до освітньої програми

В результаті вивчення дисципліни студент повинен:

- засвоїти основні положення математичного моделювання;
- вміти будувати лінійні й нелінійні математичні моделі процесів тепло-масо-перенесення, електродинаміки, деформування, поширення хвиль в нелінійних середовищах;
- розуміти межі застосування лінійних і нелінійних математичних моделей;
- бути здатним обирати раціональний метод знаходження розв'язків і будувати алгоритм розв'язування сформульовані задачі, а також розробити відповідне програмне забезпечення для комп'ютерного моделювання;
- орієнтуватись в можливостях вже розроблених програмних комплексів для комп'ютерного моделювання нелінійних процесів і вміти користуватись хоча б одним з них;
- вміти провести обчислювальний експеримент і проаналізувати його результати.

Вивчення навчальної дисципліни передбачає формування та розвиток в аспірантів компетентностей:

загальних:

- 1) знання сучасних методів математичного, числового й комп'ютерного моделювання нелінійних процесів;
- 2) критичний аналіз, оцінка і синтез нових та складних ідей;
- 3) уміння ефективно спілкуватися з широкою науковою спільнотою та громадськістю в питаннях прикладної математики;
- 4) наполегливість у досягненні мети;
- 5) здатність самостійно розвиватися і вдосконалюватися упродовж життя, відповідальність за навчання інших;

- 6) соціальна відповідальність за результати прийняття стратегічних рішень;
- 7) ініціювання оригінальних дослідницько-інноваційних комплексних проектів;
- 8) лідерство та здатність як до автономної, так і до командної роботи під час реалізації проектів;

фахових:

- 1) знання про тенденції розвитку і найбільш важливі нові розробки в області математичного числового та комп'ютерного моделювання складних нелінійних процесів і систем, а також суміжних областей;
- 2) знання і розуміння сучасних наукових теорій і методів, вміння їх ефективно застосовувати для синтезу та аналізу складних процесів, систем та явищ;
- 3) знання про тенденції розвитку і найважливіші нові розробки в області математичного, числового та комп'ютерного моделювання складних процесів, систем та явищ;
- 4) знання і розуміння сучасних наукових теорій і методів, вміння їх ефективно застосовувати для синтезу та аналізу складних процесів, систем та явищ;
- 5) здатність ефективно застосовувати аналітичні методи аналізу та математичного моделювання складних процесів та систем, виконувати комп'ютерні експерименти при проведенні наукових досліджень;
- 6) здатність інтегрувати знання з інших дисциплін, застосовувати системний підхід та враховувати нетехнічні аспекти при розв'язанні науково-прикладних задач і виконанні досліджень;
- 7) здатність розробляти та реалізовувати проекти, включаючи власні дослідження, які дають можливість переосмислювати наявні чи створювати нові знання, а також розв'язувати складні задачі в області математичного, числового та комп'ютерного моделювання.

Результати навчання даної дисципліни деталізують такі **програмні результати навчання:**

- знання та розуміння наукових й математичних принципів, що лежать в основі математичного моделювання нелінійних процесів, систем та явищ;
- професійні знання основних закономірностей кількісного опису процесів в рамках моделей тепло-масо-перенесення, електродинаміки, деформування, поширення хвиль в нелінійних середовищах; алгоритмів та їх програмної реалізації при дослідженнях за допомогою обчислювального експерименту;
- здатність продемонструвати знання сучасних числових методів розв'язування крайових задач;
- здатність обрати раціональний метод знаходження розв'язків і побудувати алгоритм розв'язання сформульовані задачі, а також розробити відповідне програмне забезпечення для комп'ютерного моделювання;
- здатність продемонструвати поглиблені знання у вибраній спеціалізації;
- здатність продемонструвати розуміння впливу технічних рішень в суспільному, економічному і соціальному контексті;
- здійснювати пошук, аналізувати і критично оцінювати інформацію з різних джерел;
- вміння провести обчислювальний експеримент та проаналізувати його результати;
- самостійно планувати й виконувати дослідження, а також оцінювати отримані результати;
- застосовувати інформаційно-комунікаційні технології та навички програмування для розв'язання задач математичного моделювання складних процесів, систем та явищ;
- ефективно працювати як індивідуально, так і у складі команди;
- поєднувати теорію і практику, а також приймати рішення та виробляти стратегію діяльності для вирішення завдань спеціалізації з урахуванням загальнолюдських цінностей, суспільних, державних та виробничих інтересів;
- самостійно виконувати наукові дослідження та застосовувати дослідницькі навички за

