

РІВНЯННЯ ТЕРМОПРУЖНОСТІ В ПЕРЕМІЩЕННЯХ ДЛЯ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Анатолій Чиж

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім Я. С. Підстригача
НАН України, chyzh_tolik@ukr.net

Неоднорідні порожнисті циліндри широко використовують в різних галузях господарства і промисловості, зокрема, в якості трубопроводів чи посудин високого тиску, які зазвичай перебувають в умовах змінних теплових навантажень. Для підвищення резерву міцності та зменшення рівня внутрішніх залишкових деформацій, такі елементи конструкцій виготовляють з композиційних матеріалів зі змінними пружними та теплофізичними характеристиками. У зв'язку з цим набуває актуальності розробка моделей та ефективних методів дослідження розподілів температурних напружень і переміщень, що виникають внаслідок прикладення змінних теплових навантажень на поверхнях циліндрів з урахуванням залежності коефіцієнта Пуассона, модуля Юнга і коефіцієнта температурного розширення від координат. У цій роботі виведено аналоги рівнянь Ляме плоскої неосесиметричної задачі термопружності для неоднорідного порожнистого циліндра, пружні та теплофізичні властивості якого є довільними функціями радіальної координати. Отриману систему рівнянь в переміщеннях розв'язано шляхом зведення до системи лінійних інтегральних рівнянь другого роду способом, наведеним у праці [1].

Розглянемо довгий порожнистий радіально-неоднорідний циліндр $a \leq r \leq 1$, де r – безрозмірна радіальна координата, отримана шляхом відношення відповідної розмірної координати до зовнішнього радіуса, $a = \text{const}$. Вважаючи, що циліндр знаходиться в умовах плоскої деформації, ставимо за мету визначити розподіли пружних переміщень за жорсткого закріплення його внутрішньої поверхні та закріплення з проковзуванням на зовнішній поверхні:

$$\begin{aligned} u(a, \varphi) = 0, \quad v(a, \varphi) = 0, \\ u(1, \varphi) = 0, \quad v'_r(1, \varphi) - v(1, \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут u та v відповідно радіальне та колове пружні переміщення. Відповідна крайова задача термопружності описується системою рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} & u''_{rr} + \frac{u'_r}{r} - \frac{u}{r^2} + \frac{v''_{\varphi r}}{2r(1-\nu)} + \frac{4\nu-3}{2r^2(1-\nu)} v'_\varphi + \frac{1-2\nu}{2r^2(1-\nu)} u''_{\varphi\varphi} + \\ & + \left(G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right)'_r \frac{1-2\nu}{(1-\nu)G} u'_r - \left(\frac{\alpha E}{1-2\nu} \right)'_r \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} T + \\ & + \left(\frac{\nu G}{1-2\nu} \right)'_r \frac{1-2\nu}{(1-\nu)G} \left(\frac{u}{r} + \frac{v'_\varphi}{r} \right) - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T'_r = 0, \\ & v''_{rr} - \frac{v'_r}{r} + \frac{v}{r^2} + \frac{u''_{\varphi r}}{r(1-2\nu)} + \frac{3-4\nu}{r^2(1-2\nu)} u'_\varphi + \\ & + 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{v''_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{G'_r}{G} \left(\frac{u'_\varphi}{r} + v'_r - \frac{v}{r} \right) - 2\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{T'_\varphi}{r} = 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Тут $\nu(r)$ – коефіцієнт Пуассона, $E(r)$ – модуль Юнга, $\alpha(r)$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення, $G(r) = E(r) / (2 + 2\nu(r))$ – модуль зсуву, $T(r, \varphi)$ – температурне поле, отримане шляхом, наведеним у [2]. Зауважимо, що, якщо вищенаведені характеристики матеріалу є сталими, то система (2) зводиться до класичних рівнянь Ляме для однорідного матеріалу.

Задачу (1), (2) розв'язано з використанням розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є і зведенням до систем лінійних інтегральних рівнянь другого роду, які в свою чергу розв'язуються методом квадратурних формул [3].

1. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Three-dimensional temperature and thermal stress analysis of an inhomogeneous layer // *Journal of Thermal Stresses.* – 2013. – **36**, № 8. – P. 790-808.
2. *Токовий Ю. В., Чиж А. І.* Температурне поле радіально-неоднорідного порожнистого циліндра // Зб. пр. XXI Всеукр. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2015. – С. 314-315.
3. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.

THERMOELASTICITY EQUATIONS IN TERMS OF DISPLACEMENTS FOR A RADIALLY-INHOMOGENEOUS CYLINDER

A technique for solving a thermoelasticity problem in terms of displacements for a radially-inhomogeneous cylinder is developed. This technique rests upon the reduction of the original systems of differential equations to systems of linear integral equations of the second kind.