Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-N-21.pdf

УДК 513.6

ПРО СИМВОЛ ГІЛЬБЕРТА І ЛОКАЛЬНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ АРТІНА У ВИПАДКУ ЗАГАЛЬНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ

Нестерук В.І.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000, volodymyr-nesteruk@rambler.ru

Відображення Артіна є одним з основних понять локальної та глобальної теорії полів класів. Воно дозволяє явно описати групи Галуа абелевих розширень у термінах об'єктів, тісно зв'язаних з основним полем у локальному випадку та групою класів іделів у глобальному випадку. Це відображення було вперше введено Е. Артіном у кінці 20-х на початку 30-х років минулого століття і детально вивчається до наших днів. Вагомий внесок у його вивчення було зроблено Е. Нетером, Г. Гассе, Р. Брауером, Ж.-П. Серром, Дж. Мілном, М. Папікіяном та іншими математиками.

Історично раніше Д. Гільберт визначив і дослідив так званий символ норменного лишку, який тепер називається символом Гільберта. Цей символ можна розглядати як важливий частковий прояв символа Артіна.

Мета цієї роботи – дослідження властивостей символа Гільберта і відображення Артіна у випадку, коли поле K – загальне локальне поле, тобто повне дискретно нормоване поле з квазіскінченним полем лишків. Означення символа Артіна теорії полів класів загального локального поля можна знайти у роботах Ж.-П. Серра [4] та І.Б. Фесенка [6].

Грунтуючись на роботах М. Папікіяна [3] та Дж. Мілна [5] можна довести властивості символа Гільберта і відображення Артіна для загального локального поля.

Нехай K – загальне локальне поле, k – поля лишків K, $\overline{K}$ (відповідно $\overline{k}$) – алгебраїчне замикання поля K (відповідно k), m – натуральне число, $(m, char(k)) = 1$, μ_m – група коренів степеня m з одиниці в K, $G_K = Gal(\overline{K}/K)$ – абсолютна група Галуа поля K. Позначемо через $H^2(G_K, \overline{K}^*)_m$ – підгрупу елементів в $H^2(G_K, \overline{K}^*)$, порядок яких ділить m. Ми припускаємо, що $\mu_m \subset K$. Маємо точну послідовність

$$0 \to \mu_m \to \overline{K}^* \xrightarrow{m} \overline{K}^* \to 0.$$

Розглянемо точну послідовність груп когомологій

$$K^* \xrightarrow{m} K^* \to H^1(G_K,\mu_m) \to H^1\left(G_K,\overline{K}^*\right) \xrightarrow{m} H^1\left(G_K,\overline{K}^*\right)$$

$$\to H^2(G_K,\mu_m) \to H^2\left(G_K,\overline{K}^*\right) \xrightarrow{m} H^2\left(G_K,\overline{K}^*\right) \to \ldots$$

Звідси отримуємо точну послідовність

$$0 \to K^*/K^{*m} \to H^1(G_K,\mu_m) \to H^1\left(G_K,\overline{K}^*\right) \xrightarrow{m} H^1\left(G_K,\overline{K}^*\right) \to$$

$$H^2(G_K,\mu_m) \to H^2\left(G_K,\overline{K}^*\right)_m .$$

Враховуючи, що $H^1(G_K,\overline{K}^*)=0$, за теоремою Гільберта 90 , отримаємо

$$0 \to K^*/K^{*m} \to H^1(G_K,\mu_m) \to 0 ,$$

та

$$0 \to H^2(G_K,\mu_m) \to H^2\left(G_K,\overline{K}^*\right)_m \to 0.$$

Отже,

$$K^*/K^{*m} \cong H^1(G_K,\mu_m) \text{ і } H^2(G_K,\mu_m) \cong H^2\left(G_K,\overline{K}^*\right)_m . \quad (1)$$

Добуток $H^2(G_K,\mu_m)\times H^0(G_K,\mu_m) \to H^2(G_K,\mu_m\times\mu_m)$ визначає ізоморфізм

$$H^2(G_K,\mu_m)\times\mu_m \cong H^2(G_K,\mu_m\times\mu_m) ,$$

та

$$H^2(G_K,\mu_m\times\mu_m) \cong H^2(G_K,\mu_m)\times\mu_m \cong Z/mZ\times\mu_m = \mu_m. \quad (2)$$

Розглянемо добуток $H^1(G_K,\mu_m)\times H^1(G_K,\mu_m) \to H^2(G_K,\mu_m\times\mu_m)$.

