



УДК 539.3

КОВЗНИЙ КОНТАКТ ШТАМПА З ПРУЖНИМ КЛИНОМ

Щокотова О.М.

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, schekotova@list.ru

1. Постановка задачі. Розглядається задача про ковзний контакт штампа, що має прямолінійну основу та пружного клина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ в умовах плоскої деформації. Нижня грань $\vartheta = 0$ клина жорстко закріплена; у внутрішню частину $l_1 \leq r \leq l$ верхньої грані $\vartheta = \alpha$ під дією нормальної P та дотичної $\mu_0 P$ сил ($|\mu_0|$ – коефіцієнт тертя), а також моменту M втискається штамп. У такому разі має місце повне проковзування вздовж усієї області контакту $l_1 \leq r \leq l$, на якій нормальні та дотичні напруження пов'язані законом тертя Амонтона (Кулона). Із застосуванням метода Вінера – Гопфа побудовано точний аналітичний розв'язок задачі. Наближені розв'язки у випадку гладкого контакту знайдені раніше методами ортогональних поліномів [1] і колокацій [2].

Крайові умови задачі наступні:

$$\begin{aligned} u_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= b - \varepsilon r, \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = -\mu_0 \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} \quad (l_1 \leq r \leq l), \\ \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= 0, \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = 0 \quad (0 \leq r < l_1, \quad l < r < \infty), \\ u_r|_{\vartheta=0} &= 0, \quad u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Невідомі константи b і ε , які задають нормальне зміщення та кут повороту штампа, визначаються з умов рівноваги

$$\int_{l_1}^l \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} dr = -P, \quad \int_{l_1}^l r \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} dr = M - \frac{l+l_1}{2} P. \quad (2)$$

2. Інтегральне рівняння. Введемо невідому функцію нормальних контактних напружень та її перетворення Мелліна (G – модуль зсуву)

$$g(r) = \frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} \quad (l_1 < r < l), \quad a(s) = \int_{l_1}^l g(y) y^s dy. \quad (3)$$

Тоді нормальні переміщення та напруження на грані $\vartheta = \alpha$ подамо у вигляді інтегралів Рімана – Мелліна з невідомою густиною $a(s)$:

$$u_g|_{g=\alpha} = \frac{m-1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda(s)}{s\Delta(s)} a(s)r^{-s} ds \quad (-1 < c < 0),$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_g|_{g=\alpha} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\tau_{rg}}{2G} \Big|_{g=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s)r^{-s-1} ds,$$

$$\lambda(s) = (3m-4)\sin 2s\alpha - ms \sin 2\alpha + \mu_0 \left[\frac{(3m-4)(m-2)}{m-1} \sin^2 s\alpha - ms \left(\frac{ms}{m-1} - 2 \right) \sin^2 \alpha \right],$$

$$\Delta(s) = (3m-4)m(\cos 2s\alpha - 1) - 2m^2 s^2 \sin^2 \alpha + 8(m-1)^2, \quad (4)$$

де m – стала Пуассона.

Розв'язок (4) задовольняє всі крайові умови (1), окрім першої. Підставимо в цю умову вираз для колових переміщень із (4) з урахуванням (3). Після заїни змінних $r = le^{-\xi}$, $y = le^{-\eta}$ для нової невідомої функції $\varphi(\eta) = g(le^{-\eta})e^{-\eta}$ отримаємо інтегральне рівняння з різницеvim ядром на скінченному проміжку ($a = \ln(l/l_1)$, $s = -i\tau$)

$$\int_0^a k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq a),$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad (5)$$

$$K(z) = \frac{\lambda(-iz)}{-iz\Delta(-iz)}, \quad f(\xi) = \frac{1}{2(m-1)} \left(\frac{b}{l} - \varepsilon e^{-\xi} \right).$$

3. Розв'язання інтегрального рівняння. Використовуючи підхід роботи [3], інтегральне рівняння (5) із застосуванням метода Вінера – Гопфа зведемо до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих z_k^{\pm} ($k = 1, 2, \dots$):

$$z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{s'_k - s_n} z_k^- \lambda^k = f_n^+, \quad (6)$$

$$z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{s_k - s'_n} z_k^+ \lambda^k = f_n^- \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\beta_n^+ = K^+(is_n), \quad \beta_n^- = K^-(is'_n), \quad \tilde{\alpha}_k^+ = \alpha_k^+ e^{-(s_k - \frac{\pi k}{2\alpha})a}, \quad \tilde{\alpha}_k^- = \alpha_k^- e^{(s'_k + \frac{\pi k}{2\alpha})a},$$

$$\alpha_k^+ = \frac{s_k \Delta(s_k) K^+(is_k)}{\lambda'(s_k)}, \quad \alpha_k^- = \frac{s'_k \Delta(s'_k) K^-(is'_k)}{\lambda'(s'_k)}, \quad \lambda = e^{-\pi a/(2\alpha)},$$

$$f_n^+ = A\beta_n^+ \left(\frac{b}{IK(0)s_n} - \frac{e^{-a}\varepsilon}{K^+(-i)(s_n+1)} \right), \quad f_n^- = A\beta_n^- \left(\frac{b}{Is'_n} - \frac{\varepsilon}{K^-(-i)(s'_n+1)} \right),$$

$$K(z) = K^+(z)K^-(z), \quad K^+(z) = K(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{is'_n} \right) \left(1 + \frac{z}{i\delta_n} \right)^{-1},$$

$$K^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{is_n} \right) \left(1 - \frac{z}{i\delta_n} \right)^{-1}, \quad A = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(m-1)},$$

