



УДК 539.3

## ДІОФАНТОВІ НАБЛИЖЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ГРУПИ $SO(3)$

Симотюк М.М.<sup>1</sup>, Столярчук О.Р.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів, [symotyuk@lms.lviv.ua](mailto:symotyuk@lms.lviv.ua)

<sup>2</sup> КНУ ім. Т.Г.Шевченка, Київ, [stostap@gmail.com](mailto:stostap@gmail.com)

Нехай  $A, B, C$  – елементи групи  $SO(3)$ ,  $E$  – її одиниця. Через  $F(A, B, C)$  позначимо підгрупу скінченних слів, породжених алфавітом  $A, A^{-1}, B, B^{-1}, C, C^{-1}$ .

*Означення.* Підгрупу  $F(A, B, C)$  назвемо  $\varphi$  – діофантовою (де  $\varphi: N \rightarrow R_{>0}$  – додатна функція натурального аргументу), якщо для довільного натурального  $n$  і довільного зведеного слова  $W_n \neq E$  довжини  $n$ ,  $W_n \in F(A, B, C)$ , виконується нерівність

$$\|W_n - E\| \geq \varphi(n).$$

У статті [1] сформульовано наступну гіпотезу: майже всі (за мірою Хаара в  $SO(3) \times SO(3)$ ) підгрупи, породжені парою  $(A, B) \in SO(3) \times SO(3)$  є  $\varphi_1$ -діофантовими, де  $\varphi_1(n) = d^{-n}$ , а  $d$  – деяка додатна стала. У статті [2] зроблено перший крок у напрямку вивчення діофантових властивостей елементів групи  $SO(3)$  і встановлено такий результат.

*Теорема 1.* [2] Майже всі (за мірою Хаара в  $SO(3) \times SO(3)$ ) підгрупи, породжені парою  $(A, B) \in SO(3) \times SO(3)$  є  $\varphi_2$ -діофантовими, де

$$\varphi_2(n) = d^{-n^2}, \quad d \geq 10^{10^4}.$$

У роботі [3], на підставі методики, яка відрізняється від описаної у [2], встановлено таке посилення результату теореми 1.

*Теорема 2.* [3] Майже всі (за мірою Хаара в  $SO(3) \times SO(3)$ ) підгрупи, породжені парою  $(A, B) \in SO(3) \times SO(3)$  є  $\varphi_3$ -діофантовими, де

$$\varphi_3(n) = 4^{-3n^2} n^{-3n(17/2+\delta)}, \quad \delta > 0.$$

Дана праця узагальнює теореми 1, 2 на випадок підгруп групи  $SO(3)$ , породжених трьома генераторами. Доведено наступний результат.

*Теорема 3.* Майже всі (за мірою Хаара в  $SO(3) \times SO(3) \times SO(3)$ ) підгрупи, породжені трійкою  $(A, B, C) \in SO(3) \times SO(3) \times SO(3)$  є  $\varphi$ -діофантовими, де  $\varphi(n) = 6^{-12n^2} n^{-12n(13/2+\delta)}$ ,  $\delta > 0$ .

1. *Gamburd A., Jacobson D., Sarnak P.* Spectra of elements in the group ring of  $SU(2)$  // Journ. Eur. Math. Soc. (JEMS), 1:1 (1999). – P. 51–85.
2. *Kaloshin V., Rodnianski I.* Diophantine properties of elements of  $SO(3)$  // Geometric and Functional Analysis (GAFA), vol. 11 (2001). – P. 953–970.
3. *Столярчук О.Р.* Діофантові наближення в групі  $SO(3)$  // Тези доповідей МАН, Київ, 2008. – С. 362.
4. *Симотюк М.М.* Багаточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними. - Дис. канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2005. – 193 с.

#### DIOPHANTINE APPROXIMATIONS OF ELEMENTS IN THE GROUP $SO(3)$

*The diophantine properties of free subgroups, generated of three orthogonal matrices, are established.*