**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

УДК 517.95

МАЛІ ЗНАМЕННИКИ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ МІШАНОГО ТИПУ

Михайло Симотюк, Іван Савка

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, quaternion@ukr.net, s-i@ukr.net

Нехай $\lambda_1,\dots,\lambda_n$., $\mu_1,\dots,\mu_n$, $n\in\mathbb{N}$, – набори попарно різних дійсних чисел, $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}\cap\{\mu_1,\dots,\mu_n\}=\varnothing$; $\Lambda=\|\lambda_j^{q-1}\|_{j,q=1}^n$, $M=\|\mu_j^{q-1}\|_{j,q=1}^n$ – матриці Вандермонда, побудовані для цих наборів. Для кожного $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$ позначимо:

$$A(k)=\|\lambda_j^{q-1}\exp(-\alpha\lambda_j P(k))\|_{j,q=1}^n,\ B(k)=\|\mu_j^{q-1}\exp(\beta\mu_j P(k))\|_{j,q=1}^n,$$

$$\Delta(k)=\det\begin{Vmatrix}\Lambda & M\\ A(k) & \nu B(k)\end{Vmatrix},$$

де $\alpha,\beta>0$, $\nu\in\mathbb{C}$, а $P(D_x)$, $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_p)$, – такий диференціальний вираз степеня N, що

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}^p}|P(k)|(1+|k|)^{-N}>0,\quad |k|=|k_1|+\dots+|k_p|. \tag{1}$$

Визначники $\Delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, виникають при дослідженні задачі про знаходження гладкого розв'язку $u=u(t,x)$ ($t\in(-\alpha,\beta)$, $x=(x_1,\dots,x_p)\in\Omega_p$, $\Omega_p=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$) факторизованого рівняння мішаного типу

$$L(\partial_t,D_x)u\equiv\begin{cases}\prod\limits_{j=1}^n\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\lambda_j P\left(D_x\right)\right)u(t,x)=0, & (t,x)\in(-\alpha,0)\times\Omega_p,\\ \prod\limits_{j=1}^n\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\mu_j P\left(D_x\right)\right)u(t,x)=0, & (t,x)\in(0,\beta)\times\Omega_p,\end{cases} \tag{2}$$

який задовольняє нелокальні умови

$$\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=-\alpha}-\nu\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=\beta}=\varphi_j(x),\quad j=1,\dots,n,\quad x\in\Omega_p, \tag{3}$$

та умови спряження на поверхні $t = 0$

$$\lim_{t \to 0-} \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}} = \lim_{t \to 0+} \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad x \in \Omega_p. \qquad (4)$$

Визначники $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, входять знаменниками у вирази для коефіцієнтів ряду Фур'є, яким зображується розв'язок задачі (2)–(4); вони можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, зумовлюючи розбіжність ряду. Тому важливо встановити оцінки знизу для модулів величин $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Це і є метою даної роботи. Зауважимо, що визначники $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, у науковій літературі раніше не виникали, метричні оцінки для них були відсутні.

Теорема.1 *Якщо виконується умова* (1)*, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in [\Lambda_1,+\infty)^n$, $\Lambda_1 > 0$*, та для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $(\mu_1,\ldots,\mu_n) \in [M_1 + \infty)^n$, $M_1 > 0$*, нерівність*

$$\left|\Delta(k)\right| \geq \begin{cases} |k|^{-\omega} \exp\left(-n\beta M_1 \operatorname{Re} P(k)\right), & \textit{якщо } \operatorname{Re} P(k) \geq 0, \\ |k|^{-\omega} \exp\left(n\alpha\Lambda_1 \operatorname{Re} P(k)\right), & \textit{якщо } \operatorname{Re} P(k) < 0, \end{cases} \qquad (5)$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$*, якщо* $\omega > pn(3n-1)/2 + Nn(n-1)/2$.

Для доведення теореми використано метричний підхід [1] та методику, наведену в праці [2].

Результати перенесено на випадок, коли коефіцієнти факторизації у рівнянні (2) є комплексними числами, коли в нелокальних умовах (3) присутній інтегральний доданок.

1. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
2. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.

SMALL DENOMINATORS OF NONLOCAL CONJUGATION PROBLEM FOR FACTORIZED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MIXED TYPE

The metric estimates of small denominators of nonlocal conjugation problem for factorized partial differential equations are proved.