Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017», 23–25 травня 2017 р., Львів

УДК 539.3

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ДОВГОГО НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗА ЗМІННОГО ВЗДОВЖ ТВІРНОЇ ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Анатолій Чиж

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім Я.С. Підстригача
НАН України, chyzh_tolik@ukr.net

Циліндричні конструкції широко застосовують у різних галузях промисловості й машинобудування. В процесі експлуатації вони можуть перебувати в умовах нерівномірних теплових навантажень. Для забезпечення міцності і температуростійкості таких конструкцій, їх виготовляють з неоднорідних матеріалів. У зв’язку з цим набуває актуальності розробка адекватних моделей та розвиток ефективних методів для дослідження розподілів температурного поля в довгих порожнистих радіально-неоднорідних циліндрах за змінного вздовж твірної теплового навантаження. Внаслідок неоднорідності матеріалу рівняння теплопровідності в рамках задач такого класу містить коефіцієнти, які є довільними функціями радіальної координати, що суттєво ускладнює побудову його розв’язку. В даній роботі неведено методику розв’язування осесиметричної задачі теплопровідності для довгого порожнистого радіально-неоднорідного циліндра за змінних вздовж його твірної теплових навантажень шляхом зведення до інтегрального рівняння другого роду.

Осесиметричний розподіл температурного поля в радіально-неоднорідному циліндрі внутрішнього і зовнішнього радіусів $r = a$ і $r = l$, відповідно, визначаємо з диференціального рівняння теплопровідності [1]:

$$\frac{\partial^2 T(r,z)}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda(r)}\frac{d\lambda(r)}{dr}\right)\frac{\partial T(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,z)}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

за заданих на внутрішній та зовнішній поверхнях умов першого роду

$$T(a,z) = T_1(z)\,,\ T(l,z) = T_2(z)\,. \qquad (2)$$

Тут $\lambda(r)$ – коефіцієнт теплопровідності, який є довільною функцією від безрозмірної радіальної координати r.

Після застосування інтегрального перетворення Фур’є за осьовою координатою, задачу (1), (2) зведено до лінійного інтегрального рівняння другого роду:

$$\bar{T}'(r;s) = f'(r;s) + \int_a^l \bar{T}'(\xi;s)K_1'(r,\xi;s)d\xi - \int_a^r \bar{T}'(\xi;s)K_2'(r,\xi;s)d\xi\,. \qquad (3)$$

Тут рискою зверху позначено образ температури у просторі інтегрального перетворення; s – параметр перетворення;

$$f(r;s) = \bar{T}_1(s)\left(\frac{I_0(rs)}{I_0(as)} - \frac{I_0(ls)}{I_0(as)}\frac{X_{00}(a,r;s)}{X_{00}(a,l;s)}\right) + \bar{T}_2(s)\frac{X_{00}(a,r;s)}{X_{00}(a,l;s)},$$

$$K_1(r,\xi;s) = \frac{X_{00}(a,r;s)}{X_{00}(a,l;s)}\xi\frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)}\bar{T}'\left(\xi,s\right)X_{00}(l,a;s),$$

$$K_2(r,\xi;s) = \xi\frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)}\bar{T}'\left(\xi,s\right)X_{00}(r,a;s),$$

$$X_{00}(r,a;s) = I_0\left(rs\right)K_0\left(as\right) - K_0\left(rs\right)I_0\left(as\right).$$

Знайшовши з рівняння (3) за використання методу квадратур [2] похідну $\bar{T}'(r;s)$, функцію $\bar{T}(r;s)$ знаходимо за допомогою виразу:

$$\bar{T}\left(r,s\right) = f\left(r,s\right) + \int_a^l \bar{T}'\left(\xi,s\right)K_1\left(r,\xi,s\right)d\xi - \int_a^r \bar{T}'\left(\xi,s\right)K_2\left(r,\xi,s\right)d\xi.$$

Застосування такого підходу дозволяє ефективно визначати температурне поле в циліндрі за різних залежностей коефіцієнта теплопровідності від радіальної координати та різних крайових умов (2). Крім того, у виразі (3) фігурує лише перша похідна від теплопровідності $\lambda(r)$, що значно покращує ефективність розрахунку температурного поля, порівняно з випадком, коли розв'язується інтегральне рівняння для температури.

З використанням отриманого розв'язку задачі теплопровідності (1), (2) здійснено числовий аналіз температурних полів для різних видів залежності коефіцієнта теплопровідності $\lambda(r)$ і температур $T_1\ (z)$ та $T_2\ (z)$.

1. *Incropera F. P., DeWitt D. P.* Fundamentals of heat and mass transfer. – New York: Wiley, 1985. – 802 p.
2. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наука, 1986. – 544 с.

TEMPERATURE FIELD IN AN INHOMOGENEOUS LONG HOLLOW CYLINDER SUBJECTED TO WITH-RESPECT-TO-LENGTH VARYING THERMAL LOADINGS

A technique for solving a heat-transfer problem for an inhomogeneous long hollow cylinder subjected to with-respect-to-length varying thermal loadings is developed. This technique rests upon the reduction a linear integral equation of the second kind, wherein the derivative of temperature is the quested-for function.