

ЕФЕКТИВНЕ КІЛЬЦЕ

Забавський Б. В., Кузницька Б. М.

Львівський національний університет імені Івана Франка, zabavskii@gmail.com,
Львівський національний університет імені Івана Франка, kuznitska@ukr.net

Нехай R – комутативне кільце з одиницею. Ненульовий елемент $a \in R$ є адекватним до елемента $b \in R$ (позначимо: ${}_a A_b$), якщо існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$ і виконується $rR + bR = R$ та $s'R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s . Якщо для кожного елемента $b \in R$ ми маємо ${}_a A_b$, то елемент a є адекватним. Якщо довільний елемент кільця є адекватним, то кільце називається адекватним.

Відповідно до [2] елемент $a \in R$ є елементом з властивістю заміни, якщо існує такий ідемпотент $e \in R$, що $e \in aR$ та $(1-e) \in (1-a)R$. Комутативне кільце R називається кільцем з властивістю заміни, якщо кожний елемент кільця є елементом з властивістю заміни. Елемент $a \in R$ є чистим елементом, якщо $a = u + e$, для деякого ідемпотента $e^2 = e$ та одиниці u . Якщо всі елементи кільця є чистими, то кільце R називається чистим.

Елемент $a \in R$ є елементом ідемпотентного стабільного рангу 1, якщо $aR + bR = R$, то тоді існує ідемпотент $e \in R$ такий, що $a + be$ є оборотнім елементом кільця R для кожного елемента $b \in R$.

Теорема 1. Нехай R - комутативне кільце Безу і ${}_a A_b$. Тоді:

- 1) $\bar{b} = b + aR$ є чистим елементом факторкільця R/aR .
- 2) $\bar{b} = b + aR$ є елементом з властивістю заміни факторкільця R/aR .
- 3) $\bar{b} = b + aR$ є елементом ідемпотентного стабільного рангу 1 факторкільця R/aR .

Комутативне кільце Безу R називається ефективним, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$ і $aR + bR \neq R$ існує такий елемент $p \in R$, що ${}_c A_{ap}$ та $pR + bR + cR = R$.

Теорема 2. Ефективне кільце стабільного рангу 2 є кільцем елементарних дільників.

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»,
28–30 травня 2014 р., Львів**

Теорема 3. Нехай R – комутативне кільце Безу, гомоморфний образ якого R/cR є кільцем з властивістю заміни для довільного $c \in R \setminus \{0\}$. Тоді R – ефективне кільце.

Теорема 4. Нехай R – комутативне кільце Безу, в якому для довільних елементів $a, b, c \in R$, таких що $aR + bR + cR = R$ існує елемент $p \in R$, що cA_{ap} , і $pR + bR + cR = R$. Тоді R/cR – кільце з властивістю заміни для кожного $c \in R \setminus \{0\}$.

1. *McGovern W. Wm.* Neat ring // J. of Pure and Appl. Algebra. – 2006. – Vol. 205, No 2. – P. 243-265.
2. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – Vol. 229. – P. 269-278.
3. *Zabavsky B., Bilavska S.* Every zero adequate ring is an exchange ring // Fund. I Prukl. Mat. – 2012. – Vol. 17, No 3. – P. 61-66.
4. *Zabavsky B. V.* Diagonal reduction of matrices over rings // Mathematical Studies, Monograph Series. – 2012. – Vol. XVI, VNTL Publishers. – P. 251.

EFFECTIVE RING

Among commutative Bezout rings we consider a new class of rings and call them an effective rings. We prove that effective rings are elementary divisor rings.