де s_n і s'_n – корені рівняння $\lambda(s) = 0$ із півплощин $\text{Re } s > 0$ та $\text{Re } s < 0$, δ_n – корені рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Система рівнянь (6) є регулярною системою з експоненціально спадними коефіцієнтами. Її розв'язок знаходимо у рядах за степенями малого параметра $0 < \lambda < 1$. Для коефіцієнтів рядів отримано рекурентні співвідношення. Розв'язок системи рівнянь (6) подамо у вигляді

$$z_k^\pm = \varepsilon \tilde{z}_k^\pm + (b/l)z_k^\pm. \quad (7)$$

Тоді з умов рівноваги (2) одержуємо лінійну систему рівнянь

$$a_{11}\bar{\varepsilon} + a_{12}\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad a_{21}\bar{\varepsilon} + a_{22}\bar{b} = \frac{K^+(i)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2}(1+e^{-a}) - \frac{M}{Pl} \right] \quad (8)$$

з визначеними коефіцієнтами a_{mk} ($m, k = 1, 2, \dots$), з якої знаходимо параметри $\bar{\varepsilon} = (2Gl/P)\varepsilon$ та $\bar{b} = (2G/P)b$.

4. Контактні напруження та переміщення вільної грані клина. Контактні напруження виражаються через розв'язок нескінченної системи алгебраїчних рівнянь (6) у такому вигляді:

$$\frac{\sigma_g}{2G} \Big|_{\vartheta=\alpha} = -\frac{2\varepsilon(m \cos^2 \alpha - 1)}{(m-2)\sin 2\alpha + 4\mu_0 \sin^2 \alpha} + \frac{\sqrt{2\pi}Ab}{K(0)r} +$$

$$+\sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{l_1} \frac{s_k \Delta(s_k) z_k^+}{\lambda'(s_k)} \left(\frac{r}{l_1} \right)^{-s_k-1} + \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s'_k \Delta(s'_k) z_k^-}{\lambda'(s'_k)} \left(\frac{r}{l} \right)^{-s'_k-1} \quad (l_1 < r < l). \quad (9)$$

В аналогічному вигляді отримано колові та радіальні переміщення вільної межі клина.

На рис. 1, 2 подано результати обчислень нормальних контактних напружень та колових переміщень точок грані $\vartheta = \alpha$ пружного клина з кутом

розхилу $\alpha = \pi/4$ за відсутності моменту ($M = 0$, $m = 10/3$). Суцільні криві відповідають $\mu_0 = 0.5$ (рух штампа від вершини клина), пунктирні – $\mu_0 = -0.5$ (рух штампа до вершини), штрихпунктирні – $\mu_0 = 0$ (гладкий контакт).

Розподіл безрозмірних нормальних контактних напружень $\bar{\sigma} = (l - l_1)P^{-1}\sigma_g|_{g=\alpha}$ показано на рис. 1. Криві 1 відповідають відносному розміру області контакту $l/l_1 = 2$, криві 2 – $l/l_1 = 6$.

На рис. 2 зображені безрозмірні колові переміщення $\bar{u}_g = (2G/P) \times u_g|_{g=\alpha}$, які характеризують форму деформованої верхньої грані клина у випадку $l/l_1 = 2$.

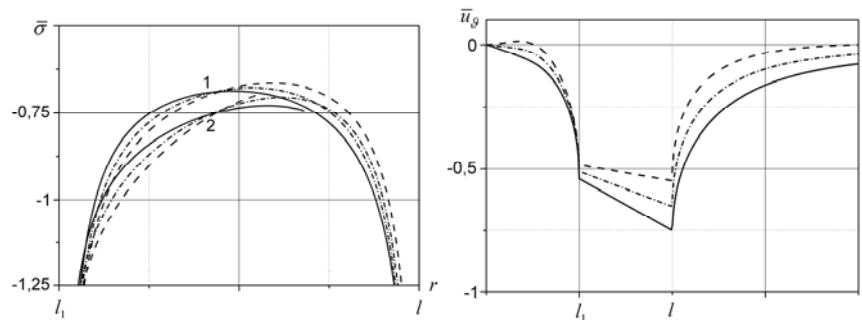


Рис. 1

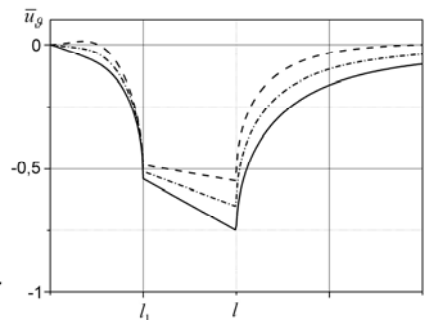


Рис. 2

На рис. 1, 2 проілюстровано вплив тертя на асиметричність розподілу контактних напружень та величину просідання і повороту штампа.

1. Лутченко С. А. О вдавливания штампов в боковую поверхность упругого основания в виде клина // Прикл. механика. – 1966. – 2, вып. 12. – С. 61-66.
2. Бронштейн М. И. Решение контактной задачи для штампа на клиновидном основании // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1968. – Вып. 4. – С. 2-4.
3. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливания кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. – 1987. – № 7. – С. 29-33.

SLIDING CONTACT OF PUNCH WITH ELASTIC WEDGE

The contact interaction of punch with rectilinear base and elastic wedge is considered. One facet of the wedge is fixed. Using the method of Wiener–Hopf the analytic solution of the problem was obtained. The distribution of contact stresses and the displacements on free boundary of the wedge were found.