**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»,
27–29 травня 2024 р., Львів**

УДК 539.3

ДИФРАКЦІЯ *SH*-ХВИЛЬ НА ПЕРІОДИЧНІЙ СИСТЕМІ ТОНКИХ НЕКОНТРАСТНИХ П’ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Роман Андрійчук, Роман Рабош, Юлія Максимів

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН Україн*

andriychukroman@gmail.com

В даній доповіді із застосуванням методу сингулярних збурень отримано модель взаємодії пружної матриці із системою колінеарних періодично розташованих п’єзоелектричних тонких неконтрастних включень постійної товщини. Дослідження проведено за умов антиплоского хвильового навантаження.

Розглянемо двовимірну стаціонарну задачу розсіяння *SH*-хвилі одноперіодичним масивом колінеарних п’єзоелектричних тонких включень постійної товщини, розташованих в безмежному пружному ізотропному тілі (матриці). Включення мають однаковий розмір, пружні та електричні властивості. Повне поле переміщень $u(\mathbf{x},\omega)$ у матриці є суперпозицією падаючого поля $u^{in}(\mathbf{x},\omega)$ та розсіяних полів $u_n^{sc}(\mathbf{x},\omega)$ ($n=0,\pm1\pm,\pm2,\cdots$)

$$u(\mathbf{x},\omega)=u^{in}(\mathbf{x},\omega)+u_0^{sc}(\mathbf{x},\omega)+u^{E}(\mathbf{x},\omega), \quad u^{E}(\mathbf{x},\omega)=\sum_{n\neq0}u_n^{sc}(\mathbf{x},\omega), \qquad (1)$$

де $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ – декартові координати з початком у геометричному центрі центрального розсіювача ($n=0$); ω – кругова частота гармонічних коливань.

Складові у (1) задовольняють рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2^2}+k^2u(\mathbf{x},\omega)=0, \qquad \mathbf{x}\in W_1. \qquad (2)$$

Рух у включеннях описують рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+k_0^2\right]u_n^0(\mathbf{x},\omega)=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\left[u_n^0(\mathbf{x})-\frac{\varepsilon_{11}^0}{e_{15}^0}\varphi_n^0(\mathbf{x})\right]=0, \quad |n|=\overline{0,\infty}, \quad \mathbf{x}\in W_0, \qquad (3)$$

де $W_0=\{(x_1,x_2):-a+2nd\le x_1\le a+2nd,-h\le x_2\le h,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$; $2a$, $2h$ та $2d$ – довжина, товщина та період розташування включень; $W_1=R^2\setminus W_0$;

$\varphi_n^0(\mathbf{x})$ – електричний потенціал у включеннях; $k = \omega \setminus c$ та $k_0 = \omega \setminus c_0$ хвильові числа у матриці та включенні, а $c = \sqrt{\mu / \rho}$ та $c_0 = \sqrt{c_{44}^0\left(1+\eta^2\right)/\rho_0}$ відповідно швидкості хвиль зсуву у них; μ, c_{44}^0 – модулі зсуву; ρ, ρ_0 – густини; $\eta = e_{15}^0 \big/ \sqrt{c_{44}^0\, \varepsilon_{11}^0}$ – коефіцієнт електромеханічного зв'язку; e_{15}^0 та ε_{11}^0 – п'єзоелектрична стала та діелектрична проникність матеріалу п'єзокерамічного включення.

Оскільки усі включення перебувають в однакових умовах хвильового навантаження, то їх взаємодію із матрицею досліджуємо на прикладі центрального розсіювача, на поверхні якого мають місце умови неперервності переміщень і напружень та електричної ізольованості

$$u(\mathbf{x},\omega) = u_0^0(\mathbf{x},\omega), \qquad \frac{\partial u(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2} = \gamma \frac{\partial u_0^0(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(u_0^0(\mathbf{x}) - \varepsilon_{11}\varphi_0^0(\mathbf{x})\right) = 0, \qquad |x_1| \le a, \qquad x_2 = \pm h, \tag{4}$$

де $\gamma = c_{44}^0 / \mu$. Виконується також умова випромінювання при $|x_2| \to \infty$, яка полягає в тому, що розсіяне поле поширюється в напрямку на безмежність.

Зазвичай, взаємодію тонкостінних елементів композиту із матрицею моделюють ефективними умовами контакту. Для отримання такої моделі задачі застосуємо метод сингулярних збурень. Вважаємо, що

$$\varepsilon = h/a \ll 1, \quad k_0 h \ll 1, \quad kh \ll 1, \quad \varepsilon < \gamma < 1/\varepsilon, \tag{5}$$

де ε – малий безрозмірний параметр, що характеризує відносну товщину неоднорідності. Умова $\varepsilon < \gamma < 1/\varepsilon$ вказує на те, що жорсткість включення того ж порядку, що і жорсткість матриці (неконтрастне включення): $\gamma = const$ коли $\varepsilon \to 0$. За таких припущень переміщення у матриці та включенні шукаємо у вигляді асимптотичних розкладів за малим параметром

$$u_0^{sc}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_0^{sc(j)}(\mathbf{x},\omega), \quad u^E(\mathbf{x},\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u^{E(j)}(\mathbf{x},\omega), \quad \varepsilon \to 0,$$

$$u_0^0(\mathbf{x},\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_0^{0(j)}(x_1, \bar{x}_2, \omega),$$

$$\varphi_0^0(\mathbf{x},\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_0^{0(j)}(x_1, \bar{x}_2, \omega), \quad x_2 = \varepsilon \bar{x}_2, \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

Отримавши ефективні умови контакту, які з точністю до величин порядку ε^2 моделюють взаємодію матриці та періодичної множини тонких включень розв'язок задачі (1)–(4) отримаємо із застосуванням перетворення Фур'є.

SH-WAVE DIFFRACTION ON A PERIODIC SYSTEM OF THIN NON-CONTRAST PIEZO-CERAMIC INCLUSIONS

In this report, using the singular perturbation method, a model of the interaction of an elastic matrix with a system of collinear periodically located piezoelectric thin non-contrast inclusions of constant thickness was obtained. The study was carried out under conditions of anti-plane wave loading.