Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-BSC-03.pdf

УДК 519.21

АСИМПТОТИКА ГЕНЕРАТОРА НЕПЕРЕРВНОЇ ПРОЦЕДУРИ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

Будз І.С., Семенюк С.А., Чабанюк Я.М.

Національний університет "Львівська Політехніка", semenyuk@gmail.com

Основною метою процедури стохастичної апроксимації ПСА(Робінса-Монро) [1] є знаходження розв'язку рівняння $C(u)=0$ для випадку, коли обчислення функції регресії $C(u)$ проведені з певною похибкою. Ця процедура широко використовується в математичній статистиці, теорії управління, теорії розпізнавання образів, звуку та сигналів, тощо.

Розглянемо випадок, коли збурення функції регресії задаються імпульсним процесом. Тоді неперервна ПСА задається рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t)=a(t)[C(u^{\varepsilon}(t),x(t/\varepsilon^4))dt+\varepsilon d\eta^{\varepsilon}(t)], \tag{1}$$

де $C(u,\bullet)\in C^2(R)$, а $x(t), t\geq 0$ - марківський процес, який в стандартному фазовому просторі $(X,\aleph)$ задається генератором

$$Q\varphi(x)=q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi(y)-\varphi(x)\right],\quad \varphi\in \mathbf{B}(X).$$

Тут $B(X)$ - банаховий простір дійсних обмежених функцій зі супремум-нормою $\|\varphi\|=\max_{x\in X}|\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x,B), x\in X, B\in\aleph,$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n=x(\tau_n)$, $n\geq 0$ зі стацінарним розподілом $\rho(B), B\in X.$ Стаціонарний розподіл $\pi(B), B\in\aleph,$ маркіського процесу $x(t), t\geq 0,$ визначається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx),\quad q=\int_X \pi(dx)q(x).$$

Позначимо через R_0 - отенціальний оператор генератора Q, що визначається рівністю [2] : $R_0=\Pi-(\Pi+Q)^{-1}$, де $\Pi\varphi(x)=\int_X \pi(dy)\varphi(y)$ - проектор на підпростір $N_Q=\{\varphi:Q\varphi=0\}$ нулів оператора Q.

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^{\varepsilon}(t),\ t\geq 0,$ задається співвідношеннями:

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \int_0^t \eta^{\varepsilon}(ds; x(s/\varepsilon^4));$$

де сім'я процесів з незалежними приростами $\eta^{\varepsilon}(t,x), t \geq 0, x \in X$, задається генераторами

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\int_R [\varphi(u,w+\varepsilon^2 v,x) - \varphi(u,w,x)]\Gamma(dv;x), \ x \in X. \quad (2)$$

Розглянемо поведінку ПСА (1) за умов експоненційної стійкості усередненої системи

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \hat{C}(\hat{u}(t)),$$

де $\hat{C}(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x)$.

Для існування єдиної точки рівноваги u_0 такої усередненої системи необхідно, щоб виконувалася умова балансу

$$\Pi C(u_0,x) = \int_X \pi(dx)C(u_0,x) = 0.$$

Лема. Генератор двокомпонентного марковського процесу

$$u^{\varepsilon}(t), \ x(t/\varepsilon^4), \ t \geq 0,$$

має вигляд

$$\mathbf{L}_{\mathbf{t}}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(u,x) + \varepsilon a(t)\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) + a(t)\mathbf{C}(x)\varphi(u,x),$$

де $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$ - генератор сім'ї процесів з незалежними приростами (2), $\mathbf{C}(x)\varphi(u,x) = C(u,x)\varphi_u'(u,x)$.

Одержаний результат дозволяє досліджувати умови стійкості та збіжності процедури стохастичної апроксимації. Надалі для дослідження характеру збіжності процедури до точки рівноваги необхідно дослідити властивості флуктуацій процедури [3]. Отримане зображення також може бути використане при розгляді процедури стохастичної оптимізації [4] для задач, в яких система описується еволюційним рівнянням з імпульсними збуреннями.

1. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохистическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972.
2. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic Models of Systems. – Kluwer, Dordrecht, 1999.
3. *Семенюк С.А.* Флуктуации процедуры стохастической аппроксимации с диффузионным возмущением // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № **5**. – С. 176–180.
4. *Ljung L., Pflug G., Walk H.* Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems. – Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992.

ASYMPTOTIC OF THE CONTINUOUS PROCEDURE GENERATOR WITH IMPULSIVE PERTURBATIONS

In this paper we discuss asymptotic behavior of the stochastic approximation procedure in the case when the regression function is perturbed by the Markov impulsive process. To achieve this we build generator for the limit process solving the singular perturbation problem for the original system and taking into account the asymptotic normality of impulsive perturbation. Also we consider the stochastic approximation procedure stability conditions in the terms of existence of Lyapunov function for the averaged evolution system.