

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОМУ ЦИЛІНДРІ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ЗА КУСКОВО-СТАЛОГО НОРМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ТОРЦІВ

Токовий Ю. В.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, tokovyy@iapmm.lviv.ua

При побудові аналітичних розв'язків просторових та двовимірних задач теорії пружності, як правило, використовують розвинення функцій, що задають крайові умови, у ряди за відповідними повними системами функцій однієї з просторових координат, що дає можливість відокремити змінні у ключових рівняннях цих задач або ж спростити побудову розв'язку. Однак, якщо зовнішні навантаження є розривними або кусково-сталими функціями, то розвинення їх у ряди збігаються повільно, що погіршує ефективність побудованих розв'язків, для обчислення яких потрібно враховувати велику кількість складових. Це призводить до суттєвих затрат комп'ютерного часу навіть за використання потужних сучасних обчислювальних машин. У даній роботі розвинуто методіку визначення напруженого стану пружного скінченного циліндра, що знаходиться під дією розривного нормального навантаження на торцях. Отриману з використанням методу суперпозиції ключову нескінчену систему лінійних алгебричних рівнянь зведено до регулярної системи, що значно підвищує ефективність розв'язку.

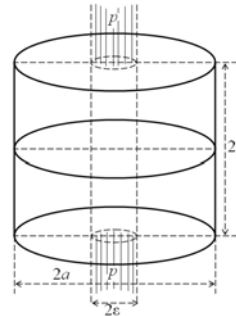


Рис. 1

Розглядаємо осесиметричну задачу теорії пружності для суцільного скінченного циліндра $0 \leq r \leq a$, $|z| \leq l$, до торців якого прикладені зовнішні нормальні навантаження, що мають сталий розподіл $-p$ у крузі радіуса $\epsilon < a$ з центром на осі циліндра і рівні нулеві за його межами $\epsilon < r \leq a$ (рис. 1). Радіальна u_r та осьова u_z складові вектора переміщень у цьому випадку визначаються з двох скалярних рівнянь Ляме

$$\mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} = 0, \quad \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

де Θ – об'ємне розширення; ∇^2 – осесиметричний оператор Лапласа; λ та μ – пружні сталі Ляме. Розв'язок рівнянь (1) будемо за крайових умов

$$\begin{aligned} \sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad r = a, \quad g(r) = \begin{cases} -p, & 0 \leq r \leq \epsilon, \\ 0, & \epsilon < r \leq a \end{cases} \\ \sigma_z = g(r), \quad \tau_{rz} = 0, \quad z = \pm l, \end{aligned} \quad (2)$$

для компонент тензора напружень, пов'язаних із шуканими переміщеннями:

$$\sigma_r = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \Theta, \quad \sigma_\theta = 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \Theta, \quad \sigma_z = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \Theta, \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Для побудови розв'язку задачі (1), (2) використаємо функцію Лява [4]:

$$\chi = A_0 z^3 + B_0 r^2 z + l \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Y_j \left((\lambda_j h \operatorname{cth} \lambda_j l + 2\sigma) \operatorname{sh} \lambda_j z - \lambda_j z \operatorname{ch} \lambda_j z \right) J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^4 \operatorname{sh} \lambda_j l} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} +$$

$$+ a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X_n}{I_1(k_n a)} \left[\left(2 \frac{\sigma-1}{k_n} - \frac{a I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) I_0(k_n r) + r I_1(k_n r) \right] \frac{\sin k_n z}{k_n^3}, \quad (3)$$

де $A_0, B_0, Y_j, X_n, \{j, n\} = 1, 2, \dots$ – невідомі коефіцієнти, які слід знайти з умов (2); $k_n = n\pi/l$; λ_j – додатні корені рівняння $J_1(\lambda a) = 0$; J_0, J_1 та I_0, I_1 – відповідно звичайні та модифіковані функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків; σ – коефіцієнт Пуассона. Компоненти тензора напружень визначаються за бігармонічною функцією $\chi(r, z)$ згідно з відомими формулами:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left((2-\sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \nabla^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left((1-\sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right).$$

Розвинемо функцію $g(r)$ за повною системою $\{1, J_0(\lambda_j r), j = 1, 2, \dots\}$

$$g(r) = g_0 + \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}, \quad (5)$$

де $g_0 = -\rho \varepsilon^2 / a^2$, $g_j = -2\rho \varepsilon J_1(\lambda_j \varepsilon) / (a^2 \lambda_j J_0(\lambda_j a))$.

Безпосередньою підставкою можна переконатись, що знайдені за формулами (3), (4) дотичні напруження тотожно задовольняють однорідні крайові умови (2). Напруження σ_r, σ_z задовольняють відповідні умови (2), якщо

$$A_0 = \frac{1-2\sigma}{6(1+\sigma)} g_0, \quad B_0 = \frac{\sigma}{2(1+\sigma)} g_0,$$

а коефіцієнти X_n ($n = 1, 2, \dots$), Y_j ($j = 1, 2, \dots$) знайдено зі системи лінійних алгебричних рівнянь:

$$X_n P_n - 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Y_j k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = 0, \quad Y_j \Delta_j - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n \lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = -g_j. \quad (6)$$

де $P_n = a^2 \left(\frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - 1 \right) + 2 \frac{\sigma-1}{k_n^2}$, $\Delta_j = \frac{l \operatorname{cth} \lambda_j l}{\lambda_j} + \frac{l^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j l}$, $n, j = 1, 2, \dots$

