**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня 2015 р., Львів**

УДК 517.946

# ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

**Антон Кузь**

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

Багато процесів газової динаміки, магнітної гідродинаміки, теорії електричних кіл тощо моделюють рівняннями мішаного параболо-гіперболічного типу [1]. У цій роботі для мішаного параболо-гіперболічного рівняння досліджено коректність задачі з нелокальною умовою за часовою змінною, що містить інтегральний доданок, у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій.

Позначимо: $x=\left(x_1,\ldots,x_p\right)\in\mathbb{R}^p$, $\partial_t=\partial/\partial t$, $\Delta=\sum_{j=1}^{p}\partial^2\big/\partial x_j^2$, $k=\left(k_1,\ldots,k_p\right)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $\mu_k=\left(\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p}\right)\in\mathbb{R}^p$, $\|\mu_k\|^2=\mu_{k_1}^2+\cdots+\mu_{k_p}^2$, $(\mu_k,x)=\mu_{k_1}x_1+\cdots+\mu_{k_p}x_p$, $D^p=\left\{(t,x):t\in(-T_1,T_2),x\in\mathbb{R}^p\right\}, T_1,T_2>0$, $D_+^p=D^p\cap\{t>0\}$, $D_-^p=D^p\cap\{t<0\}$, $M=\left\{\mu_k\in\mathbb{R}^p:\mu_{-k}=-\mu_k,\ d_1|k|^{\theta_1}\le|\mu_k|\le d_2|k|^{\theta_2}, k\in\mathbb{Z}^p\right\}$, $0\le d_1<d_2$, $0\le\theta_1<\theta_2$; $H_M^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ – простір, отриманий шляхом поповнення простору скінченних сум вигляду $v(x)=\sum_k v_k\exp(i\mu_k,x)$, $\mu_k\in M$, за нормою $\left\|v,H_M^\alpha\right\|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|v_k|^2\times(1+|\mu_k|)^{2\alpha}$; $C^n\left([c,d],H_M^\alpha\right)$, $c,d\in\mathbb{R}$, $c<d$ – простір функцій $u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)\exp(i\mu_k,x)$, таких, що при фіксованому $t\in[0,T]$ $d^ju/dt^j\in H_M^\alpha$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, із нормою $\left\|u;C^n\left([c,d],H_M^\alpha\right)\right\|=\sum_{j=0}^{n}\max_{c\le t\le d}\left\|d^ju/dt^j;H_M^\alpha\right\|$.

В області $D^p$ розглядаємо задачу про знаходження функції $u:=u(t,x)$, яка є майже періодичною за $x$ зі спектром $M$ і справджує наступні умови:

$$u \in C^1\left([-T_1, T_2], H_M^{\alpha}\right) \cap C^2\left([-T_1, 0], H_M^{\alpha}\right), \tag{1}$$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (t,x) \in D_+^p, \\ \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & (t,x) \in D_-^p, \end{cases}. \tag{2}$$

$$\alpha u(-T_1, x) + \beta \int_{-T_1}^{T_2} u(t,x)dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{3}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,\ \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_k \exp(i\mu_k, x),\ \mu_k \in M.$

Позначимо:

$$\begin{aligned}\Delta(\mu_k, T_1, T_2) = \|\mu_k\|^{-1}\Big(\beta\Big(\|\mu_k\|^2 + 1 - \exp\left(-\|\mu_k\|^2 T_2\right)\Big) + \\ +(\alpha - \beta)\|\mu_k\|^2 \cos\left(\|\mu_k\| T_1\right) + \left(\alpha\|\mu_k\|^2 + \beta\right)\|\mu_k\| \sin\left(\|\mu_k\| T_1\right)\Big).\end{aligned}$$

**Теорема.** *Нехай* $\Delta(\mu_k, T_1, T_2) \neq 0$ *для всіх* $\mu_k \in M$ *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in M$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geq \left(1 + \|\mu_k\|\right)^{-\eta}. \tag{4}$$

*Якщо* $\varphi(x) \in H_M^{\alpha+\eta+3}$, *то існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3), який неперервно залежить від функцій* $\varphi(x)$.

Знайдено сталу $\eta$, для якої нерівність (4) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T_1 > 0.$ Показано, що коли $\alpha = 0$, то в задачі (1)-(3) відсутня проблема малих знаменників [2].

1. *Золина Л. А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. – 1966. – **6**, № 6. – С. 991–1001.
2. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

## PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION WITH RESPECT TO TIME FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION

*The problem with integral condition with respect to the time variable for parabolic-hyperbolic equation in a class of functions, almost periodic for spatial variables has been investigated. A criterion of uniqueness and the sufficient conditions of existence of the solution to the problem has been established.*