Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014», 28–30 травня 2014 р., Львів

УДК 517.526

ЗБІЖНІСТЬ ТА СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З ДОДАТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Гладун В. Р., Матулка К. В.

Національний університет «Львівська політехніка»
v_hladun@yahoo.com, katerynamatulka@gmail.com

Фундаментальними питаннями в аналітичній теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) є питання їх збіжності та стійкості до збурень. При дослідженні збіжності ГЛД з додатними елементами використовують формулу різниці двох підхідних дробів та деякі спеціальні нерівності, які дозволяють одержати оцінки похибок наближення. Основні ознаки збіжності та стійкості до збурень ГЛД

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \qquad (1)$$

з додатними частинними знаменниками запропоновано в роботі [1]. Зокрема, встановлено, що область $\left(0,+\infty\right)$ є областю стійкості до збурень ГЛД (1). Цей результат повністю розв'язує задачу дослідження стійкості до збурень такого класу ГЛД. У даний час задача дослідження збіжності ГЛД (1) розв'язана не повністю. Залишається відкритим питання: чи є умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty, \ \alpha_k = \min\left\{ b_{i(k)} : i_p = \overline{1,N}, p = \overline{1,k} \right\},$$

достатньою для збіжності ГЛД (1)?

Розглянемо ГЛД додатними елементами

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \qquad (2)$$

де $N \in \mathbb{N}$ – кількість гілок розгалужень, $i(k)$ – мультиіндекси.

Позначимо $\xi_{i(k)} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m+1)} \big/ a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m+1)} \big/ a_{i(k-1)\tau}}$, $\xi'_{i(k)} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m)} \big/ a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m)} \big/ a_{i(k-1)\tau}}$,

де $Q_{i(k)}^{(2m)}$, $Q_{i(k)}^{(2m+1)}$ – відповідно залишки підхідних дробів парного та непарного порядку ГЛД (2).

Доведено, що $\prod_{k=1}^{2s+1}\left(Q_{i(k)}^{(2m+1)} \big/ a_{i(k)}\right), 1 \le s \le m$, є многочленами змінних $\xi_{i(k)}$, $k=\overline{1,2s+1}$, вигляду

$$\prod_{k=1}^{2s+1} \frac{Q_{i(k)}^{(2m+1)}}{a_{i(k)}} = P_{i(2s)} \frac{Q_{i(2s+1)}^{(2m+1)}}{a_{i(2s+1)}} + R_{i(2s+1)}, \; s=\overline{1,m}\,.$$

Тут $P_{i(2s)}=P_{i(2s)}\left(\xi_{i(2)},\xi_{i(3)},\ldots,\xi_{i(2s)}\right)$, $R_{i(2s+1)}=R_{i(2s+1)}\left(\xi_{i(3)},\xi_{i(4)},\ldots,\xi_{i(2s+1)}\right)$ – многочлени, що задовольняють рекурентні співвідношення

$$\begin{cases} P_{i(2s)} = \dfrac{1}{a_{i(2s-1)}}\left(\dfrac{b_{i(2s)}b_{i(2s-1)}}{a_{i(2s)}} + \xi_{i(2s)}\right) P_{i(2s-2)} + \dfrac{b_{i(2s)}}{a_{i(2s)}} R_{i(2s-1)}, \\ R_{i(2s+1)} = \dfrac{1}{a_{i(2s)}} \xi_{i(2s+1)} \left(\dfrac{b_{i(2s-1)}}{a_{i(2s-1)}} P_{i(2s-2)} + R_{i(2s-1)}\right), \; s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{3}$$

при початкових умовах $P_{i(0)}=1, R_{i(1)}=0$. Також доведено, що

$$\prod_{k=2}^{2s+2} Q_{i(k)}^{(2m)} = P_{i(2s+1)} Q_{i(2s+2)}^{(2m)} + R_{i(2s+2)}, \; s=\overline{1,m-1}\,,$$

де $P_{i(2s+1)}=P_{i(2s+1)}\left(\xi'_{i(3)},\xi'_{i(4)},\ldots,\xi'_{i(2s+1)}\right)$, $R_{i(2s+2)}=R_{i(2s+2)}\left(\xi'_{i(4)},\xi'_{i(5)},\ldots,\right.$ $\left.\xi'_{i(2s+2)}\right)$ – многочлени, що задовольняють рекурентні співвідношення

$$\begin{cases} P_{i(2s+1)} = \left(b_{i(2s+1)}b_{i(2s)} + a_{i(2s+1)}\xi'_{i(2s+1)}\right) P_{i(2s-1)} + b_{i(2s+1)} R_{i(2s)}, \\ R_{i(2s+2)} = a_{i(2s+2)} \xi'_{i(2s+2)} \left(b_{i(2s)} P_{i(2s-1)} + R_{i(2s)}\right), \; s=\overline{1,m-1} \end{cases} \tag{4}$$

при початкових умовах $P_{i(1)}=1, R_{i(2)}=0$.

Використовуючи співвідношення (3), (4), встановлено ознаки збіжності та стійкості до збурень ГЛД (2).

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.

CONVERGENCE AND STABILITY TO PERTURBATIONS OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH POSITIVE ELEMENTS

Sufficient conditions of convergence and stability to perturbations of branched continued fractions with positive elements are established.