Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»
27–29 травня 2024 р., Львів

УДК 517.988

МЕТОД ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ З МИНУЛОГО ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Олександра Коваленко, Володимир Семенов, Олег Харьков

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
{alexandra.kovalenko2000, semenov.volodya, olehharek}@gmail.com

Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та породженою нормою $\|\cdot\|$. Розглядається варіаційна нерівність:

$$\text{знайти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

де C – непорожня опукла та замкнена підмножина простору H, $A : H \to H$ – монотонний та ліпшицевий (зі сталою $L > 0$) оператор. Множину розв'язків варіаційної нерівності (1) позначимо через S.

Задача (1) – зручна загальна форма запису різних задач, що виникають в математичній фізиці, оптимальному керуванні та дослідженні операцій.

Для розв'язання (1) розглянемо такий метод [1–3]: задаємо $x_1 = y_0 \in C$ та генеруємо послідовність елементів x_n, $y_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A y_{n-1}\right), \\ x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda_n A y_n\right), \end{cases} \tag{2}$$

де $\lambda_n > 0$.

Мають місце такі результати [2, 3].

Теорема 1. *Нехай $S \neq \emptyset$. Припустимо, що $\lambda_n \in \left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] \subseteq \left(0, \frac{1}{3L}\right)$. Тоді породжені методом (2) послідовності (x_n), (y_n) слабко збігаються до розв'язку $\bar{z} \in S$ варіаційної нерівності (1), причому $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.*

Теорема 2. *Нехай $C \subseteq H$ – непорожня опукла замкнена обмежена множина. Нехай (y_n) – послідовність, що породжена методом (2) з $\lambda_n = \frac{1}{3L}$, тобто,*

$$\begin{cases} x_1 = y_0 \in C, \\ y_n = P_C\left(x_n - \frac{1}{3L} A y_{n-1}\right), \\ x_{n+1} = P_C\left(x_n - \frac{1}{3L} A y_n\right). \end{cases}$$

Тоді для послідовності середніх $z_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n$ має місце оцінка

$$\operatorname{gap}(z_N) = \sup_{y \in C} (Ay, z_N - y) \leq \frac{3L \sup_{y\in C} \|x_1 - y\|^2}{2N}.$$

Теорема 3. *Нехай* $A : H \to H$ *– рівномірно монотонний на обмежених підмножинах множини* $C \subseteq H$ *та* L*-ліпшицевий на множині* C *оператор,* $\bar{z} \in C$ *– єдиний розв'язок варіаційної нерівності* (1)*. Припустимо, що* $\lambda_n \in \left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] \subseteq \left(0, \frac{1}{3L}\right)$*. Тоді породжені методом* (2) *послідовності* (x_n)*,* (y_n) *сильно збігаються до* $\bar{z}$*.*

Подібні результати отримані для методу екстраполяції з минулого з адаптивним вибором λ_n [3]: обираємо елементи $x_1 = y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 > 0$. Покладаємо $n = 1$.

1. Обчислити
$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_{n-1}).$$
2. Обчислити
$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$
Якщо $x_{n+1} = x_n = y_n$, то зупинити та x_n – розв'язок. Інакше перейти на крок 3.
3. Обчислити
$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } (Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \le 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \frac{\tau}{2}\frac{\|y_{n-1}-y_n\|^2 + \|x_{n+1}-y_n\|^2)}{(Ay_{n-1}-Ay_n, x_{n+1}-y_n)}\right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$
Покласти $n := n + 1$ та перейти на 1.

Робота виконана за фінансової підритмки МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026) та НАН України (проєкт «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії», 0124U002162).

1. *Malitsky Yu. V., Semenov V. V.* An extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – Vol. 50. – P. 271–277.
2. *Семенов В. В.* Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2021. – 167 с.
3. *Семенов В. В., Харьков О. С.* Алгоритм екстраполяції з минулого для варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі // Журнал обчислислювальної та прикладної математики. – 2023. – № 2. – С. 52–82.

EXTRAPOLATION FROM THE PAST FOR VARIATIONAL INEQUALITIES

The report considers variational inequalities with monotone operators acting in a Hilbert space. For these problems, variants of the Extrapolation from the Past method have been proposed and studied. A sub-linear efficiency bound for the gap function is proved. The strong convergence of the Extrapolation from the Past method for variational inequalities with uniformly monotone operators is proved. An adaptive version of the algorithm is proposed.