

## ВПЛИВ ДИПОЛЯ ТЕПЛА НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ВІЛЬНОЮ АБО ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ

Роман Андрійчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, andriychukroman@gmail.com

Доповідь присвячена побудові функцій Гріна задач термопружності для півбезмежного тіла, межа якого вільна або жорстко закріплена за нульової температури на ній або теплоізоляції при дії диполя тепла.

В циліндричній системі координат з початком на межі півпростору і віссю  $Oz$ , перпендикулярною до неї, температурне поле записуємо у вигляді

$$T(r, z) = -\frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{z-h}{R_1^3(r, z)} + (-1)^k \frac{z+h}{R_2^3(r, z)} \right), \quad R_{1,2}(r, z) = \sqrt{r^2 + (z \mp h)^2}, \quad (1)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $k=1$  відповідає теплоізоляції, а  $k=2$  – нульовій температурі межі тіла.

В цій системі координат при  $z=0$  граничні умови мають вигляд:

а) для жорстко закріпленої межі

$$u_r(r, 0) = 0, \quad u_z(r, 0) = 0; \quad (2)$$

б) для вільної межі

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0; \quad (3)$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r, z) = \bar{u}(r, z) + \underline{u}(r, z), \quad \sigma(r, z) = \bar{\sigma}(r, z) + \underline{\sigma}(r, z),$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а другі – переміщення і напруження у півпросторі  $z \geq 0$ , які забезпечують виконання умов (2–3).

Переміщення і напруження у безмежному тілі визначаються через термопружний потенціал переміщень

$$\Phi_d(r, z) = A \int_0^\infty J_0(\alpha r) \left[ e^{-\alpha|z-h|} (z-h) + (-1)^k e^{-\alpha|z+h|} (z+h) \right] d\alpha, \quad (4)$$

де  $A = \frac{\alpha_t}{4\lambda} \frac{1+\nu}{1-\nu}$ ,  $\alpha_t$  і  $\nu$  – коефіцієнти лінійного теплового розширення і

Пуассона,  $J_0(\alpha, r)$  – функція Бесселя. Зокрема,

$$\begin{aligned} \bar{u}_r &= \frac{\partial \Phi_d}{\partial r}, & \bar{\sigma}_{zz} &= -2G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \Phi_d, \\ \bar{u}_z &= \frac{\partial \Phi_d}{\partial z}, & \bar{\sigma}_{rz} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для визначення переміщень  $\bar{u}(r, z)$  і напружень  $\bar{\sigma}(r, z)$  побудована функція Гріна за допомогою бігармонічної функції Лява у півпросторі  $z > 0$

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} [C(\alpha) + \alpha z D(\alpha)] e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (6)$$

Тут  $C(\alpha)$  і  $D(\alpha)$  – шукані функції. Переміщення  $\bar{u}(r, z)$  і напруження  $\bar{\sigma}(r, z)$  визначаються формулами [1]

Задовольняючи граничні умови (2) – (3) з використанням виразів (4)–(6), знаходимо функції  $C(\alpha)$  і  $D(\alpha)$ .

Після обчислення відповідних інтегралів наведено явні вирази для переміщень і напружень, які є функціями Гріна і можуть бути використані при визначенні термопружного стану півпростору, зумовленого нагрівом диполями тепла, розподіленими по певній області у ньому.

Якщо диполі тепла розподілені у паралельній до межі півпростору круговій області  $S$ , то напруження в декартовій системі координат  $Oxyz$  з початком у центрі круга і осями  $Ox$  і  $Oy$ , розташованими в області  $S$ , визначаються так:

$$\sigma^*(x, y, z) = \iint_S w(\xi, \eta) \sigma(r, z, h) d\xi d\eta, \quad (7)$$

де  $w(\xi, \eta)$  – густина джерела тепла,  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ . У зв'язку з перенесенням початку системи координат з межі півпростору в область  $S$ , вирази (1) мають вигляд

$$R_1(r, z) = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad R_2(r, z) = \sqrt{r^2 + (z - 2h)^2}.$$

1. *Новацкій В.* Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364с.

### INFLUENCE OF A STATIONARY HEAT SOURCE ON STRESS STATE OF HALF-SPACE WITH HARDLY, SMOOTHLY OR FLEXIBLY CLAMPED BOUNDARY

*Using the potential of thermoelastic displacements and Love biharmonic function, temperature, displacements and stresses in the semi-infinite body due to the dipol are defined. Boundary of body is free or hardly clamped at zero temperature on it or boundary is insulated. The plots of axial, radial, circular and tangential stresses on the boundary of the body, depending on the distance of the dipol to this boundary, are presented.*