Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України Рада молодих науковців і спеціалістів

Конференція молодих учених «ПІДСТРИГАЧІВСЬКІ ЧИТАННЯ – 2010» м. Львів 25-26 травня 2010 року

Секція: СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-Z-12.pdf

УДК 513.6

ПРИНЦИП ГАССЕ ДЛЯ МНОГОВИДІВ СЕВЕРІ-БРАУЕРА НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Здомська Л.М.

Львівський національний університет імені Івана Франка, lesyazdom@rambler.ru

У цьому повідомленні ми доводимо, що для многовидів Северi-Брауера над псевдоглобальними полями виконується принцип Гассе. Доведення цього факту випливає з локально-глобального принципу для групи Брауера псевдоглобального поля. Цей принцип отримується як наслідок з основної точної послідовності теорії полів класів псевдоглобального поля. Доведення принципу Гассе для многовидів Северi-Брауера над глобальними полями наведене у роботі [2], і це доведення можна застосувати і до випадку псевдоглобального основного поля.

Нехай X повна гладка крива над квазіскінченним полем (k,σ), і нехай $K = k(X)$. Множина замкнених точок X буде позначена X^0 (тому X^0 пропускає лише загальну точку X). Кожній точці $v \in X^0$, відповідає нормування (його також позначимо v) поля K, і ми позначимо через K_v поповнення поля K відносно v і через R_v кільце цілих у K_v. Поле лишків $k(v)$ є квазіскінченним полем степеня $\deg(v)$ над k з $\sigma^{\deg(v)}$ як вибраною твірною групи $\mathrm{Gal}(k(v)^s / k(v))$. Позначимо через a_v образ елемента $a \in \mathrm{Br}(K)$ у $\mathrm{Br}(K_v)$, і означимо $\mathrm{inv}_K : \mathrm{Br}(K) \to Q/Z$ як $a \mapsto \mathrm{inv}_v(a_v)$, де $\mathrm{inv}_v = \mathrm{inv}_{K_v}$. Нехай $\overline{X} = X \otimes_k k^s$ - X, розглянута як крива над k^s, і нехай $\overline{K} = k^s(\overline{X})$ її поле функцій. Позначимо через Jac_X якобіан X.

Теорема 1 (Дж. Мілн [5]) Існує точна послідовність

$$0 \to H^1(G_k, \mathrm{Jac}_X(k^s)) \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v\in X^0} \mathrm{Br}(K_v) \overset{\mathrm{inv}_K}{\to} Q/Z \to 0 \qquad (1)$$

Доведення. Використаємо точну послідовність G_k -модулів

$$0 \to k^{s*} \to \overline{K}^* \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0,$$

де $\mathrm{Div}(\overline{X}) = \oplus_{v\in X^0} Z$ є група дивізорів (Вейля) на X. З когомологічної послідовності її відрізка

$$0 \to k^{s*} \to \overline{K}^* \to Q \to 0$$

отримуємо ізоморфізм $H^2(G_k,\overline{K}^*)\xrightarrow{\cong}H^2(G_k,Q)$. Зауважимо, що $H^2(G_k,\overline{K}^*)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(K)\to\mathrm{Br}(\overline{K}))$, і нагадаємо, що Теорема Тзена [6, Th. 24] стверджує, що $\mathrm{Br}(\overline{K})=0$, і тому $H^2(G_k,Q)=H^2(G_k,\overline{K}^*)=\mathrm{Br}(K)$. Когомологічною послідовністю іншого сегмента

$$0\to Q\to \mathrm{Div}(\overline{X})\to \mathrm{Pic}(\overline{X})\to 0$$

послідовності є

$$H^1(G_k,\mathrm{Div}(\overline{X}))\to H^1(G_k,\mathrm{Pic}(\overline{X}))\to H^2(G_k,Q)\to$$
$$\to H^2(G_k,\mathrm{Div}(\overline{X}))\to H^2(G_k,\mathrm{Pic}(\overline{X}))\to 0$$

