**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»,
28–30 травня 2014 р., Львів**

УДК 517.5

ОСОБЛИВОСТІ ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗБІЖНИХ РЯДІВ

Івасик Г. В., Сорокатий М. І., Сухорольський М. А.

Національний університет «Львівська політехніка», Ivasyk-G@yandex.ru

Узагальнені методи підсумовування степеневих рядів є ефективними лише на межі або в області їх збіжності. Розглянемо питання числового підсумовування методом Вейєрштрасса-Гаусса [1-3] степеневого ряду за межею круга збіжності. Нехай $f(z)$ – аналітична функція в області E_0, що містить круг збіжності степеневого ряду цієї функції

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z|<R, \; 0<R<\infty . \tag{1}$$

Тоді $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=1/R$ і коефіцієнти ряду мають асимптотичну оцінку $|c_n|=O\left(n^m/R^n\right)$, де $|m|<\infty$. Якщо $|z|\ge R$ і $m>0$, то не виконується необхідна умова збіжності ряду ($\lim\limits_{n\to\infty}\left|c_n z^n\right|=\infty$) і не існує (у класичному розумінні) суми.

Перетворимо цей ряд $f(z)=c_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^* n^m (r/R)^n e^{in\psi}$, де $c_n^*=c_n n^{-m} R^n$, $z=re^{i\psi}$, $-\pi<\psi\le\pi$, $0\le r<R$. Вважаємо, що у деякій точці $z_0=R\cdot e^{\psi_0}$ границі круга збіжності ряд $f^*(\psi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{in\psi}$ є збіжним. Узагальнена сума ряду (1), підсумовуваного методом Вейєрштрасса-Гаусса $\left\{\rho^{n^2}\right\}$ при $\rho\to 1-0$, визначається граничною рівністю

$$f(z)=\lim_{\rho\to 1-0}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} c_k^* k^m \left(\rho^k r/R\right)^k e^{ik\psi}\right].$$

Послідовність $\left\{ \phi_n(\rho) = n^m \left(\rho^n r/R \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ не є монотонною. Найбільший член цієї послідовності і його номер такі:

$$\phi_{N_0}(\rho) = (r/R)^{\frac{N_0}{2}} N_0^m \exp\left(\frac{m}{2}\right), \; N_0 = \left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{r}{R} + \sqrt{\ln^2\frac{r}{R} + 4m\ln\frac{1}{\rho^2}} \right) \ln^{-1}\frac{1}{\rho^2} \right].$$

Тут R, r, m, ρ – величини, значення яких задані. Тільки за умови $N > N_0$ послідовність $\left\{ \phi_n(\rho) \right\}_{n=N}^{\infty}$ монотонно спадає, і залишок ряду можна зробити як завгодно малим. Максимальний член послідовності $\phi_{N_0}, N_0 < N$, із наближенням ρ до одиниці і $r \ge R$ різко зростає. Тому, ефективне підсумовування методом Вейєрштрасса-Гаусса ряду (1) за межею круга збіжності можливе лише у точках, близьких до його границі.

Для прикладу обчислимо узагальнену суму степеневого ряду функції $(1-z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n e^{i n\psi_0}, |z| < 1$, у точці $z = -2$. Наближене значення функції у цій точці шукаємо за формулою $(1-z)^{-2} \approx \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(\rho^n r \right)^n (n+1)$. Якщо вибрати $\rho = 0,99$ і $N = 90$, то знайдемо $f(-2) \approx 0.11$. При цьому маємо: $N_0 = 35$, $\phi_{N_0} = 1,07 \cdot 10^6$.

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Вища школа, 1984. – 120 с.
2. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наукова думка, 1995. – 460 с.
3. *Сухорольський М. А.* Функціональні послідовності та ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.

PECULIARITIES OF SUMMATION OF DIVERGENT SERIES

Summation of divergent power series is carried on by Weierstrass-Gauss method. Power series of meromorphic functions can be summed up by this method outside the circle of convergence.