професійною тематикою;

- застосовувати системний підхід, інтегруючи знання з інших дисциплін та враховуючи не-технічні аспекти, підчас розв'язання задач обраної спеціалізації та проведення досліджень;
- самостійно змодельовати систему (явище) та їх елементи з урахуванням усіх аспектів поставленої задачі;
- аргументувати вибір методів розв'язування спеціалізованої задачі, критично оцінювати отримані результати та захищати прийняті рішення;

3. Опис навчальної дисципліни

3.1. Лекційні заняття

<i>№ п/п</i>	<i>Найменування розділів, тем</i>	<i>Кількість год.</i>
1	Числові методи розв'язування нелінійних крайових задач. Метод скінченних різниць. Багатопараметричні різницеві алгоритми. Метод скінченних елементів. Метод граничних елементів.	6
2	Розв'язування нелінійної нестационарної задачі теплопереносу з допомогою методу скінченних елементів і сімейства однокрокових багатопараметричних різницевих алгоритмів 1-го та 2-го порядку. Використання просторових апроксимацій вищого порядку точності.	4
3	Модельовання процесів виникнення, розгортання і гасіння пожежі та процесів термообробки конструктивних елементів. Врахування нелінійної поведінки тіл при нагріванні-охолодженні. Дослідження збіжності й точності отримуваних розв'язків. Порівняльний аналіз розв'язків в межах лінійних і нелінійних моделей. Встановлення меж застосовності моделей.	4
4	Модельовання процесу поширення електромагнітних хвиль в нелінійних за електричними й магнітними властивостями середовищах. Рівняння Максвелла. Електромагнітні поля в скінченних тілах. Феромагнітні, діелектричні тіла. Врахування намагнічування і поляризації. Чисельна апроксимація фізичних співвідношень.	4
5	Нелінійні процеси деформування. Підходи Ейлера й Лагранжа. Пружно-пластичне деформування. Залишкові напруження.	4
6	Чисельні підходи до розв'язування зв'язаних задач. Зв'язана задача теплопровідності й електродинаміки. Чисельна апроксимація фізичних співвідношень між зміщеннями електричного й магнітного полів та відповідними напруженостями й температурою.	4
7	Огляд існуючих пакетів прикладних програм. Комп'ютерне модельовання в середовищі програмного комплексу ANSYS	4

Усього 30 год.

3.2. Семінарські заняття

<i>№ п/п</i>	<i>Найменування розділів, тем</i>	<i>Кількість год.</i>
1	Визначення розподілу температури в стінці реактора за стаціонарного режиму його роботи з допомогою методу скінченних елементів. Дослідження збіжності числових розв'язків.	2
2	Визначення розподілу температури у стінці реактора в умовах перехідних процесів (пуск, зупинка) з використанням сімейства однокрокових багатопараметричних різницевого алгоритмів 1-го та 2-го порядку. Врахування термочутливості і теплообміну шляхом випромінювання.	2
3	Дослідження процесів деформування нелінійних стрижневих конструкцій. Ферма Мізеса. Порівняльний аналіз аналітичного і скінченно-елементних розв'язків.	2
4	Визначення електромагнітних, температурних і механічних полів у циліндрі за умов його термообробки за допомогою електромагнітних полів. Чисельна апроксимація фізичних співвідношень. Побудова ієрархії моделей. Врахування термочутливості. Рациональні режими індукційної термообробки феромагнітного циліндра. Порівняльний аналіз розв'язків в межах різних модельних уявлень.	8
5	Пружно-пластичне деформування балки за інтенсивного температурного навантаження в умовах пожежі. Врахування теплообміну випромінюванням і температурної залежності характеристик матеріалу.	4
6	Визначення температурних полів, а також полів переміщень, деформацій та напружень за допомогою програмного комплексу ANSYS. Визначення напруженого стану скінченного циліндра під внутрішнім тиском. Приготування дискретної моделі, розв'язування і візуалізація отриманих результатів. Формування програмного коду на мові APDL. Дослідження напруженого стану в пластинах і циліндрах з отворами. Дослідження температурних полів, переміщень, деформацій та напружень у двохшаровому циліндрі. Врахування термочутливості характеристик матеріалів.	12

Усього 30 год.

