Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Рада молодих науковців і
спеціалістів

Конференція молодих учених
«ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ
ЧИТАННЯ – 2010»
м. Львів
25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-T-31.pdf

УДК 517.95+511.2

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Тимків І.Р.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, tymkiv_if@ukr.net

В області $Q=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{p+1}: 0<t<T, x=(x',x_p)\in\Omega_{p-1}\times(0,l)\}$, де $\Omega_{p-1}=(\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z})^{p-1}$ – $(p-1)$ - вимірний тор, розглянемо задачу

$$W(\partial/\partial t, D, B_\nu)u(t,x)\equiv \sum_{bs_0+|s'|+2s_p=bn} A_{s_0,s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0}\frac{\partial^{|s'|}B_\nu^{s_p}u(t,x)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_{p-1}^{s_{p-1}}}=f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x),\quad j=1,\dots,n,\ \ 0\le t_1<t_2<\dots<t_n\le T, \qquad (2)$$

$$\begin{cases} |u(t,x',0)|<C_1, \quad \left.\dfrac{\partial^{2m+1}u(t,x)}{\partial x_p^{2m+1}}\right|_{x_p=0}=0, \quad m=0,1,\dots,(bn/2-2), \\ \left.B_\nu^q u(t,x)\right|_{x_p=l}=0, \quad q=0,1,\dots,(bn/2-1), \end{cases} \qquad (3)$$

де $b\in\mathbb{N}$ – парне число; $s=(s',s_p)=(s_1,\dots,s_{p-1},s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$, $|s'|=s_1+\dots+s_{p-1}$, $s_0\in\mathbb{Z}_+$; $D=\dfrac{\partial^{|s'|}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_{p-1}^{s_{p-1}}}$; $B_\nu:=\dfrac{\partial^2}{\partial x_p^2}+\dfrac{(2\nu+1)}{x_p}\dfrac{\partial}{\partial x_p}$ – оператор Бесселя, $\nu\ge -1/2$; $A_{s_0,s}\in\mathbb{R}$, $A_{n,(\vec{0})}=1$. Вважаємо, що в області Q рівняння (1) – рівномірно параболічне за Петровським, тобто для довільного $\eta=(\eta',\eta_p)\in\mathbb{R}^p$ корені рівняння $W(\xi,i\eta',-\eta_p^2)=0$ задовольняють оцінки

$$\operatorname{Re}\xi_j(\eta)\le-\delta\|\eta\|^b,\ \ j=1,\dots,n.$$

Запровадимо позначення: $j_\nu(y)=\sum_{r=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^r\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1+r)\Gamma(r+1)}\left(\dfrac{y}{2}\right)^{2r}$ – нормована функція Бесселя; $\chi_{k_p}^{(\nu)}$, $k_p\in\mathbb{N}$ – корені рівняння $j_\nu(\chi l)=0$;

$\left\{ j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}^{(\nu)}}x_p\right), k_p \in \mathbb{N} \right\}$ і $\Lambda = \left\{ \lambda_{k_p}^{(\nu)} = \left(\chi_{k_p}^{(\nu)}/l\right)^2, k_p \in \mathbb{N} \right\}$ – система власних функцій та множина власних значень задачі $B_\nu J(x_p) + \lambda J(x_p) = 0$, $|J(0)| < C_2$, $J(l) = 0$; $k = (k', k_p)$, $k' = (k_1, \ldots, k_{p-1}) \in \mathbb{Z}^{p-1}$, $k_p \in \mathbb{N}$, $|k'| = |k_1| + \ldots + |k_{p-1}|$, $\tilde{k} = (k', \lambda_{k_p}^{(\nu)}) \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \Lambda$, $\|\tilde{k}\| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_{p-1}^2 + \lambda_{k_p}^{(\nu)}}$. Із асимптотичних формул для $\lambda_{k_p}^{(\nu)}$ та $j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}^{(\nu)}}x_p\right)$ випливає, що для всіх $k_p \in \mathbb{N}$ виконуються оцінки [1]

$$C_3 k_p \le \lambda_{k_p}^{(\nu)} \le C_4 k_p, \; 0 < C_3 < C_4, \tag{4}$$

$$\max_{x_p \in [0,l]} \left| d^r j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}^{(\nu)}}x_p\right) \Big/ \left(dx_p^r\right) \right| \le C_5 \left(\lambda_{k_p}^{(\nu)}\right)^r, \quad C_5 = C_5(\nu, l, r), \quad r = 0,1,\ldots,bn. \tag{5}$$

