



УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕСКІНЧЕНОГО СУЦІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА З УРАХУВАННЯМ ПРИПОВЕРХНЕВИХ ЯВИЩ

Бойко З. В.

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,
zoya@cmm.lviv.ua

Для урахування поверхневих ефектів у твердих тілах приповерхневий шар зазвичай моделюють тонкою оболонкою, характеристики матеріалу якої відмінні від відповідних характеристик внутрішніх областей тіла [1]. Приповерхневу неоднорідність часто описують нелокальними теоріями, які передбачають залежність локального термодинамічного стану тіла у заданій точці від стану в його сусідніх точках. Цю залежність враховують або функціональними визначальними співвідношеннями просторового типу [2, 3], або шляхом збагачення простору параметрів стану градієнтами тензора деформації вищих порядків [4, 5]. Розвинутий також і інший підхід, а саме локально-градієнтний [6], який дозволяє описувати приповерхневі явища шляхом урахування процесу локального зміщення маси [7, 8].

Енергетичний підхід та методику модельного опису формування приповерхневих явищ у термопружних тілах і, зокрема, встановлення стаціонарного стану тіла, наведено у роботі [9].

У праці [10] шляхом поєднання енергетичного та термодинамічного підходів запропоновано математичну модель механіки пружних систем, у якій формування приповерхневих неоднорідностей пов'язане як з локальним зміщенням маси, так і дисипативними процесами переходу системи «пружне тіло - зовнішнє середовище» із вихідного однорідного стану до градієнтного стаціонарного.

У цій роботі співвідношення моделі механіки пружних деформівних систем [10] використано для вивчення напружено-деформованого стану нескінченного суцільного ізотропного циліндра за дії на нього осесиметричного стаціонарного навантаження.

Розглядаємо нескінченний ізотропний деформівний суцільний круговий циліндр радіуса R_0 , який віднесений до циліндричної системи координат (r, θ, z) . Вважаємо, що поверхня циліндра перебуває під впливом зовнішнього середовища, дію якого враховуємо шляхом задання на $r = R_0$ тиску p^+ та хімічного потенціалу μ^+ . Тоді компоненти тензора напружень σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} ,

векторів переміщення $\vec{u} = (u_r, 0, 0)$ та локального зміщення маси $\vec{\Pi}_M = (\Pi_{Mr}, 0, 0)$ є функції лише радіальної координати r .

За такої зовнішньої дії система рівнянь моделі [10] набуває вигляду

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u_r - \frac{\beta_1}{\Lambda} u_r &= -\frac{\beta}{\Lambda} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \Pi_{Mr}, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \Pi_{Mr} - \frac{\beta_2}{\alpha} \Pi_{Mr} &= -\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u_r. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничні умови на поверхні циліндра $r = R_0$ такі

$$\begin{aligned} -\frac{P(0)}{\rho(0)} + \beta \frac{d\Pi_{Mr}}{dr} + \beta \frac{1}{r} \Pi_{Mr} + \left(K_* - \frac{2}{3} G \right) \frac{1}{r} u_r + \Lambda \frac{du_r}{dr} \Big|_{r=R_0} &= -p^+, \\ \mu(0) - \alpha \frac{d\Pi_{Mr}}{dr} - \alpha \frac{1}{r} \Pi_{Mr} - \beta \frac{du_r}{dr} - \beta \frac{1}{r} u_r \Big|_{r=R_0} &= \mu^+, \end{aligned} \quad (2)$$

де $P(0)$, $\rho(0)$, $\mu(0)$ – тиск, густина маси та хімічний потенціал в безмежному однорідному середовищі за відсутності зовнішнього навантаження; K_* і G – модулі стиску і зсуву; α , β , β_1 , β_2 – характеристики матеріалу [10]; $\Lambda = K_* + \frac{4}{3} G$.

Граничні умови (2) слід доповнити також умовами обмеженості розв'язку у центрі циліндра.

Взаємозв'язану систему рівнянь (1) вдається звести до системи двох незв'язаних рівнянь, розв'язками яких є модифіковані функції Бесселя.

Якщо знехтувати взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси у рівняннях стану [10], то цей розв'язок суттєво спрощується і в результаті для ненульових компонент тензора напружень $\hat{\sigma}$ та хімічного потенціалу μ одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= -\frac{P(0)}{\rho(0)} + C_1 \left[\sqrt{\Lambda \beta_1} I_0 \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} r \right) - 2G \frac{1}{r} I_1 \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} r \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= -\frac{P(0)}{\rho(0)} + C_1 \left[\left(K_* - \frac{2}{3} G \right) \sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} I_0 \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} r \right) + 2G \frac{1}{r} I_1 \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} r \right) \right], \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{P(0)}{\rho(0)} + C_1 \left(K_* - \frac{2}{3} G \right) \sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} I_0 \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} r \right),$$

$$\mu = \mu(0) - C_2 \sqrt{\alpha \beta_2} I_0 \left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}} r \right), \quad (3)$$