3.3. Самостійна робота

<i>№ п/п</i>	<i>Зміст роботи</i>	<i>К-сть годин</i>
1.	Виконання індивідуальних науково-дослідних завдань, к-сть/год	40
2.	Підготовка до іспиту	20

Усього 60 год.

4. Критерії оцінювання результатів навчання

Знання аспірантів оцінюються за 100-бальною шкалою на основі таких контрольних заходів, як

- проміжний контроль (виконання домашніх завдань, контрольні роботи);
 - виконання індивідуальних завдань і їх захист на семінарах;
 - виконання індивідуального наукового завдання;
 - підсумковий контроль (іспит).
-
- **Контрольні роботи:** 20% загальної оцінки;
 - **Семінарські захисти індивідуальних:** 30% загальної оцінки;
 - **Семінарський захист індивідуального наукового завдання:** 20% загальної оцінки;
 - **Іспит:** 30% загальної оцінки.
 - **Загалом** 100 балів.

Зразок індивідуального завдання №1 (15 балів)

Побудувати методика розв'язування просторово-одновимірної задачі про нагрівання довгого циліндра радіусу R з рівняння

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q \quad (1)$$

за початкових

$$T(r, 0) = T_0(r), \quad (2)$$

крайових умов

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \beta(T - T_S) \text{ при } r = R \quad (4)$$

Зразок індивідуального завдання №2 (15 балів)

Побудувати базисні функції другого порядку для одновимірного скінченного елемента з трьома вузлами. На основі цих функцій записати скінченно-елементні рівняння для стрижневого елемента, поздовжні переміщення якого описує диференціальне рівняння

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

за крайових умов

$$u|_{x=0} = 0, \quad EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = R, \quad (2)$$

де E , A – відповідно модуль Юнга і площа поперечного перерізу стрижня.

Зразок індивідуального наукового завдання (20 балів)

Дослідити напружено-деформований стан колони квадратного перерізу $0,2 \times 0,2 \text{ м}^2$ (див. рис. 1), підсилена вісьмома сталевими прутами діаметром 16 мм. Колона по всій довжині перебуває під стандартним температурним навантаженням з трьох сторін (четверта сторона ізольована). Відповідно до сценарію пожежі згідно зі стандартом ISO 834 температуру зовнішнього

середовища (температуру «псевдо-вогню») задає співвідношення

$$T_S = T_0 + 345 \log_{10}(8t + 1), \quad (1)$$

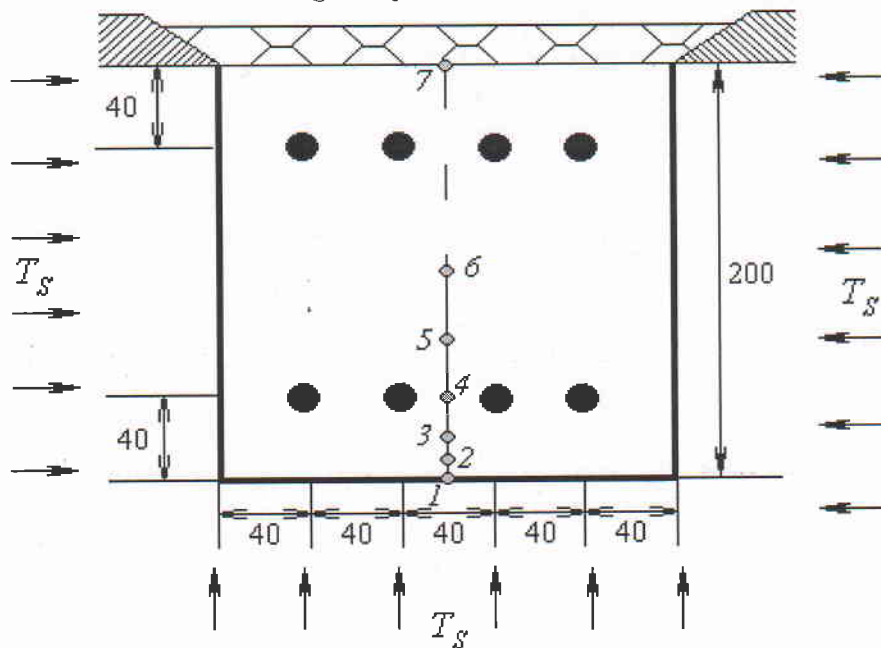


Рис. 1

Теплофізичні характеристики бетону

Густина 2500 кг/м^3 .

