

УДК 517.957

## ГРУПОВИЙ АНАЛІЗ КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬОВИХ ТА ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Олена Ванеєва

Інститут математики НАН України, vaneeva@imath.kiev.ua

Вичерпно розв'язано задачу групової класифікації для ненормалізованого класу нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь

$$u_{tt} = f(x, u)u_{xx} + g(x, u), \quad (f_u, g_{uu}) \neq (0, 0). \quad (1)$$

Для цього використано нову версію алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь, що базується на класифікації допустимих перетворень у класі з точністю до групи еквівалентності цього класу, й побудові породжувальної множини допустимих перетворень. Зауважимо, що клас (1) не можна розбити на нормалізовані підкласи. Вичерпне розв'язання задачі групової класифікації включає виконання повної попередньої групової класифікації, а також побудову сингулярних розширень ліївської симетрії, які не пов'язані з підалгебрами алгебри еквівалентності класу [1].

Алгебру еквівалентності  $\mathfrak{g}^{\sim}$  класу (1) утворюють оператори

$$\partial_t, \quad t\partial_t - 2f\partial_f - 2g\partial_g, \quad u\partial_u + g\partial_g, \\ \zeta\partial_x + \frac{1}{2}\zeta_x u\partial_u + 2\zeta_x f\partial_f + \frac{1}{2}(\zeta_x g - \zeta_{xx} u f)\partial_g, \quad \chi\partial_u - \chi_{xx} f\partial_g,$$

де  $\zeta = \zeta(x)$ ,  $\chi = \chi(x)$  — гладкі функції змінної  $x$ .

Алгебраїчним методом спочатку знайдено всі регулярні випадки розширення ліївської симетрії, що асоційовані з підалгебрами алгебри еквівалентності  $\mathfrak{g}^{\sim}$  класу (1). Також знайдено всі сингулярні випадки розширення ліївської симетрії.

**Лема 1.** *Повний перелік  $G^{\sim}$ -нееквівалентних сингулярних розширень алгебри  $\mathfrak{g}^{\sim} = \langle \partial_t \rangle$  ядра основних груп ліївської симетрії рівнянь з класу (1) вичерпують випадки рівнянь із довільними елементами виду  $f = \varepsilon = \pm 1$ ,  $g = g^1(x)g^2(u)$ , наведеними в табл. 1.*

Об'єднання регулярних і сингулярних випадків розширення ліївської симетрії у класі (1) дає повний розв'язок задачі групової класифікації для цього класу.

Табл. 1: Сингулярні розширення лівської симетрії у класі (1).

$f$	$g$	Базис розширення
$\varepsilon$	$\hat{g}(u)$	$\partial_x, x\partial_t + \varepsilon t\partial_x$
1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t}), \mathcal{R}(e^{x-t})$
-1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x \cos t), \mathcal{R}(e^x \sin t)$
$\varepsilon$	$\hat{g}(u)x^{-2}$	$t\partial_t + x\partial_x, (t^2 + \varepsilon x^2)\partial_t + 2tx\partial_x$
1	$\hat{g}(u) \cos^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \cos x), \mathcal{R}(\sin t \cos x)$
1	$-\hat{g}(u) \cosh^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \cosh x), \mathcal{R}(e^{-t} \cosh x)$
1	$\hat{g}(u) \sinh^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \sinh x), \mathcal{R}(e^{-t} \sinh x)$
-1	$\hat{g}(u) \cos^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \cos x), \mathcal{R}(e^{-t} \cos x)$
-1	$\hat{g}(u) \sinh^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \sinh x), \mathcal{R}(\sin t \sinh x)$
-1	$\hat{g}(u) \cosh^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \cosh x), \mathcal{R}(\sin t \cosh x)$
$\varepsilon$	$\varepsilon' u ^q$	$\partial_x, t\partial_x + \varepsilon x\partial_t, (q-1)t\partial_t + (q-1)x\partial_x - 2u\partial_u$
1	$\varepsilon' u ^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t}), \mathcal{R}(e^{x-t}), (q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
-1	$\varepsilon' u ^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x \cos t), \mathcal{R}(e^x \sin t), (q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
$\varepsilon$	$\varepsilon'e^u$	$\tau\partial_t + \xi\partial_x - 2\tau_t\partial_u$

Тут  $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1 \pmod{G^\sim}$ ,  $q$  – довільна стала, причому  $q \neq 0, 1$ ,  $\mathcal{R}(\Phi) := \Phi_x\partial_t + \Phi_t\partial_x$ ;  $\tau = \tau(t, x)$ ,  $\xi = \xi(t, x)$  – довільні гладкі функції, що задовольняють систему  $\tau_t = \xi_x$ ,  $\xi_t = \varepsilon\tau_x$ .

1. Vaneeva O., Bihlo A., Popovych R. O. Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2020. – V. 91. – 105419.

## Group analysis of a class of nonlinear wave and elliptic equations

*After extending the algebraic method of group classification to non-normalized classes of differential equations, we solve the complete group classification problem for the class of nonlinear wave and elliptic equations  $u_{tt} = f(x, u)u_{xx} + g(x, u)$ ,  $(f_u, g_{uu}) \neq (0, 0)$ . The solution includes the complete preliminary group classification of the class and the construction of singular Lie-symmetry extensions, which are not related to subalgebras of the equivalence algebra. The complete preliminary group classification is based on classifying appropriate subalgebras of the entire infinite-dimensional equivalence algebra whose projections are qualified as maximal extensions of the kernel invariance algebra. The results obtained can be used to construct exact solutions of nonlinear wave and elliptic equations.*