**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів**

УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА З ВИКОРИСТАННЯМ ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ

Леся Постолакі

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, lesya.postolaki@gmail.com

Розглядається осесиметрична задача теорії пружності для кусково-однорідного циліндра, що складається із двох різнорідних півбезмежних циліндрів $\mathbf{V}^{(1)} = \left(0 \le \xi \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \zeta > 0\right)$ та $\mathbf{V}^{(2)} = \ = \left(0 \le \xi \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \zeta < 0\right)$, з'єднаних торцями. Бічна поверхня циліндра є вільною від навантажень:

$$\sigma_{rr}\big|_{\xi=1} = 0\,, \quad \sigma_{rz}\big|_{\xi=1} = 0\,.$$

У циліндрі діють осесиметричні напруження, зумовлені несумісністю деформацій на межі $\mathbf{S} = \left(0 \le \xi \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \zeta = 0\right)$, де виконуються умови:

$$\left[\sigma_{zz}\left(\xi,0\right)\right] = \sigma\left(\xi\right),\ \left[\sigma_{rz}\left(\xi,0\right)\right] = \tau\left(\xi\right), \tag{1}$$

$$\left[u_z\left(\xi,0\right)\right] = u\left(\xi\right),\ \left[u_r\left(\xi,0\right)\right] = v\left(\xi\right). \tag{2}$$

Тут квадратними дужками позначені стрибки відповідних функцій на межі $\mathbf{S}$, $\sigma\left(\xi\right)$, $\tau\left(\xi\right)$, $u\left(\xi\right)$, $v\left(\xi\right)$ – задані функції.

Для знаходження розв'язку задачі використаємо функцію Лява χ, яка задовольняє однорідне рівняння [1]

$$\nabla^2\nabla^2\chi = 0\,,$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа.

Щоб задовольнити загасання розв'язку в безмежно віддалених точках $\zeta \to \pm\infty$ подамо його у вигляді:

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k^{(1)} \exp\left(-\gamma_k^{(1)}\zeta\right) f_k^{(1)}(\xi) + \bar{L}_k^{(1)} \exp\left(-\bar{\gamma}_k^{(1)}\zeta\right) \bar{f}_k^{(1)}(\xi)\right), & \zeta > 0, \\ \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2}\left(L_k^{(2)} \exp\left(\gamma_k^{(2)}\zeta\right) f_k^{(2)}(\xi) + \bar{L}_k^{(2)} \exp\left(\bar{\gamma}_k^{(2)}\zeta\right) \bar{f}_k^{(2)}(\xi)\right), & \zeta < 0. \end{cases}$$

Тут $L_k^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1,2$) – невідомі комплексні коефіцієнти, риска над буквою означає комплексне спряження. Функція $f_k^{(\lambda)}(\xi)$ виражається через корені трансцендентного рівняння $\gamma_k^{(\lambda)}$ і має вигляд наведений в статті [2].

Для знаходження коефіцієнтів $L_k^{(\lambda)}$ використовуємо варіаційний підхід [2]. Для цього розглядаємо квадратичний функціонал, який визначає середньо-квадратичне відхилення розв'язку від заданих умов (1), (2). Реалізація цього методу зводить задачу до безмежної системи алгебраїчних рівнянь, яку розв'язуємо методом редукції. У доповіді як приклад застосування отриманого розв'язку досліджено концентрацію напружень в околі з'єднання двох різнорідних циліндричних тіл за одновісного розтягу.

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
2. *Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І.* Варіаційний метод однорідних розв'язків у осесиметричній задачі теорії пружності для кусково-однорідного циліндра // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2016. – В. 24. – С. 118-129.

SOLVING OF THE AXISYMETRIC ELASTISITY PROBLEM FOR PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDER USING THE VARIATIONAL METHOD

Variational method is implemented to axisymmetric elasticity problems for piecewise homogeneous elastic cylinder with a free lateral surface. The method is based on representation of the Love strain function as series decomposition by complete system of functions being eigen-functions of elasticity problem for semi-infinite homogeneous cylinder with traction-free lateral surface. The implementation reduces the problem to the infinite system of algebraic equations, which is solved by reduction. Obtained solution is used to study stress concentration in vicinity of joint of two dissimilar materials.