Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-M-19.pdf

УДК 517.928.2, 517.927.25

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДІНҐЕРА ЗІ СИНГУЛЯРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ НА ГЕОМЕТРИЧНОМУ ГРАФІ

Манько С.С.

Львівський національний університет імені Івана Франка, s_manko@franko.lviv.ua

В роботах [1], [2] досліджено питання про надання строгого змісту формальному гамільтоніану

$$H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x),$$

де $\delta'(x)$ – похідна функції Дірака, α – дійсна стала, яку ми називатимемо сталою зв'язку. Показано, що на це питання немає однозначної відповіді, бо відповідна фізична модель має приховані параметри – потенціал локальної дії. Проте можна відповісти на запитання, яка з точних моделей адекватно описує рух квантової частинки в регуляризованому потенціалі $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, який апроксимує потенціал $\alpha\delta'(x)$ коли малий додатний параметр ε прямує до нуля. Для цього сім'ї самоспряжених операторів

$$H_\varepsilon(\alpha,\Psi) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x),$$

потрібно поставити у відповідність оператор $H(\alpha,\Psi)$.

Раніше такий підхід застосували в [5] і показали, що для довільного гладкого профіля V з нульовим середнім послідовність

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$$

прямує в рівномірній резольвентній топології до прямої суми операторів другого диференціювання на півосях з умовами Діріхле в нулі. Тобто потенціал $\varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}x)$ є асимптотично непроникним для квантової частинки. Проте в праці [6] явно обчислені коефіцієнти розсіяння на кусково-сталому δ'- подібному потенціалі. Виявилося, що існує зліченна множина значень сталих зв'язку $\{\alpha_n\}_{n\in N}$, для яких граничне значення ймовірності проходження крізь δ'- бар'єр є ненульовим.

В [1], [2] розглянуто сім'ю $H_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ для гладких функцій Ψ з носієм на $[-1,1]$. Встановлено, що майже для всіх сталих зв'язку $\alpha\in R$ граничний оператора $H(\alpha,\Psi)$ є прямою сумою операторів другого диференціювання з умовами Діріхле в нулі. Введено поняття резонансної множини, яка є спектром задачі

$$-w''+\alpha\Psi(\xi)w=0,\quad \xi\in(-1,1),\quad w'(-1)=w'(1)=0$$

стосовно спектрального параметра α. У випадку, коли стала зв'язку належить до цієї множини, то $H(\alpha,\Psi)$ є оператором другого диференціювання на всій числовій осі з нетривіальними умовами спряження в початку координат, і ці умови визначають за допомогою функції Ψ. Вибір оператора $H(\alpha,\Psi)$ ґрунтується на близькості енергетичних рівнів та власних станів гамільтоніанів $H(\alpha,\Psi)$ та $H_\varepsilon(\alpha,\Psi)$.

Продовженням [1], [2] стали праці [3], [4]. Спочатку в [3] розв'язали задачу розсіяння на потенціалі $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ й показали, що такий потенціал є асимптотично проникним тоді й лише тоді, коли α належить до резонансної множини. Крім того, коефіцієнти розсіяння на такому потенціалі прямують до відповідних розв'язків задачі розсіяння для пари гамільтоніанів $H(\alpha,\Psi)$ та $-d^2/dx^2$. В [4], крім того, що вказали помилку в доведенні збіжності операторів в [5], показали, що послідовність $H_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ збігається в рівномірній резольвентній топології до $H(\alpha,\Psi)$ при $\varepsilon\to 0$.

Доповідь стосуватиметься перенесення результатів [1], [2] на випадок некомпактного зіркового геометричного графа. На такому графі розглянуто сім'ю гамільтоніанів вигляду $H_\varepsilon(\alpha,\Psi)$. Далі досліджуємо асимптотику спектра й власних функцій цієї сім'ї при $\varepsilon\to 0$ й будуємо відповідний оператор $H(\alpha,\Psi)$. Гладка функція Ψ має компактний носій та нульове середнє. Вона породжує резонансну множину, що є спектром деякої J-невід'ємного J-самоспряженого оператора в просторі Крейна. Якщо стала зв'язку не належить до резонансної множини, то граничний оператор є прямою сумою операторів другого диференціювання на ребрах з умовами Діріхле у вершині графа. Якщо ж α є елементом резонансної множини, то в залежності від його кратності, виникають різні нетривіальні умови спряження.

1. *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* Оператор Шредінґера з δ'-потенціалом // Доповіді НАНУ . – 2009. – №5. – С. 16-21.
2. *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'- подібними потенціалами // Український математичний вісник. – 2009. – **6**, №2. – С. 173-207.
3. *Манько С.С.* Про оператори Шредінґера та Штурма-Ліувіля з δ'- потенціалами // Вісник Львів. ун-ту. – 2009. – **71**. – С. 142-155.
4. *Golovaty Yu.D., Hryniv R.O.* On norm resolvent convergence of the Schrodinger operators with δ'- like potentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – **43** – P. 155-204.
5. *Šeba P.* Some remarks on the interection in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – **24**, №1. – P. 111-120.

6. *Christiansen P.L., Arnbak H.C., Zolotaryuk A.V., Ermakov V.N., Gaididei Y. B.* On the existence of resonances in the transmission probability for interactions arising from derivatives of Dirac's delta function // J. Phys. A: Math. Theor. – 2003. – **36**. – P. 7589-7600.

SPECTRAL ASYMPTOTIC OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR WITH A SINGULAR POTENTIAL ON A METRIC GRAPH

Our talk concerns the Hamiltonian on a noncompact star metric graph of the type $H_\varepsilon = -d^2/dx^2 + q(x) + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ *depending on the small parameter* ε. *The function* Ψ *is compactly supported, and the function* q *assures the discreteness of a spectrum. We introduce the best approximation for* H_ε, *which is determined by the proximity of the energy levels and the pure states for the Hamiltonians with smooth and singular potentials respectively.*