Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010» м. Львів 25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-DM-10.pdf

УДК 539.3

# ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ТА ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

**Дацко Б.Й, Мелешко В.В.**

Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача,
b_datsko@yahoo.com, vitmel@ukr.net

На сьогоднішній день велику увагу приділяють застосуванню дробової похідної у різних фізичних процесах [3, 4], явищах самоорганізації, економічних моделях, біології, хімії і т.д. Це зумовило появу величезної кількості статей присвячених обчисленню дробової похідної [1-5], а саме, методам розв’язку систем диференціальних рівнянь з дробовими похідними. На даний час найпопулярнішими серед аналітичних методів є метод декомпозицій Адоміана (ADM – Adomian Decomposition Method) та метод хвильових гомотопій (HPM – Homotopy Perturbation Method). Поряд з тим, для складних систем, які описують явища самоорганізації, успішно використовують неявні числові методи. Метою даної роботи є порівняння цих методів та їх застосування для отримання розв’язку систем нелінійних диференціальних рівнянь з дробовими похідними.

**Основні означення**.

*Означення* 1. Лівосторонній дробовий інтеграл Рімана-Ліувіля порядку $\mu \ge 0$ функції $f$, $\alpha \ge -1$, визначається як

$$I^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\mu}} dt, \quad \mu > 0, \quad x > 0, \quad I^0 f(x) = f(x). \tag{1}$$

*Означення* 2. Означення лівосторонньої дробової похідної Капуто

$$ {}^{C}D^{\mu} f(x) = \begin{cases} I^{m-\mu} f^{(m)}(x), & m-1 < \mu \le m, \quad m \in N, \\ \dfrac{d^m f(x)}{dx^m} & \mu = m. \end{cases} \tag{2}$$

*Означення* 3. Означення Грюнвальда-Лєтнікова дробової похідної:

$$ {}_{x_0}^{GL}D^{\alpha} y(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-x_0}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} y(x - jh) \tag{3}$$

**Метод декомпозицій Адоміана.** Метод декомпозицій Адоміана [1], є потужним методом, і деколи успішно застосовується в різних задачах. Згідно

[1], розв'язком системи нелінійних диференціальних рівнянь з дробовими похідними

$$D^{\alpha_i} y_i(x) = F_i(x, y_1, ..., y_n), \quad y_i^{(k)}(0) = c_i^k, \quad 0 \le k \le [\alpha_i], \quad 1 \le i \le n, \qquad (4)$$

буде $y_i = \sum_{m=0}^{\infty} y_{im}$, де $y_{im}$ визначаються з рекурентних співвідношень

$$y_{i0}(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^i \frac{x^k}{k!}, \qquad (5)$$

$$y_{i,m+1}(x) = I^{\alpha_i} \left[ \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} N_i \left( x, \sum_{m=0}^{\infty} y_{1m} \lambda^m, ..., \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm} \lambda^m \right) \right]_{\lambda=0}, \quad m = 0,1,... \quad (6)$$

Збіжність даного методу обгрунтовується в роботі [1].

**Метод хвильових гомотопій.** Щоб показати суть методу HPM [2] розглянемо одне нелінійне диференціальне рівняння з дробовою похідною Капуто:

$$D^{\alpha} y(x) = F(x, y), \quad y^{(k)}(0) = c^k, \quad 0 \le k \le [\alpha]. \qquad (7)$$

Відповідно до HPM побудуємо наступну просту гомотопію:

$$D^{\alpha} y - pF(x, y) = 0, \qquad (8)$$

де $p$ — деякий параметр, що монотонно зростає від 0 до 1. Основним припущенням у HPM є те, що розв'язок рівняння (9) може бути представлений у вигляді степеневого ряду від змінної $p$:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} p^i y_i = y_0 + p y_1 + p^2 y_2 + p^3 y_3 + p^4 y_4 + ... \qquad (9)$$

Збіжність цього методу доведено в [2]. Підставивши (9) у (8), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $p^i$. Згрупувавши члени при однакових степенях $p^i$ та прирівнявши до 0, отримаємо систему диференціальних рівнянь відносно $y_n$, $n = 0,1,...$ З неї і отримуємо розв'язок.

**Неявний метод на основі означення Грюнвальда-Лєтнікова.** Розглянемо систему диференціальних рівнянь з дробовими похідними

$${}^{C}D^{\alpha_i} y_i(x) = F_i(x, y_1, ..., y_n), \quad y_i^{(k)}(0) = c_i^k, \quad 0 \le k \le [\alpha_i], \quad 1 \le i \le n. \qquad (10)$$

Інтервал змінної $x$ розіб'ємо на $N$ підіттервалів довжини $h$ і позначимо $x_j = jh$, $y_i^j = y_i(x_j)$, $j = \overline{0,N}$, $i = \overline{1,n}$. Використовуючи узагальнене означення Грюнвальда-Лєтнікова отримаємо:

$${}_{0}^{GL}D^{\alpha_i} y_i^k \approx h^{-\alpha_i} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{\alpha_i}{p} y_i^{k-p} = \sum_{p=0}^{k} b_p^{(\alpha_i)} y_i^{k-p}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (11)$$

$$b_0^{(\alpha_i)} = h^{-\alpha_i}, \quad b_p^{\alpha_i} = b_{p-1}^{\alpha_i} \cdot \left(1 - \frac{1+\alpha_i}{p}\right), \quad p = \overline{1,k}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (12)$$