Таблиця 1. Залежність теплопровідності від температури

Температура, $^{\circ}\text{C}$	λ , Вт/(м·К)	Температура, $^{\circ}\text{C}$	λ , Вт/(м·К)
0	1.95	700	0.8143
100	1.77	800	0.7214
200	1.6286	900	0.659
300	1.3571	1000	0.6179
400	1.1893	1100	0.6036
500	1.045	1200	0.6179
600	0.9143		

Таблиця 2. Залежність питомої теплоємності від температури

Температура, $^{\circ}\text{C}$	c , Дж/(кг·К)	Температура, $^{\circ}\text{C}$	c , Дж/(кг·К)
0	912.5	700	1065
100	937.5	800	1075
200	962.5	900	1075
300	1001	1000	1050
400	1025	1100	1030
500	1050	1200	1030
600	1080		

Модуль Юнга бетону 30000 МПа ,

коефіцієнт Пуассона 0.17 ,

коефіцієнт температурного розширення $0,00001 \text{ 1/град}$;

коефіцієнт тепловіддачі $25 \text{ Вт/(м}^2 \text{ град)}$.

T °C	$\lambda(T)$ Вт/мК	$c(T) \cdot 10^{-6}$ Дж/м ³ /К	$E(T)$ ГПа	$\nu = \nu(T)$	$\alpha(T) \cdot 10^6$ 1/К	$\sigma_T(T)$ МПа
0	49,9	3,6	196	0,27	11,09	330
100	49,9	3,821	191,5	0,275	11,09	320
200	47,15	4,043	187	0,28	11,82	310
300	44,4	4,264	178	0,29	12,56	300
400	41,65	4,485	169	0,3	13,29	261
500	38,9	4,707	160	0,305	14,02	222
600	33,5	4,928	151	0,31	14,39	183
700	34,2	5,149	142	0,315	14,76	108
800	25,6	5,242	133	0,32	14,94	33
900	26,65	5,296	109,4	0,325	15,11	26,5
1000	27,7	5,351	85,8	0,33	15,29	20

Таблиця 3. Залежність характеристик сталі від температури (коефіцієнта теплопровідності, об'ємної теплоємності, модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона, коефіцієнта температурного розширення, межі пластичності)

Перелік контрольних запитань

1. Ідея методу скінчених елементів. Базисні функції.
2. Числові підходи до розв'язування крайових задач.
3. В чому полягає дослідження напружено-деформованого стану твердих тіл за термосилового навантаження.
4. Моделювання теплообміну тіла із довкіллям за умов температурного навантаження. Крайові умови першого, другого і третього роду. Теплообмін через випромінювання.
5. Чисельна апроксимація температурозалежних характеристик матеріалу.
6. Стаціонарні і нестаціонарні процеси на прикладі задачі теплопровідності.
7. Врахування теплообміну випромінюванням через умови конвективного теплообміну.
8. Використовуючи підхід методу зважених залишків, побудувати методику розв'язування задачі Коші, яку отримано в результаті застосування методу скінчених елементів до задачі теплопровідності. Виписати схему 2-го порядку точності.
9. Записати систему лінійних алгебричних рівнянь, отриману внаслідок використання методу скінчених елементів до визначення переміщень «ферми Мізеса», утвореної двома стрижневими елементами довжини L та площі поперечного перерізу.
10. Побудувати методику розв'язування задачі про нагрівання довгого циліндра радіусу R .
11. Побудувати методику розв'язування задачі про згин рівномірно навантаженої балки силою p . Балка защемлена на одному кінці і вільна – на іншому.
12. Побудувати матрицю жорсткості скінченного елемента для балки Ейлера-Бернуллі, виходячи з умови мінімуму потенціальної енергії.
13. З використанням скінченного елемента Ерміта побудувати методику розв'язування задачі про поширення хвилі в однорідному шарі $[0, L]$.
14. Побудувати функції форми другого порядку для одновимірного скінченного елемента з трьома вузлами. На основі цих функцій записати скінченно-елементні рівняння для стрижневого елемента.
15. Побудувати матрицю теплопровідності для ізопараметричного скінченного елемента 2-го порядку (з трьома вузлами).
16. Побудувати функції форми третього порядку для одновимірного скінченного елемента з чотирма вузлами. На основі цих функцій записати скінченно-елементні рівняння для стрижневого елемента.