Але $H^r(G_k,\mathrm{Div}(\overline{X}))=\oplus_{v\in X^0}H^r(G_k,D_v)$, де $D_v\overset{\mathrm{def}}{=}\oplus_{w\mapsto v}Z$ - G_k-модуль, індукований тривіальним $G_k(v)$-модулем Z, і тому

$$H^r(G_k,\mathrm{Div}(\overline{X}))=\oplus_{v\in X^0}H^r(\mathrm{Gal}(k^s/k(v)),Z).$$

Зокрема, $H^1(G_k,\mathrm{Div}(\overline{X}))=0$ і $H^2(G_k,\mathrm{Div}(\overline{X}))=\oplus_{v\in X^0}\Xi(G_{k(v)})$. Майже за допомогою означення Jac_X, маємо точну послідовність

$$0\to \mathrm{Jac}_X(k^s)\to \mathrm{Pic}(\overline{X})\to Z\to 0.$$

Оскільки група $\mathrm{Jac}_X(k^s)$ подільна [4, 8.2] і k має когомологічну розмірність 1, $H^2(G_k,\mathrm{Jac}_X(k^s))=0$, і тому

$$H^2(G_k,\mathrm{Pic}(\overline{X}))=H^2(G_k,Z)=\Xi(G_k).$$

Ці результати дозволяють ототожнити наступну послідовність з шуканою:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\dots & H^1(G_k,\mathrm{Pic}(\overline{X})) & \to & H^2(G_k,Q) & \to & H^2(G_k,\mathrm{Div}(\overline{X})) & \to & H^2(G_k,\mathrm{Pic}(\overline{X})) & \to & 0\\
\| & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
0\longrightarrow & H^1(G_k,\mathrm{Jac}_X) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(X) & \longrightarrow & \oplus\Xi(G_{k(v)}) & \longrightarrow & \Xi(G_k) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Наслідок 2. Якщо K псевдоглобальне поле, то маємо точну послідовність

$$0\to \mathrm{Br}(K)\to \oplus_{v\in X^0}\mathrm{Br}(K_v)\xrightarrow{\mathrm{inv}_K}Q/Z\to 0 \qquad (2)$$

Доведення. Оскільки кожен абсолютно незвідний многовид над полем k має k-раціональну точку, то в точній послідовності (1) $H^1(G_k,\mathrm{Jac}_X(k^s))=0$, тому отримуємо точну послідовність (2).

Твердження 3. Якщо X многовид Севері-Брауера над полем k, то $\mathrm{Pic}(X)=\mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_k}$ тоді й лише тоді, коли $X(k)\neq 0$.

Доведення. За означенням $\overline{X}$ ізоморфний $\mathrm{P}^n_{\overline{k}}$ де $n = \dim X$. Отже $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ породжується $O(1)$, тобто класом гіперплощини в $\mathrm{P}^n_{\overline{k}}$. Цей клас, зрозуміло, інваріантний відносно G , але він лежить в $\mathrm{Pic}\,X$ лише коли $X(k) \neq 0$. Справді, якщо $O(1) \in \mathrm{Pic}\,X$, то в цьому класі існує ефективний k -дивізор. n -кратний добуток $O(1)$ дорівнює 1, і отже $X(k) \neq 0$ (за рясністю або за дуже загальним результатом Фултона (див. [2], Вправа. 13.7)).

Лема 4. Нехай K поле, що містить k . Тоді існує комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}\,K & \xrightarrow{\psi_K} & \mathrm{Br}\,X_K \\ {\scriptstyle\mathrm{Res}}\uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Br}\,k & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Br}\,X \end{array}$$

де Res природний гомоморфізм обмеження, і $X_K = X \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\,K$.

Доведення. Це безпосередній наслідок функторіальності $\mathrm{Br}(-)$, оскільки $\mathrm{Br}\,k = \mathrm{Br}(\mathrm{Spec}\,k)$.