Враховуючи зв'язок між похідними Капуто та Рімана-Ліувіля, еквівалентність означень Рімана-Ліувіля та Грюнвальда-Лєтнікова, отримаємо неявну схему для знаходження розв'язку системи нелінійних диференціальних рівнянь з дробовою похідною по часу:

$$b_0^{(\alpha_i)} y_i^k - F_i(x_k, y_1^k, ..., y_n^k) = \sum_{p=0}^{m} \frac{x_k^{p-\alpha_i}}{\Gamma(p-\alpha+1)} c_i^k - \sum_{p=1}^{k} b_p^{(\alpha_i)} y_i^{k-p}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (13)$$

Така неявна числова схема для кожного кроку по часу представляється як система алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати, використовуючи метод Ньютона-Рафсона.

**Приклад 1.** Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$^C D^{0.8} y(t) = \frac{25}{3} \frac{t^{1.2}}{\Gamma(0.2)} + y(t)^2 - t^4, \quad y(0) = 0. \qquad (14)$$

Його аналітичним розв'язком є функція $y(t) = t^2$. За допомогою ADM та HPM отримуємо одне й те саме наближення розв'язку (16) у вигляді ряду

$$y(x) = t^2 - \frac{7703125}{47243196} \frac{t^{38/5}}{\Gamma(3/5)} + \frac{48291015625}{1997520352128} \frac{\Gamma(3/5) t^{52/5}}{\Gamma(2/5)\Gamma(4/5)^2} + \ldots \qquad (15)$$

**Приклад 2.** Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь з [5].

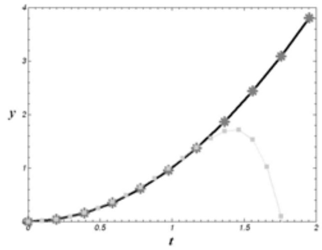
$$D^{\alpha} y_1 = y_1^2 + y_2, \qquad (16)$$

$$D^{\beta} y_2 = y_2 \cos y_1, \qquad (17)$$

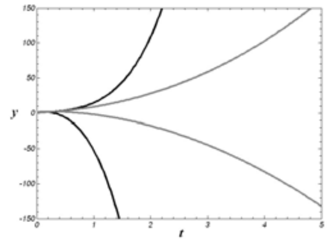
$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad \alpha, \beta \in (0,1), \quad (\alpha = 0.5, \quad \beta = 0.3)$. У [5] представлено наближений розв'язок системи отриманий за ADM:

$$y_1 = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+1) t^{3\alpha}}{\left[\Gamma(\alpha+1)\right]^2 \Gamma(3\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \ldots, \qquad (18)$$

$$y_2 = 1 + \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1) t^{2\alpha+\beta}}{\left[\Gamma(\alpha+1)\right]^2 \Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} + \ldots \qquad (19)$$



Мал . 1.



Мал . 2.

На мал. 1 зображено розв'язок рівняння (14): аналітичний (суцільна чорна лінія), за числовою схемою (13) (зірочки), наближений за ADM та HPM (формула (15), квадратики). На мал. 2 зображено розв'язок системи (16,17): за числовою схемою (13) (чорні лінії), наближений за ADM та HPM (формули (18,19), сірі лінії).

З наведених прикладів бачимо, що для деякого часу $t$ ADM та HPM добре апроксимують розв'язок, але далі розв'язок за допомогою цих методів отримати неможливо. З іншого боку неявна числова схема (13) дає хорошу апроксимацію розв'язку на усьому шуканому інтервалі.

**Висновки.** Огляд статей та аналіз чисельних прикладів показує, що ADM та HPM успішно застосовується для отримання розв'язку складних систем нелінійних диференціальних рівнянь з дробовими порядками похідних по часу, але на дуже малому часовому інтервалі. Застосування цих методів не дозволяє отримати розв'язок на більшому часовому інтервалі. Зауважимо, що використовуючи неявні числові методи на основі апроксимації дробової похідної можна отримати чисельний розв'язок на великому часовому інтервалі, значно більшому ніж в ADM та HPM. І це є основною перевагою чисельних методів над ADM та HPM.

1. *Adomian G.* Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
2. *He J.H.* Perturbation Methods: Basic and Beyond. – Amsterdam: Elsevier, 2006.
3. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – San Diego: Academic Press, 1999.
4. *Samko G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. – Yverdon: Gordon and Breach, 1993.
5. *Jafari H., Daftardar-Gejji V.* Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition // JCAM. – 2006. – **196.** - pp. 644–651.

**APPLICATION OF ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS FOR SOLVING NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES**

*The purpose of this work is comparison between analytical and numerical methods for solving of the systems of nonlinear differential equations with fractional derivatives.*