Враховуючи (1) і (2), одержуємо добуток

$$a,b \mapsto (a,b) : K^*/K^{*m}\times K^*/K^{*m} \to \mu_m,$$

який називають *символом Гільберта.*

Теорема 1. Символ Гільберта для загального локального поля K має наступні властивості:

(а) білінійність, тобто $(aa',b)=(a,b)(a',b)$, $(a,bb')=(a,b)(a,b')$;

(б) $(b,a)=(a,b)^{-1}$;

(в) невиродженість, тобто $(a,b)=1$ для всіх $b\in K^*/K^{*m} \Rightarrow a\in K^{*m}$, $(a,b)=1$ для всіх $a\in K^*/K^{*m} \Rightarrow b\in K^{*m}$.

Доведення властивостей Гільберта схоже на доведення в класичному випадку, тобто у випадку локального основного поля [6].

Нехай $G_k = Gal(\bar{k}/k)$ – абсолютна група Галуа поля k. Фіксуємо $\sigma \in G_k$ і це σ називаємо *автоморфізмом Фробеніуса* та позначаємо через $Frob_{\bar{k}/k}$. Наступна теорема – це основна теорема ([4]) теорії полів класів для загального локального поля.

Теорема 2. Нехай K – загальне локальне поле, K^{ab} – абелеве розширення поля K. Тоді існує гомоморфізм $\theta_K : K^* \to Gal(K^{ab}/K)$ з наступними властивостями:

(а) для кожного простого елемента π і кожного скінченного нерозгалуженого розширення L поля K одержуємо, що $\theta_K(\pi) | L = Frob_{L/K}$;

(б) для кожного скінченного абелевого розширення L поля K отримуємо, що $N_{L/K}(L^*)$ міститься в ядрі відображення $a \to \theta_K(a) | L$ і θ_K індукує ізоморфізм $\theta_{L/K} : K^*/N_{L/K}(L^*) \to Gal(L/K)$;

(в) підгрупа N групи K^* має вигляд $N_{L/K}(L^*)$ для деякого скінченного абелевого розширення L поля K тоді і тільки тоді, коли вона має скінченний індекс і відкрита.

Гомоморфізм $\theta_K : K^* \to Gal(K^{ab}/K)$ називають *локальним відображенням Артіна.*

Теорема 3. Нехай K – загальне локальне поле. Тоді

$$\theta_K(b)\left(a^{1/m}\right) = (a,b)\,a^{1/m}.$$

Доведення використовує, серед іншого, наступний факт.

Твердження. Нехай поле F таке, що фактор-група F^*/F^{*m} – скінченна і K – повне дискретно нормоване поле з полем лишків F. Тоді група K^*/K^{*m} – скінченна.

Доведення. Розглянемо комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & U_K & \to & K' & \to & Z & \to & 0 \\ & & \downarrow m & & \downarrow m & & \downarrow m & & \\ 0 & \to & U_K & \to & K' & \to & Z & \to & 0, \end{array}$$

де U_K – група одиниць K, $K' = K^*$ – мультиплікативна група поля K.

За лемою про змію отримуємо

$$0 \to U_K/U_K{}^m \to K^*/K^{*m} \to Z/mZ \to 0. \tag{3}$$

Нехай $U_K{}^{(1)}$ – група одиниць поля K, конгруентних з 1 за модулем простого елемента. Розглянемо наступну комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & {U_K}^{(1)} & \to & U_K & \to & F^* & \to & 0 \\ & & \downarrow m & & \downarrow m & & \downarrow m & & \\ 0 & \to & {U_K}^{(1)} & \to & U_K & \to & F^* & \to & 0, \end{array}$$

з якої випливає

$$0 \to {U_K}^{(1)} \big/ {U_K}^{(1)m} \to U_K \big/ {U_K}^m \to F^* \big/ F^{*m} \to 0.$$

З леми Гензеля випливає, що група ${U_K}^{(1)} \big/ {U_K}^{(1)m}$ тривіальна. Отже, $U_K \big/ {U_K}^m \cong F^* \big/ F^{*m}$ і з (3) одержуємо, що группа $K^* \big/ K^{*m}$ скінченна.

1. *Введенский О. Н.* О локальных «полях классов» эллиптических кривых // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**. – С. 20-88.
2. *Касселс Дж., Фрёлих А.* Алгебраическая теория чисел. – М.: Мир., 1969. – 484 с.
3. *Papikian M.* On Tate Local Duality (preprint).
4. *Serre J.P.* Corps locaux. – Paris: Hermann, 1962.
5. *Milne J.S.* Class Field Theory, 2008. – 287 p. Available at www.jmilne.org/math/.
6. *Fesenko I.B., Vostokov S.V.* Local Fields and Their Extensions. – Second Edition, 2001. – 354 p.

ON THE HILBERT SYMBOL AND THE LOCAL ARTIN MAP IN THE CASE OF THE GENERAL LOCAL FIELD

The connection of Hilbert symbol and of local Artin map in the case of the general local field is given.