Зауважимо, що зі збільшенням j для коефіцієнтів (5) має місце оцінка:

$$g_j = -\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \frac{\cos(\lambda_j \varepsilon + \pi/4)}{\sin(\lambda_j a + \pi/4)} + O(\lambda_j^{-2}),$$

внаслідок чого система (6) не є регулярною [1]. Для подолання цієї перешкоди застосуємо підхід, запропонований у роботі [3] для випадку аналогічної задачі для прямокутника. Введемо в розгляд нові величини Y_j^* :

$$Y_j = Y_j^* - \frac{\lambda_j}{l} g_j, \quad j=1,2,\dots \quad (7)$$

Тоді система (6) набуде вигляду

$$X_n P_n - 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Y_j k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = f_n, \quad Y_j \Delta_j - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n \lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = -g_j \Psi_j, \quad (8)$$

де $f_n = -\frac{4k_n^2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j \lambda_j}{(\lambda_j^2 + k_n^2)^2}$, $\Psi_j = 1 - \frac{\text{sh } 2\lambda_j l + 2\lambda_j l}{2 \text{sh}^2 \lambda_j l}$. Величини Ψ_j зі збільшенням індекса j спадають як $\exp(-\lambda_j)$, тому система (8) є регулярною, а для невідомих X_n, Y_j^* має місце закон асимптотичних розвинень [1]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j^* = G$$

і система (8) може бути проаналізована з використанням алгоритму удосконаленої редукції [1-4]. Після заміни

$$x_n = X_n - G, \quad y_j = Y_j^* - G, \quad (9)$$

система (8) набуває вигляду

$$x_n \frac{P_n}{k_n^2} - 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + 2 \frac{1+\sigma}{k_n^4} G = \frac{f_n}{k_n^2}, \quad n=1,2,\dots, \quad (10)$$

$$y_j \frac{\Delta_j}{\lambda_j^2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{2}{\lambda_j^4} G = -\frac{g_j \Psi_j}{\lambda_j^2}, \quad j=1,2,\dots$$

з додатковим рівнянням для визначення сталої G [2]:

$$(1+\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^4} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{\lambda_j^4} + G \left(\frac{1+\sigma}{90} l^4 + \frac{a^4}{192} \right) = \psi, \quad (11)$$

$$\text{де } \psi = p \frac{(\varepsilon^2 - a^2)\varepsilon^2}{16a^2} + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\lambda_j^3}.$$

Систему (10) з рівнянням (11) тепер можна розв'язувати, поклавши $n=1,2,\dots,N$, $j=1,2,\dots,J$, де N, J – скінченні і порівняно невеликі натуральні числа. Визначивши набори величин x_n, y_j, G ($n=1,2,\dots,N$; $j=1,2,\dots,J$)

та вважаючи $x_n = y_j = 0$ ($n > N$; $j > J$), з використанням рівностей (9) та (7) знаходимо коефіцієнти X_n та Y_j . Тоді з використанням формул (3), (4) здійснюється розрахунок напруженого стану циліндра.

На рис. 2 наведено розподіл осевих напружень σ_z за радіальною координатою для циліндра $a = l = 1$, коли $\varepsilon = 0.25$ і $p = 1/(\pi\varepsilon^2)$, які були обчислені за $N = J = 5$ у рівняннях (10), (11). Як бачимо, напруження добре задовольняють крайові умови. Вже при $N = J = 3$ точність задоволення крайових умов цими напруженнями становить 0.3%.

У якості підсумку зауважимо, що розвинута методика дозволяє здійснювати розрахунок напруженого стану суцільного циліндра скінченної довжини за кусково-сталого навантаження торців при порівняно невеликій кількості рівнянь та невідомих в основній системі лінійних алгебричних рівнянь, до якої зводиться розв'язування відповідної задачі теорії пружності за використання методу суперпозиції. Це значно скорочує затрати комп'ютерного часу та підвищує точність обчислень, що є суттєвим при наближенні до навантажених ділянок торців та ребер циліндра.

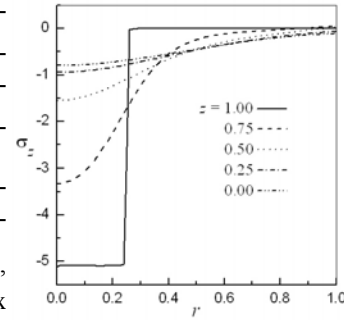


Рис. 2

1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. Токовий Ю.В., Мелешко В.В., Барбер Дж.Р. Осесимметричная деформация изотропного упругого цилиндра конечной длины // Труды XIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», г. Ростов-на-Дону, РФ, Изд-во Южного федерального ун-та., 2009. – Т.2. – С. 199-203.
3. Meleshko V.V. Equilibrium of elastic rectangle: Mathieu-Inglis-Pickett solution revisited // J. Elast. – 1995. – 40, № 3. – P. 207-238.
4. Meleshko V.V. Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // J. Engng Math. – 2003. – 46. – P. 355-376.

DETERMINATION OF THE STRESSES IN AN ELASTIC CYLINDER OF FINITE LENGTH UNDER PIECE-WISE UNIFORM LOADING OF ITS ENDS

An approach for analysis of the stresses in a solid elastic cylinder of finite length under the uniform normal loading applied to the concentric circles of its end-faces is developed. By making use of the method of piece-wise superposition the problem is reduced to the regular infinite system of linear algebraic equations which then is treated by means of the algorithm of advanced reduction.