

УДК 517.956.25

СИЛЬНО СИНГУЛЯРНІ ТА ВЕЛИКІ РОЗВ'ЯЗКИ НАПІВЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Євгенія Євгенєва

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
yevgeniia.yevgenieva@gmail.com

Нехай Ω — обмежена C^2 область в \mathbb{R}^N , $N \geq 2$. Розглянемо граничну задачу для напівлінійного еліптичного рівняння:

$$-\Delta u + H(x)u^q = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad q > 1, \quad H(x) \geq 0 \quad \forall u \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1)$$

$$u = k\delta_a \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \delta_a \text{ — міра Дірака, } k > 0, \quad a \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Вивчається розв'язок $u_\infty(t, x)$ рівняння (1), який задовольняє умові (2) з $k = \infty$ у такому сенсі: $u_\infty(0, x) = 0 \quad \forall x : |x| > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\infty(t, x) dx = \infty$. Розв'язок u_∞ називається сильно сингулярним розв'язком (very singular solution).

Питання існування таких розв'язків досліджувалось багатьма авторами, зокрема, Н. Brezis, А. Friedman, L.A. Peletier, D. Terman (для параболических рівнянь), М. Marcus, L. Veron, А. Gmira, А. Ratto, М. Rigoli (для еліптичних рівнянь) тощо.

У роботі [1] отримано наступний результат.

Теорема 1. *Нехай $1 < q < 1 + \frac{2}{N-1}$ і потенціал $H(\cdot)$ задовольняє нерівність:*

$$0 \leq H(x) \leq ch(\rho(x)) \quad \text{in } \Omega,$$

де $h(s) = \exp\left(-\frac{\omega(s)}{s}\right)$ і неспадна функція $\omega(\cdot) > 0$: $\omega(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$, задовольняє технічній умові:

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mu(2^{-j+1})\mu(2^{-j})^{-1} < 1, \quad \mu(s) := \frac{\omega(s)}{s}.$$

Тоді за умови

$$\int_0^1 \frac{\omega(s)}{s} = \infty \quad (3),$$

розв'язок $u_\infty(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ є великим розв'язком, тобто

$$\lim_{x \rightarrow y} u_\infty(x) = \infty \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів**

Таким чином для $q \in (1, 1 + \frac{2}{N-1})$ умова Діні (3) є критерієм існування сильно сингулярного розв'язку задачі (1), (2).

Зауваження 1. Умова Діні є достатньою умовою єдиності великого розв'язку рівняння. Імовірно, що умова Діні є також і необхідною умовою єдиності великого розв'язку.

1. *Shishkov A., Yevgenieva Ye.* Very singular and large solutions of semilinear elliptic equations with degenerate absorption. 2021. Submitted.

**VERY SINGULAR AND LARGE SOLUTIONS OF
SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS**

Semilinear elliptic equation with degenerate absorption with singular boundary value is studied. The criterion for existence of very singular solution of the problem is obtained.