Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня 2015 р., Львів

УДК 519.517

АВТОХВИЛЬОВІ РОЗВ'ЯЗКИ МОДЕЛІ ФІТЦ-Х'Ю-НАГУМО З ПРОСТОРОВОЮ ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Віталій Мелешко, Зоя Притула

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, vitmel@iapmm.lviv.ua, zoya777b@gmail.com

В останній час суттєво зріс інтерес вчених до вивчення динамічних математичних моделей з дробовими похідними. Численні дослідження показали, що процеси у багатьох реальних системах проявляють аномальну поведінку, яку адекватно можна описати за допомогою рівнянь з дробовими похідними як з часовими, так і просторовими.

У працях [1, 2] проаналізовано автоколивні та автохвильові розв'язки, які виникають у відомій моделі Фітц-Х'ю-Нагумо [3] з часовими дробовими похідними. Встановлено вплив порядку дробової похідної по часу на нелінійну динаміку системи. Метою цієї роботи є дослідити автохвильові розв'язки згаданої моделі з просторовою дробовою похідною, а саме, коли оператор Лапласа замінено його дробовим аналогом:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = l^2 \Delta^{\alpha} u(x,t) - \frac{1}{3}u^3 + u - v\,,$$

$$\tau \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = u - Bv + A\,. \qquad (1)$$

Тут $u = u(x,t)$ – залежна змінна системи (активатор); $v = v(x,t)$ – інгібітор; τ, l – характерні час та довжина системи відповідно, A, B – біфуркаційні параметри; $\Delta^{\alpha} \equiv -(-\Delta)^{\alpha/2}$, де $(-\Delta)^{\alpha/2}$ – оператор дробового диференціювання Рісса [4]; α − порядок дробової похідної. В одновимірному випадку за умови $1 < \alpha < 2$ маємо:

$$\Delta^{\alpha} u(x,t) = -\frac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)}\left[\mathrm{D}_{+}^{\alpha} u(x,t) + \mathrm{D}_{-}^{\alpha} u(x,t)\right],$$

$$\mathrm{D}_{+}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{x} \frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha-1}} d\xi\,,$$

$$D_{-}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_x^{\infty} \frac{u(\xi,t)}{(\xi - x)^{\alpha-1}} d\xi,$$

де $\Gamma(2-\alpha)$ – гамма-функція.

Систему (1) необхідно доповнити відповідними початковими умовами та умовами відсутності потоків на границі системи чи періодичними граничними умовами. Зазначимо, що за умови $\alpha = 2$, отримаємо класичну модель Фітц-Х'ю-Нагумо [3].

За допомогою комп’ютерного моделювання встановлено, що порядок просторової дробової похідної є додатковим параметром біфуркації, який може якісно змінювати умови стійкості, тип біфуркації та нелінійну динаміку системи. Показано, що порядок просторової дробової похідної може визначати тип біфуркації стаціонарних розв’язків, і вони можуть втрачати стійкість відносно різних типів біфуркації. Виявлено існування поодиноких біжучих автохвильових розв’язків в області стійкості, які співіснують з просторово-однорідними станами системи. Показано також, що біжучі автохвильові розв’язки можуть існувати в широкому діапазоні параметрів системи, включаючи порядок просторової дробової похідної.

1. *Datsko B., Gafiychuk V., Podlubny I.* Solitary travelling auto-waves in fractional reaction–diffusion systems. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – Vol. 23. – 2015. – P. 378-387.
2. *Datsko B., Podlubny I., Meleshko V.* Running autowaves in fractional order dissipative systems // IX Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур»: матеріали конференції (15-19 вересня 2014 р.). – Львів, 2014. – С. 400-402.
3. *FitzHugh R.* Theoretical models of nerve membrane. // Biophys. J. – Vol. 1. – 1961. – P. 445-466.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: «Наука и техника», 1987. – 688 с.

AUTOWAVE SOLUTIONS OF THE FITZHUGH-NAGUMO MODEL WITH SPATIAL FRACTIONAL DERIVATIVE

Autowave solutions of the FitzHugh-Nagumo model with spatial fractional derivative are investigated. It is shown that the order of the spatial fractional derivative is an additional bifurcation parameter that can change the stability conditions, the type of bifurcation and the nonlinear dynamic of system. It is presented that, depending on the value of spatial fractional derivative there may be qualitatively different types of nonlinear autowave solutions.