Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: АКТУАЛЬНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-NC-17.pdf

УДК 539.3

ДО ОПИСУ РОЗМІРНОГО ЕФЕКТУ МОДУЛІВ ПРУЖНОСТІ

Нагірний Т.С.[1], Червінка К.А.[2]

[1]ЦММ ІППММ ім.Я.С.Підстригача, tnagirny@yahoo.com
[2]ЛНУ ім. І.Я.Франка, k.tchervinka@gmail.com

В останні десятиліття у науковій літературі значну увагу приділяють вивченню розмірного ефекту модулів пружності. Такий інтерес обумовлений широким використанням різного роду тонких плівок, волокон, наноматеріалів. Подібні елементи характеризуються співвимірністю вкладів поверхневого та об'ємного факторів у внутрішню енергію. Принаймні один із їхніх геометричних розмірів є співвимірний із розміром області приповерхневої неоднорідності, що може суттєво впливати на механічні властивості таких тіл. Для опису деформівних твердих тіл із врахуванням подібних ефектів використовують підходи нелокальної теорії пружності та локально градієнтний підхід у термомеханіці.

У рамках локально градієнтного підходу приймають, що енергія F є функція стану, що означена в просторі температури T, хімічного потенціалу H, градієнта хімічного потенціалу $\vec\nabla H$ та тензора деформації $\hat e$. За лінійного наближення рівняння стану для напружень має вигляд

$$\hat\sigma = 2a_\mu \hat e + [a_\lambda e + a_{eh}\eta - a_{et}\theta]\hat I \tag{1}$$

де $\eta = H - H_*$, $\theta = T - T_*$ — збурення хімічного потенціалу та температури відносно їхніх відлікових значень, за які приймають зазвичай значення H_*, T_* у безмежному однорідному середовищі, матеріал якого ідентичний матеріалу тіла; $e = \hat e : \hat I$ — перший інваріант тензора деформації, $\hat I$ — одиничний тензор, $a_\mu, a_\lambda, a_{eh}, a_{et}$ — сталі.

Розв'язуючу систему рівнянь моделі у напруженнях (κ_j — сталі)

$$\vec\nabla\cdot\hat\sigma = 0\,,\ \vec\nabla\times\left[(3a_\lambda + 2a_\mu)\hat\sigma - \left(a_\lambda\sigma + 2a_\mu a_{eh}\eta - 2a_\mu a_{te}\theta\right)\hat I\right]\times\vec\nabla = 0\,,$$

$$\nabla^2\eta - \kappa_\eta^2\eta - \kappa_\sigma^2\sigma - \kappa_\theta^2\theta = 0\,,\ \nabla^2\theta = 0\,, \tag{2}$$

застосуємо до дослідження поведінки тіла під дією силового навантаження. З цією метою розглянемо одновимірну задачу (шар) та обмежимось випадком сталої температури.

Розглянемо деформівний твердий шар, що займає область $|x| \le l$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$ і навантажений на безмежності при $y \to \pm\infty$ зусиллями інтенсивності p. Приймаємо, що поверхні шару $x = \pm l$ вільні від силового навантаження і на них задано постійне ненульове значення збурення хімічного потенціалу η_a. Система рівнянь (2), записана для ненульових складових тензора напружень та хімічного потенціалу має вигляд

$$\frac{d^2\sigma_y}{dx^2} = \frac{d^2\sigma_z}{dx^2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dx^2} = b_m \frac{d^2\eta}{dx^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} - \kappa_\eta^2 \eta - \kappa_\sigma^2 \sigma = 0, \tag{3}$$

де $b_m = 4a_\mu a_{eh} / (a_\lambda + 2a_\mu)$.

Граничні умови та умови самозрівноваженості приймаємо у вигляді

$$\eta\big|_{x=\pm l} = \eta_a, \quad \vec{n} \cdot \hat{\sigma}\big|_{\pm l} = 0,$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \sigma_y dx = p, \quad \int_{-l}^{l} \sigma_z dx = 0, \quad \int_{-l}^{l} x\sigma_y dx = 0, \quad \int_{-l}^{l} x\sigma_z dx = 0, \tag{4}$$

де $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Розв’язком задачі (3), (4) є

$$\eta(x) = \eta_a + \frac{\chi}{\zeta_l}\left(\frac{\mathrm{ch}(\xi x)}{\mathrm{ch}(\xi l)} - 1\right), \quad \sigma_y(x) - p = \sigma_z(x) = \frac{b_m}{2}\frac{\chi}{\zeta_l}\left(\frac{\mathrm{ch}(\xi x)}{\mathrm{ch}(\xi l)} - \frac{\mathrm{th}(\xi l)}{\xi l}\right), \tag{5}$$

де $\xi^2 = \kappa_\eta^2 + b_m \kappa_\sigma^2$, $\chi = \dfrac{\kappa_\sigma^2 p + \kappa_\eta^2 \eta_a}{\xi^2}$, $\zeta_l = 1 - D\left(1 - \dfrac{\mathrm{th}(\xi l)}{\xi l}\right)$, $D = b_m \dfrac{\kappa_\sigma^2}{\xi^2}$.

Враховуючи співвідношення (1), для тензора деформації записуємо

$$\hat{e} = \frac{\hat{\sigma}}{2a_\mu} - \left[\frac{a_\lambda \sigma}{2a_\mu (3a_\lambda + 2a_\mu)} - \frac{a_{eh}\eta}{3a_\lambda + 2a_\mu}\right]\hat{I}$$

і на основі розв’язку (5) можна записати явний вираз компонент тензора деформації e_x, e_y.