У твердженні 5 та доведенні наслідку 6 β означає природний гомоморфізм з відомої точної послідовності [3]

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\,X \xrightarrow{\beta} (\mathrm{Pic}\,\overline{X})^{G_k} \longrightarrow \mathrm{Br}_k{}' \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Br}'X.$$

Твердження 5. Нехай K скінченне розширення поля k . Припустимо, що $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_k}$. Тоді $\ker \approx \mathrm{coker}\beta$ анулюється анулюється домноженням на $d = \deg K / k$.

Доведення. Якщо $b \in \ker\psi$, то $\psi_K \circ \mathrm{Res}(b) = 0$, в силу Леми 4. Тепер, ψ_K ін'єктивне, то $\mathrm{Res}(b) = 0$ і, за кообмеженням, $d.b = \mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res}(b) = 0$.

Наслідок 6. $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_k}$ тоді й лише тоді, коли існує k -раціональний 0-цикл степеня 1 на X .

Доведення. Якщо існує k -раціональний 0-цикл степеня 1 на X , то X містить точки у деяких скінченних розширеннях K / k взаємно простих степенів. Отже, за Наслідком 1.3 з [1] і Твердженням 5, ker анулюється домноженням на 1 .

Означення 7. Нехай k глобальне або псевдоглобальне поле .Означимо

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_k}_{\mathrm{loc}} \Leftrightarrow \mathrm{Pic}(X_{k_v}) = \mathrm{Pic}(\overline{X}_{k_v})^{G_{k_v}}$$

для кожного поповнення k_v поля k .

Твердження 7. Якщо k псевдоглобальне поле, то

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_k}_{\mathrm{loc}} \Rightarrow \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_k} .$$

Доведення. За наслідком 2, природне відображення $i : \mathrm{Br}\,k \to \oplus \mathrm{Br}\,k_v \subset \prod \mathrm{Br}\,k_v$ ін'єктивне. Тепер припустимо $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_k}_{\mathrm{loc}}$. Тоді, застосовуючи Лему 4 з $K = k_v$, і переходячи до прямого добутку, отримуємо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} \prod \mathrm{Br}\,k_v & \overset{\subset}{\longrightarrow} & \prod \mathrm{Br}\,X_{k_v} \\ i\uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Br}\,k & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Br}\,X \end{array}$$

Таким чином ψ ін'єктивне.

Позначення. Якщо k глобальне або псевдоглобальне поле, позначимо $\mathrm{P_{loc}}(X,k) \Leftrightarrow X(k_v) \neq 0$ для кожного поповнення k_v поля k.

Враховуючи Наслідок 1.3 з [1], отримуємо:

Наслідок 8. Якщо k псевдоглобальне поле, то

$$\mathrm{P_{loc}} \Rightarrow \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_k}.$$

Наслідок 9 (Шатле). Принцип Гассе виконується для многовидів Севері-Брауера над глобальними і псевдоглобальними полями.

Доведення. Це безпосередній наслідок з Наслідків 8, 2 і Твердження 3.

1. *Coray D., Manoil C.* On large Picard groups and the Hasse Principle for curves and K3 surfaces // Acta Arithm. –1998. –**76**:2. –P.165–189.
2. *Fulton W.* Intersection Theory. - Springer, Berlin, 1984. – xi, 470 pp.
3. *Grothendieck A.* Le groupe de Brauer, III , Exemples et complements, in: Dix exposes sur la cohomologie des schemas. - North-Holland, Amsterdam, 1968. - pp. 88-188.
4. *Milne J.S.* Abelian varieties, in: Arithmetic geometry. - (Storrs, Conn., 1984), Springer, New York, 1986. - pp. 103–150.
5. *Milne J.S.* Arithmetic duality theorems, in: Perspectives in Mathematics, 1. - Academic Press, Inc., Boston, MA, 1986. – x, 421 pp.
6. *Shatz S.S.* Profinite groups, arithmetic, and geometry. - Annals of Mathematics Studies, No. 67. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972. – x, 252 pp.

HASSE PRINCIPLE FOR SEVERI-BRAUER VARIETIES OVER PSEUDOGLOBAL FIELDS

We prove that the Hasse principle holds for Severi-Brauer varieties over pseudoglobal fields. The proof is based on the local-global principle for the Brauer group of a pseudoglobal field.