Розв’язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k'| \ge 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} u_k(t) \exp\{(ik', x')\} j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}^{(\nu)}}x_p\right).$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$, є роз’язком задачі

$$W(d/dt, ik', -\lambda_{k_p}^{(\nu)}) u_k(t) = f_k(t), \tag{6}$$

$$u(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1,\ldots,n, \; 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \tag{7}$$

де $f_k(t)$, φ_{jk}, $j = 1,\ldots,n$, – коефіцієнти розвинення функцій $f(t,x)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$, в ряди Фур’є за системою функцій $\left\{ \exp\{(ik', x')\} j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}^{(\nu)}}x_p\right), k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N} \right\}$.

Нехай для кожного $\tilde{k} \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \Lambda$ всі корені $\mu_1(\tilde{k}), \ldots, \mu_n(\tilde{k})$ рівняння

$$W(\mu, ik', -\lambda_{k_p}^{(\nu)}) = 0 \tag{8}$$

є різними. Зі структури рівняння (8) згідно з [2, с. 102] та умови параболічності рівняння (1) встановлюються оцінки

$$\left|\mu_q(\tilde{k})\right| \le C_6 \|\tilde{k}\|^b, \; \operatorname{Re}\mu_q(\tilde{k}) \le -\delta \|\tilde{k}\|^b, \; q = 1,\ldots,n, \tag{9}$$

де $C_6 = 2\max\limits_{1\le r\le n}\left(\max\limits_{|s'|+2s_p=br}\left|A_{r,s}\right|\right)^{1/r}$. Позначимо: $R_q(\mu_1(\tilde{k}),\dots,\mu_q(\tilde{k});t) = \left(R_{q-1}(\mu_1(\tilde{k}),\dots,\mu_{q-2}(\tilde{k}),\mu_q(\tilde{k});t) - R_{q-1}(\mu_1(\tilde{k}),\dots,\mu_{q-1}(\tilde{k});t\right)/(\mu_q(\tilde{k})-\mu_{q-1}(\tilde{k}))$, $q = 2,\dots,n$, де $R_1(\mu_1(\tilde{k});t) = \exp\{\mu_1(\tilde{k})t\}$ – розділені різниці; $\left\{u_{kq}(t) := R_q(\mu_1(\tilde{k}),\dots,\mu_q(\tilde{k});t),\ q=1,\dots,n,\ t\in\mathbb{R}\right\}$ – фундаментальна система розв'язків рівняння $W(d/dt, ik', -\lambda_{k_p}^{(\nu)})u_k(t) = 0$; $\Delta(\tilde{k}) := \det\left\|u_{kq}(t_j)\right\|_{j,q=1}^{n} = \prod\limits_{1\le j<q\le n}(\mu_q(\tilde{k})-\mu_j(\tilde{k}))\det\left\|\exp\{\mu_q(\tilde{k})t_j\}\right\|_{j,q=1}^{n}$ – характеристичний визначник задачі (6), (7); $C^{(m,q)}\left(\overline{Q}\right)$, $m<q$, – банахів простір функцій $v(t,x)$ з нормою $\left\|v;C^{(m,q)}\left(\overline{Q}\right)\right\| = \sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{0\le j+|s'|+s_p\le q}\max\limits_{(t,x)\in\overline{Q}}\left|\dfrac{\partial^{j+|s'|+s_p}}{\partial t^j\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\right|$; $G_{\alpha,\gamma}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\gamma>0$, – простір функцій $\psi(x) = \sum\limits_{|k'|\ge 0}\sum\limits_{k_p=1}^{\infty}\psi_k\exp\{(ik',x')\}j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}^{(\nu)}}x_p\right)$ зі скінченною нормою $\left\|\psi;G_{\alpha,\gamma}\right\| = \sum\limits_{|k'|\ge 0}\sum\limits_{k_p=1}^{\infty}|\psi_k|\exp\left\{\alpha\left\|\tilde{k}\right\|^{\gamma}\right\}$; $C^q\left([0,T];G_{\alpha,\gamma}\right)$ – простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ $\partial^j v(t,x)/\partial t^j \in G_{\alpha,\gamma}$ і є неперервною за t в нормі цього простору, $j = 0,1,\dots,q$,

