**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»**
**27–29 травня 2024 р., Львів**

УДК 517.5

# АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ДІАМЕТРА ОБРАЗУ КУЛІ

**Руслан Салімов, Богдан Кліщук**

Інститут математики НАН України, kban1988@gmail.com

Нехай задано сім'ю $\Gamma$ кривих $\gamma$ в просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для $\Gamma$, пишуть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \;\geqslant\; 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$. Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді *$p$–модулем* сім'ї $\Gamma$ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Тут $m$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для довільних множин $E$, $F$ і $G$ в $\mathbb{R}^n$ позначимо через $\Delta(E, F; G)$ сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують $E$ та $F$ в $G$, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n :\, |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1,\, 2\,.$$

Позначимо через $\Gamma = \Delta(S_1, S_2; \mathbb{A})$ сім'ю всіх кривих, які з'єднують сфери $S_1 = S(x_0, r_1)$ і $S_2 = S(x_0, r_2)$ у кільці $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$.

Нехай $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $p > 1$ та $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є кільцевим $Q$-гомеоморфізмом відносно $p$-модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2; fD)) \;\leqslant\; \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1\,.$$

Нехай $\omega_{n-1}$ — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$ — середнє інтегральне значення по сфері $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \, |x - x_0| = r\}$, $d\mathcal{A}$ — элемент площі поверхні.

Для множини $E \subset \mathbb{R}^n$ будемо позначати через $\operatorname{diam} E$ її евклідовий діаметр.

**Теорема 1.** *Припустимо, що $x_0$ — деяка точка в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, та $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для м.в. $r > 0$. Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий $Q$-гомеоморфізм відносно $p$-модуля в точці $x_0$ при $p > n$, $r_0 > 0$. Тоді виконується оцінка*

$$\liminf_{R\to\infty} \operatorname{diam} f(\overline{B(x_0,R)}) \left( \int_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{-\frac{p-1}{p-n}} \geqslant 2 \left( \frac{p-n}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p-n}},$$

*де $B(x_0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}$.*

## THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE DIAMETER OF THE IMAGE OF THE BALL

*The asymptotic behavior at infinity of the diameter of the image of the ball under the ring $Q$-homeomorphisms with respect to the $p$-modulus for $p > n$ in the space $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, have been investigated.*