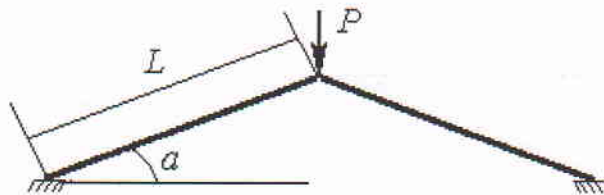
17. Використовуючи підхід методу зважених залишків, побудувати методику розв'язування задачі Коші, яку отримано в результаті застосування методу скінченних елементів до задачі теплопровідності. Виписати схему 3-го порядку точності.

18. Побудувати методику розв'язування просторово одновимірної задачі про визначення магнітного поля в довгому циліндрі радіусу R

19. Використовуючи підхід методу зважених залишків, побудувати методику розв'язування задачі Коші, яку отримано в результаті застосування методу скінченних елементів до задачі теплопровідності. Виписати схему 4-го порядку точності.

20. Записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману з використанням методу скінченних елементів для стаціонарного рівняння теплопровідності для стінки товщиною L у випадку чотирьох елементів.

21. Визначити методом скінченних елементів переміщення і напруження стрижневої конструкції, зображеної на рисунку



(довжина стрижнів $L=1$ м; площа поперечного перерізу $A=0,01\text{м}^2$; $\alpha=15^\circ$). $P=30$ кГ.

На семінарських захистах індивідуальних завдань **академічна недоброчесність** аспірантів легко виявляється. Особливо у випадку оригінальних індивідуальних завдань дослідження реальних процесів деформування елементів конструкцій за умов експлуатації, оптимізації технологічних процесів виготовлення конструкцій, оптимального проектування конструкцій з метою збільшення їхньої міцності та надійності, оцінювання експлуатаційного ресурсу конструкцій, дослідження впливу ремонтних робіт на міцність конструкцій тощо. Моделювання таких складних процесів вимагає розуміння суті досліджуваних явищ і процесів, знання різних математичних моделей, їхніх обмежень і меж застосування, відповідних методів розв'язування задачі, сформульованої на основі обраної математичної моделі, вміння працювати з пакетами програмного забезпечення, які уможливають оперативне розв'язування задачі тощо... Для виконання індивідуальних завдань, які пропонуються аспірантам, необхідно засвоїти базовий курс і застосувати отримані знання до оригінальної технічної проблеми, розв'язати яку інакше просто неможливо.

5. Навчально-методичне забезпечення

Дробенко Б.Д. Математичне моделювання нелінійних процесів. Електронний конспект лекцій, 2024. – 320 с.

6. Рекомендована література

1. Дробенко Б.Д., Будз С.Ф. Оцінка міцності та експлуатаційного ресурсу елементів енергообладнання з урахуванням деградації матеріалу, пошкоджень та технології ремонту. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021. – 368 с.
2. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. редакцією Я.Й. Бурака і Р.М. Кушніра (в 5-ти томах). Т. 4. Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл / Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. – Львів: СПОЛОМ, 2010. – 256 с.
3. Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A., Kushnir R., Nazarenko V., Eremeyev V. Advanced Structured Materials, vol. 204. 2024. Springer. Cham. – 532 p.

4. *Brebbia C.A., Walker S.* Boundary Element Techniques in Engineering. – Elsevier Science, 2016. – 210 p. ISBN: 9781483102566.
5. Encyclopedia of Thermal Stresses. Ed. by Richard B. Hetnarski. –Springer Dordrecht, Heidelberg, New York, London. – 2014. – 6644 p.
6. *Logan D.L.* A first course in the Finite Element Method. Enhanced Edition, – Cengage Learning, 2022. – 976 p.
7. *Nam H. Kim, Bhavani V. Sankar, Ashok V. Kumar.* Introduction to Finite Element Analysis and Design. – Wiley. John Wiley & Sons, LTD, 2018. – 560 p
8. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. – London: Butterworth Heinemann, 2000. – 689 p.