$$\left\|\psi;G_{\alpha,\gamma}\right\| = \sum_{|k'|\ge 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{q}\max_{0\le t\le T}\left|v_k^{(j)}(t)\right|\exp\left\{\alpha\left\|\tilde{k}\right\|^{\gamma}\right\}.$$

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1) – (3) у просторі $C^{(n,bn)}\left(\overline{Q}\right)$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall\ \tilde{k}\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\Lambda\quad \det\left\|\exp\{\mu_q(\tilde{k})t_j\}\right\|_{j,q=1}^{n}\ne 0. \tag{10}$$

При виконанні умови (10) розв'язок задачі (1)–(3) зображується формулою

$$u(t,x) = \sum_{|k'|\ge 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\sum_{j,q=1}^{n}\left(\frac{\Delta_{jq}(\tilde{k})\varphi_{jk}u_{kq}(t)}{\Delta(\tilde{k})} + \int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times \exp\{(ik', x')\} j_\nu \left(\sqrt{\lambda_{k_p}^{(\nu)}} x_p \right), \tag{11}$$

де $\Delta_{jq}(\tilde{k})$ – алгебричне доповнення елемента $u_{kq}(t_j)$ у визначнику $\Delta(\tilde{k})$, $G_k(t,\tau)$ – функція Ґріна задачі (6), (7).

Збіжність ряду (11) пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $\left| \det \left\| \exp\{\mu_q(\tilde{k}) t_j\} \right\|_{j,q=1}^n \right|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості $\tilde{k} \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \Lambda$.

Теорема 2. Нехай справджується умова (10) та існує додатна стала ω така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\tilde{k} \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \Lambda$ виконується нерівність

$$\left| \Delta(\tilde{k}) \right| > \exp\left\{ -\omega \left\| \tilde{k} \right\|^b \right\}. \tag{12}$$

Якщо $f(t,x) \in C([0,T]; G_{\alpha_1,b})$, $\alpha_1 > \omega + (T - nt_1)\delta$, $\varphi_j(x) \in G_{\alpha_2,b}$, $\alpha_2 > \omega - (n-1)\delta t_1$, $j = 1,\ldots,n$, то в просторі $C^{(n,bn)}\left(\overline{Q}\right)$ існує розв'язок задачі (1)–(3), який зображується рядом (11) і неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$.

Зауважимо, що за умов теореми 2 розв'язок задачі (1)–(3) належить до простору $C^n([0,T]; G_{\alpha_3,b})$, де $\alpha_3 < \min\{\alpha_1 - \omega - (T - nt_1)\delta; \alpha_2 - \omega + (n-1)t_1\delta\}$.

Теорема 3. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_n) \in [0,T]^n$ і для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (1) нерівність (12) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\tilde{k} \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \Lambda$ при $\omega > nC_6T$, де C_6 – стала з оцінок (9).

Доведення проводиться за схемою теореми 3 з [3] із урахуванням (4).

1. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интеграл Фурье // Успехи мат. наук. – 1951.– **6**, 2(42).– С. 102–143.
2. *Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971.– 316 с.
3. *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55:**2. – С. 241–254.

MULTIPOINT PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH OPERATOR BESSEL

We study the correctness of the problem with multipoints conditions on the time variable for an equation parabolic in the sense of Petrovski with operator Bessel. We find conditions for existence and uniquess of a classical solution of the problem.`