Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014», 28–30 травня 2014 р., Львів

УДК 517.956.4+511.4

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Симотюк М. М.[1], Тимків І. Р.[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, quaternion@ukr.net,
[2]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

В області $D=(0,T)\times Q$, де Q – обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^p$ з гладкою межею ∂Q, розглянемо задачу

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t},L\right)\vec{u}(t,x)=\sum_{q=0}^{n}A_q(L)\frac{\partial^q\vec{u}(t,x)}{\partial t^q}=\vec{0}, \tag{1}$$

$$\vec{u}(t_j,x)=\vec{\varphi}_j(x),\qquad 0\le t_1<t_2<\ldots t_n\le T,\ \ j\in\{1,\ldots,n\}, \tag{2}$$

$$L^m\vec{u}(t,x)\Big|_{\partial Q}=\vec{0},\ \ t\in[0,T],\ \ m\in\{0,1,\ldots,nb-1\}, \tag{3}$$

де $A_q(L)=\| a_{ij}^q(L)\|_{i,j=1}^m$, $a_{ij}^q(L)=\sum_{s=0}^{(n-q)b}a_{ij}^{q,s}L^s$, $a_{ij}^{q,s}\in\mathbb{C}$, $q\in\{0,1\ldots,n-1\}$, $A_n(L)$ – одинична матриця розмірності $m\times m$; $L:=-\sum_{i,j=1}^{p}\partial/\partial x_i(p_{ij}(x)\partial/\partial x_j)+q(x)$, $p_{ij}(x)>0$, $q(x)\ge 0$; $\vec{u}(t,x)=col(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$, $\vec{\varphi}_j=col(\varphi_j^1(x),\ldots,\varphi_j^m(x))$, $j\in\{1,\ldots,n\}$. Нехай λ_k та $X_k(x)$ $(k\in\mathbb{N})$ – власні значення та відповідні їм власні функції задачі $LX=\lambda X$, $LX\big|_{\partial Q}=0$; $E_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ – простір функцій $\vec{\varphi}(x)=\sum\vec{\varphi}_k X_k(x)$, $\vec{\varphi}_k=\mathrm{col}(\varphi_k^1,\ldots,\varphi_k^m)\in\mathbb{C}^m$ з нормою $\left\|\vec{\varphi};E_{\alpha,\beta}\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\varphi_k^1|^2+\ldots+|\varphi_k^m|^2\right)^{1/2}\times$ $\times\lambda_k^{2\alpha}\exp(2\beta\lambda_k^b)$. Вважаємо, що для всіх $k\in\mathbb{N}$ корені $\mu_1(\lambda_k),\ldots,\mu_{nm}(\lambda_k)$ рівняння $\det\left\|W(\mu,\lambda_k)\right\|=0$ є різними і задовольняють – $\mathrm{Re}\,\mu_j(\lambda_k)\le-\delta_1\lambda_k^b$, $j\in\{1,\ldots,nm\}$, $\delta>0$. Позначимо $\vec{h}_q(\lambda_k)=\ =col(h_q^1(\lambda_k),\ldots,h_q^m(\lambda_k))$ – перший стовпець матриці $W^*(\mu_q(\lambda_k),\lambda_k)$, яка є приєднаною до матриці

$W(\mu_q(\lambda_k),\lambda_k)$, $q \in \{1,\ldots,mn\}$; $\Delta(\lambda_k) = \ = \left\| h_q^r(\lambda_k)\exp(\mu_q(\lambda_k)t_j)\right\|_{j,r\in\{1,\ldots,m\}}^{q\in\{1,\ldots,nm\}}$;

$\vec{H}_q(\lambda_k) = \mathrm{col}(\vec{h}_q(\lambda_k), \mu_q(\lambda_k)\vec{h}_q(\lambda_k)\ldots, \mu_q^{n-1}(\lambda_k)\vec{h}_q(\lambda_k)),\ q \in \{1,\ldots,mn\}$;

$$H(\lambda_k) = \det(H_1(\lambda_k),\ldots,H_{nm}(\lambda_k));$$

$$S(\lambda_k) = \prod_{(i_1,\ldots,i_m)\neq(j_1,\ldots,j_m)} (\mu_{i_1}(\lambda_k)+\ldots+\mu_{i_m}(\lambda_k)-\mu_{j_1}(\lambda_k)-\ldots-\mu_{j_m}(\lambda_k))^2,$$

$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le nm,\ 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le nm;\ \theta = n^2m^2(n-1)b/2;$

$\delta_2 = \sup\{|\operatorname{Re}\mu_q(\lambda_k)|/\lambda_k^b : k\in\mathbb{N}, q\in\{1,\ldots,nm\}\}$.

Теорема 1. *Нехай* $\forall k \in \mathbb{N}\ \ \Delta(\lambda_k) \neq 0$ *та існує* $\nu \in \mathbb{R}$ *таке, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$\left|\Delta(\lambda_k)\right| \ge \lambda_k^{-\nu}\exp(-nm\delta_2 T\lambda_k^b). \tag{4}$$

Якщо $\vec{\varphi}_j \in E_{\alpha+\alpha_0,\beta+\beta_0}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_0 = \nu + nb(mn(m-1)+1)$, $\beta_0 = nm\delta_2 T - (nm-1)\delta_1 t_1$, то *в просторі* $C^n\left([0,T];E_{\alpha,\beta}\right)$ *існує розв'язок задачі* (1)-(3), *який неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

За допомогою метричного підходу [1] встановлено такий результат.

Теорема 2. *Нехай існують* $\nu_1,\nu_2 \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{N}$ *виконуються оцінки*

$$\left|H(\lambda_k)\right| \ge \lambda_k^{-\nu_1},\ \left|S(\lambda_k)\right| \ge \lambda_k^{-\nu_2}. \tag{5}$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$*) векторів* $(t_1,\ldots,t_n) \in [0,T]^n$ *нерівність (4) виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{N}$ *при* $\nu = \nu(n,m,b,p,\nu_1,\nu_2)$.

Доведено, що оцінки (5) виконуються майже для всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^\theta$) векторів $\vec{Y} \in \mathbb{C}^\theta$, складених з усіх коефіцієнтів $a_{ij}^{r,s} \in \mathbb{C}$ системи (1).

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

MULTIPOINT PROBLEM FOR SYSTEM OF PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

The correctness of a problem with multipoint conditions with respect time-variable and conditions of Dirichlet type with spatial coordinates for the linear system parabolic equations with variable coefficients are established. The metric theorems of the estimation of small denominators of the problem are proved.