

ПРО ТЕРНАРНІ КВАЗІГРУПОВІ ФУНКЦІЙНІ РІВНЯННЯ НАЙМЕНШОЇ ДОВЖИНИ

Галина Крайнічук¹, Алла Тарасевич²

¹Донецький національний університет ім. В. Стуса, kraynichuk@ukr.net

²Хмельницький національний університет, allatarasevych@gmail.com

Розглядаємо нетривіальні функційні рівняння найменшої довжини. Дано класифікацію таких рівнянь на множині тримісних оборотних функцій з точністю до парастрофно-первинної рівносильності (теорема 1), описано лінійні розв'язки кожного з отриманих рівнянь (теорема 2).

Нехай Q – довільна множина. *Тримісною оборотною* функцією (*тернарною квазігрупою* або *3-квазігрупою* [1]), яка визначена на Q , називають відображення $f: Q^3 \rightarrow Q$, для якого існують тернарні функції f_1, f_2, f_3 , такі, що для всіх $x, y, z \in Q$ виконуються рівності (тобто тотожності):

$$\begin{aligned} f(f_1(x, y, z), y, z) &= x, & f(x, f_2(x, y, z), z) &= y, & f(x, y, f_3(x, y, z)) &= z, \\ f_1(f(x, y, z), y, z) &= x, & f_2(x, f(x, y, z), z) &= y, & f_3(x, y, f(x, y, z)) &= z. \end{aligned}$$

Під *функційним рівнянням* (див. [2, с. 3]) розуміємо рівність двох термів, яка містить функційні і предметні змінні, до того ж усі предметні змінні зв'язані кванторами загальності. Функційні рівняння, які розглядаємо, мають одну тернарну функційну змінну, тобто набувають значень в множині тримісних оборотних функцій (такі рівняння називають *тернарними квазігруповими*). Функційні рівняння називають *парастрофно-первинно рівносильними* [3], якщо одне рівняння з іншого можна отримати за допомогою скінченної кількості застосувань вище зазначених тотожностей. Оскільки множини розв'язків парастрофно-первинно рівносильних рівнянь виражаються одна через другу, тобто маючи множину розв'язків одного рівняння можна легко виписати множину розв'язків парастрофно-первинно рівносильного рівняння до даного, то доцільно здійснити класифікацію функційних рівнянь з точністю до відношення парастрофно-первинної рівносильності. Функційне рівняння називають *тривіальним*, якщо його розв'язки існують лише на одноелементній множині.

Твердження. *Якщо в квазігруповому функційному рівнянні принаймні одна з предметних змінних має одну появу, то це рівняння тривіальне.*

Ми розглядаємо лише функційні рівняння, в яких кожна предметна змінна має принаймні дві появи.

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів**

Довжиною функційного рівняння називаємо суму всіх появ всіх предметних змінних рівняння. *Найменшою довжиною* квазігрупового функційного рівняння називаємо найменше число цієї суми. Оскільки рівняння тернарні, то найменшою довжиною таких рівнянь є довжина 4.

Теорема 1. *Кожне нетривіальне тернарне квазігрупове функційне рівняння найменшої довжини парастрофно-первинно рівносильне точно одному із функційних рівнянь:*

$$F(x, x, x) = x, \quad (1)$$

$$F(x, x, y) = y. \quad (2)$$

Теорема 2. *Лінійна функція $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ над полем P є розв'язком рівняння:*

- (1) тоді і тільки тоді, коли $d = 0, a + b + c = 1$;
- (2) тоді і тільки тоді, коли $d = 0, c = 1, b = -a$.

1. Lijun Ji, Wei R. The spectrum of 2-idempotent 3-quasigroups with conjugate invariant subgroups. // Journal of Combinatorial Designs – 2010. – Vol. 18. № 4. – P. 292-304.
2. Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений // Успехи мат. наук. – 1956. – Т. 11. Выпуск 3 (69). – С. 3-68.
3. Сохацький Ф. М. Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах // Укр. мат. журнал. – 2004. – Т. 56. № 9.– С. 1259-1266.

**ON TERNARY QUASIGROUP FUNCTIONAL EQUATIONS OF THE
SMALLEST LENGTH**

Nontrivial functional equations of the smallest length are considered; some classification of such equations on a set of ternary invertible functions up to parastrophically primary equivalence is given (theorem 1); linear solutions of the obtained functional equations are described (theorem 2).