

УДК 517.5

## ОЦІНКИ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Михайло Гембарський, Оксана Федунік-Яремчук,  
Світлана Гембарська

Волинський національний університет імені Лесі Українки,  
hembarskyi@gmail.com, fedunyk.o.v@gmail.com, gembarskaya72@gmail.com

Досліджуються класи  $B_{p,\theta}^\Omega$  періодичних функцій однієї та багатьох змінних [1], де  $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$ ,  $\omega$  – задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку  $l$ , що задовольняє умови  $(S^\alpha)$  та  $(S_l)$ , які називаються умовами Барі-Стечка [2]. При певному виборі функції  $\Omega$  класи  $B_{p,\theta}^\Omega$  співпадають із аналогами відомих класів Нікольського-Бесова  $B_{p,\theta}^r$  [3].

Нехай  $L_\infty(\pi_d)$ ,  $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0; 2\pi)$ , – простір  $2\pi$ -періодичних за кожною змінною суттєво обмежених функцій  $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$  зі стандартною нормою.

Одержано точні за порядком оцінки близьких до Фур'є-поперечників апроксимаційних характеристик класів  $B_{p,\theta}^\Omega$  у просторі  $B_{\infty,1}$ , норма в якому є більш сильною, ніж  $L_\infty$ -норма. Для функціональних класів  $B_{p,\theta}^\Omega \subset B_{\infty,1}$  ці величини означаються наступним чином

$$d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, B_{\infty,1}) = \inf_{G \in L_M(B)_\infty} \sup_{f \in B_{p,\theta}^\Omega \cap D(G)} \|f - Gf\|_{B_{\infty,1}},$$

де  $L_M(B)_\infty$  позначає множину лінійних операторів, що задовольняють умови:

а) область визначення  $D(G)$  цих операторів містить усі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності  $M$  простору  $B_{\infty,1}$ ;

б) існує число  $B \geq 1$  таке, що для всіх векторів  $k = (k_1, \dots, k_d)$ ,  $k_j \in \mathbb{Z}$ ,  $j = \overline{1, d}$ , виконується нерівність  $\|Ge^{i(k,\cdot)}\|_2 \leq B$ .

Сформулюємо деякі з одержаних результатів.

**Теорема 1.** *Нехай  $d \geq 2$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$ , де  $\omega$  задовольняє умову  $(S^\alpha)$  із  $\alpha > 1$  і умову  $(S_l)$ . Тоді для будь-яких  $M, n \in \mathbb{N}$  таких, що  $M \asymp 2^n n^{d-1}$ , виконується співвідношення*

$$d_M^B(B_{1,\theta}^\Omega, B_{\infty,1}) \asymp \omega(2^{-n})2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

**Теорема 2.** *Нехай  $d = 1$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $\omega$  задовольняє умову  $(S^\alpha)$  із  $\alpha > 1$  і умову  $(S_l)$ . Тоді виконується співвідношення*

$$d_M^B(B_{1,\theta}^\omega, B_{\infty,1}) \asymp \omega(M^{-1})M.$$

Зауважимо, що в одновимірному випадку, на відміну від багатовимірного, оцінки розглянутих апроксимаційних характеристик не залежать від параметра  $\theta$ .

1. *Yongsheng S., Heping W.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Tr. Mat. Inst. Steklova. – 1997. – № 219. – С. 356–377.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – № 5. – С. 483–522.
3. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1989. – № 187. – С. 143–161.

## ESTIMATES OF APPROXIMATIVE CHARACTERISTICS OF THE CLASSES OF PERIODIC FUNCTIONS OF ONE AND SEVERAL VARIABLES

*We study the classes  $B_{p,\theta}^\Omega$  of periodic functions of one and several variables with  $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$ , where  $\omega$  is a given function (of one variable) of the type of a modulus of continuity of order  $l$  that satisfies the conditions  $(S^\alpha)$  and  $(S_l)$ , which are called the Bari-Stechkin conditions. For a certain choice of function  $\Omega$ , the classes  $B_{p,\theta}^\Omega$  coincide with analogs of the well-known Nikol'skii-Besov classes  $B_{p,\theta}^r$ . We obtain exact order estimates of similar to the Fourier-widths approximative characteristics of the classes  $B_{p,\theta}^\Omega$  in the space  $B_{\infty,1}$ , which norm is stronger than the  $L_\infty$ -norm. We note that in the one-dimensional case, in contrast to the multidimensional one, the obtained estimates of the considered approximative characteristics are independent of the parameter  $\theta$ .*