де величини C_1 та C_2 визначаються співвідношеннями

$$C_1 = -\frac{1}{R_0 \sqrt{\Lambda \beta_1} I_0 \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} R_0 \right) - 2GI_1 \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} R_0 \right)} R_0 \left(p^+ - \frac{P(0)}{\rho(0)} \right),$$

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha \beta_2} I_0 \left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}} R_0 \right)} (\mu(0) - \mu^+). \quad (4)$$

Зазначимо, що хоча в рівняннях стану знехтувано взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси, розподілом напружень та хімічного потенціалу властива приповерхнева неоднорідність, яка зумовлена протіканням дисипативних процесів. При цьому параметри $l_1^* = \sqrt{\Lambda/\beta_1}$ та $l_2^* = \sqrt{\alpha/\beta_2}$ є характерні віддалі такої неоднорідності. Параметр l_1^* визначається співвідношенням між коефіцієнтом β_1 і модулями пружності, а також величинами $P(0)$ та $\rho(0)$, а параметр l_2^* – співвідношенням між коефіцієнтами β_2 й α .

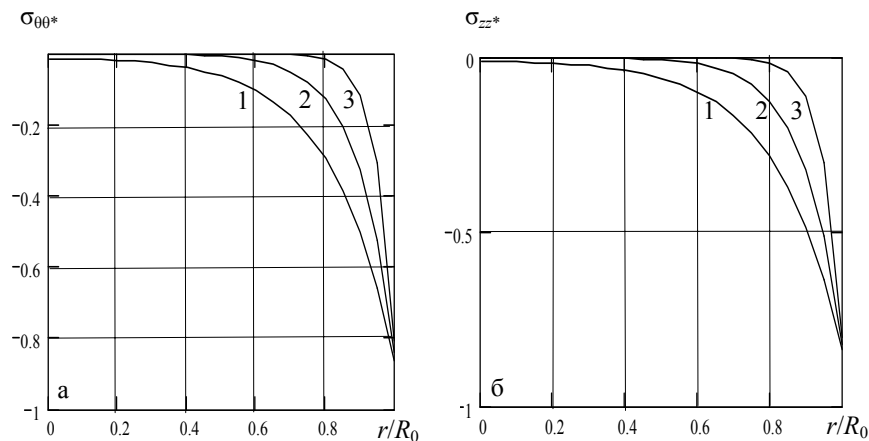


Рис. Розподіл напружень у циліндрі

Графіки, які наведені на рисунку ілюструють відповідно розподіли нормованих напружень $\sigma_{\theta\theta*} = \frac{\sigma_{\theta\theta} + P(0)/\rho(0)}{p^+ - P(0)/\rho(0)}$ (рис. а) та $\sigma_{zz*} = \frac{\sigma_{zz} + P(0)/\rho(0)}{p^+ - P(0)/\rho(0)}$

(рис. б) у циліндрі. Слід відзначити, що ця неоднорідність розподілу напружень є наслідком дисипативних процесів, які протікали в тілі при формуванні поверхні. Криві 1-3 відповідають значенням параметра $\alpha_* = 6, 10, 20$

($\alpha_* = \sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}} R_0$). Бачимо, що зі збільшенням величини α_* область приповерхневої неоднорідності зменшується.

1. *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 200 с.
2. *Eringen A. C., Edelen D. G. B.* On Nonlocal Elasticity // Int. J. Engng. Sci. – 1972. –**10**, № 3. – P. 233-248.
3. *Eringen A. C.* Nonlocal Continuum Field Theories. – Springer-Verlag, 2002. – 376 p.
4. *Аэро Е. Л., Кувишинский Е. В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. – 1960. – Т. 2, вып. 7. – С. 1399-1409.
5. *Mindlin R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // Journal of Elasticity. – 1972. –**2**, № 4. – P. 217-282.
6. *Нагірний, Т. С., Грицина О. Р., Червінка К. А.* Локально-градієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2006. – № 3. – С. 59-64.
7. *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально градієнтної термомеханіки // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1987. – № 12. – С. 19-23.
8. *Бурак Я., Чапля С., Нагірний Т.* та ін. Фізико-математичне моделювання складних систем / під ред. Я. Бурака, С. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
9. *Бурак Я. Й., Чапля С. Я.* Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ у термопружних системах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 1. – С. 39-44.
10. *Бурак Я. Й., Мороз Г. І., Бойко З. В.* Про енергетичний підхід і термодинамічні засади варіаційного формулювання крайових задач термомеханіки з урахуванням приповерхневих явищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 2. – С. 55-65.

THE STRESS-STRAINED STATE OF INFINITE CONTINUOUS CYLINDER TAKING INTO ACCOUNT NEAR-SURFACE PHENOMENA

Relationships of the proposed mathematical model of elastic deformable systems mechanics, which describes a formation of the near-surface inhomogeneities related with both a process of local displacement of mass and dissipative processes, are used for studying the stress-strained state of infinite continuous cylinder. It is established that the stress tensor components and the chemical potential describe the near-surface inhomogeneity related with dissipative processes even if

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-B-05.pdf>

interaction of deformation process and local displacement of mass in constitutive equations is ignored.