Відомо, що коефіцієнтом пропорційності між інтенсивністю зовнішнього силового навантаження p та відносним видовженням у напрямку дії навантаження є модуль Юнга E, а „видовження” у напрямку, поперечному до напрямку дії силового навантаження, характеризується коефіцієнтом Пуассона ν

$$e_y^{el} = \frac{p}{E}, \quad e_x^{el} = -\nu \frac{p}{E}. \tag{6}$$

Зрозуміло, що під e_y^{el} та e_x^{el} розуміють відносне видовження дослідного зразка внаслідок дії силового навантаження. У рамках розглядуваної моделі ненульові деформації містять дві складові, одна з яких спричинена зовнішнім силовим навантаженням, тоді як друга — ненульовим значенням хімічного потенціалу η_a на поверхнях $x = \pm l$ шару. Враховуючи залежність компоненти e_x тензора деформації від координати x, для відносних видовжень e_y^{el} та e_x^{el}, спричинених зовнішньою силовою дією, можемо записати

$$e_y^{el} = e_y - \left(e_y\right)_{p=0}, \quad e_x^{el} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left[e_x(x) - \left(e_x(x)\right)_{p=0}\right]dx .$$

Відповідні значення деформацій становлять

$$e_x^{el} = -\frac{1}{3a_\lambda + 2a_\mu}\left(\frac{a_\lambda}{2a_\mu} - \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\xi^2}\frac{1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)}{1-D[1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)]}\right)p ,$$

$$e_y^{el} = \frac{1}{3a_\lambda + 2a_\mu}\left(\frac{a_\lambda + a_\mu}{a_\mu} + \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\xi^2}\frac{1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)}{1-D[1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)]}\right)p .$$

На основі одержаних співвідношень та (6) можна стверджувати, що

$$E = (3a_\lambda + 2a_\mu)\left[\frac{a_\lambda + a_\mu}{a_\mu} + \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\xi^2}\frac{1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)}{1-D[1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)]}\right]^{-1} ,$$

$$\nu = \left(\frac{a_\lambda}{2a_\mu} - \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\xi^2}\frac{1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)}{1-D[1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)]}\right)\left[\frac{a_\lambda + a_\mu}{a_\mu} + \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\xi^2}\frac{1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)}{1-D[1-\mathrm{th}(\xi l)/(\xi l)]}\right]^{-1} . \quad (7)$$

Відзначимо, що такі ж вирази можна отримати, розглядаючи деформацію шару, навантаженого механічними зусиллями на поверхнях $x = \pm l$.

При збільшенні товщини шару ($\xi l \to \infty$) значення E, ν прямують до

$$E_0 = (3a_\lambda + 2a_\mu)\left[\frac{a_\lambda + a_\mu}{a_\mu} + \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\kappa_\eta^2}\right]^{-1} ,$$

$$\nu_0 = \left(\frac{a_\lambda}{2a_\mu} - \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\kappa_\eta^2}\right)\left[\frac{a_\lambda + a_\mu}{a_\mu} + \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\kappa_\eta^2}\right]^{-1} .$$

Для шарів, товщини яких справджують співвідношення $\exp(\xi l) >> 1$ на основі (7) можемо записати

$$E = (3a_\lambda + 2a_\mu)\left[\frac{a_\lambda + a_\mu}{a_\mu} + \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\xi^2}\frac{1-1/(\xi l)}{1-D[1-1/(\xi l)]}\right]^{-1},$$

$$\nu = \left(\frac{a_\lambda}{2a_\mu} - \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\xi^2}\frac{1-1/(\xi l)}{1-D[1-1/(\xi l)]}\right)\left[\frac{a_\lambda + a_\mu}{a_\mu} + \frac{a_{eh}\kappa_\sigma^2}{\xi^2}\frac{1-1/(\xi l)}{1-D[1-1/(\xi l)]}\right]^{-1}.$$

На основі відомих виразів для модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона можна записати також співвідношення для інших величин, зокрема для сталих Ляме, використовуючи

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

отримуємо

$$\mu = a_\mu, \ \lambda = \left(a_\lambda - \frac{a_\lambda + 2a_\mu}{2}\frac{D[1-\operatorname{th}(\xi l)]}{1-D[1-\operatorname{th}(\xi l)]}\right)\left[1 + 3\frac{a_\lambda + 2a_\mu}{4a_\mu}\frac{D[1-\operatorname{th}(\xi l)]}{1-D[1-\operatorname{th}(\xi l)]}\right]^{-1}.$$

Таким чином, співвідношення моделі локально градієнтного деформівного твердого тіла дають змогу описувати залежність модулів пружності від розмірів конкретного тіла, а при збільшенні його розмірів порівняно із розміром області приповерхневої неоднорідності отримуємо значення модулів, що є характеристиками матеріалу.

1. *Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін.*Фізико-математичне моделювання складних систем. - Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
2. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* On size effect of mechanical properties of thermoelastic solid // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. - вип. **10.** – С. 75-83.

TO DESCRIPTION OF A SIZE EFFECT OF ELASTICITY MODULI

The model of local gradient approach in thermomechanics is used to study stress-strain relation for strained layer. The expressions of Young modulus and Poisson ratio are obtained and their dependence on the layer thickness is analyzed. It is proved that local gradient approach allows elasticity moduli size effect describing.