Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024», 27–29 травня 2024 р., Львів

УДК 517

КРАЙОВА ЗАДАЧА З МІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

Софія Репетило

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,

RepetyloSofiya@gmail.com

В області $Q_T^p = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T,\ x \in \Omega^p\}$, де $T > 0$, Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $p \in \mathbb{N}$, розглянуто задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} \sum_{|s|\le\omega} A_{rs}\,\frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \qquad (1)$$

$$\left.\partial^{2j-2}u(t,x)/\partial t^{2j-2}\right|_{t=0} = 0,\ \left.\partial^{2j-1}u(t,x)/\partial t^{2j-1}\right|_{t=T} = 0,\ \ j = 1,\dots,n, \qquad (2)$$

де $u(t,x) = \mathrm{col}\left(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x)\right)$, $f(t,x) = \mathrm{col}\left(f_1(t,x),\dots,f_m(t,x)\right)$, $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s|\le 2l} B_s\,\frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}$ – матричний еліптичний оператор, $B_s = \left[b_{hq}^s\right]_{h,q=1}^m$, $b_{hq}^s \in \mathbb{C}$, $A_{rs} = \left[a_{hq}^{rs}\right]_{h,q=1}^m$, $a_{hq}^{rs} \in \mathbb{C}$, $s = (s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$. Вигляд області Q_T^p накладає умови 2π-періодичності за просторовими координатами на функції $u(t,x)$ та $f(t,x)$.

Позначимо: $H_q(\Omega^p)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір 2π-періодичних комплекснозначних функцій $v(x) = \sum_{|k|\ge 0} v_k \exp(ik,x)$ з нормою

$$\left\|v; H_q(\Omega^p)\right\|^2 := \sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^q\,|v_k|^2;$$

$C^l([0,T],H_q(\Omega^p))$, $q\in\mathbb{R}$, $l\in\mathbb{Z}_+$, – простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ функції $\partial^r v(t,x)/\partial t^r$, $r\in\{0,1,\dots,l\}$, належать простору $H_{q-r}(\Omega^p)$ і є неперервними за t у нормі цього простору

$$\left\|v;C^l([0,T],H_q(\Omega^p))\right\|:=\sum_{r=0}^{l}\max_{0\le t\le T}\left\|\frac{\partial^r v}{\partial t^r};H_{q-r}(\Omega^p)\right\|;$$

$\bar{C}^l([0,T],H_q(\Omega^p))$, $q\in\mathbb{R}$, $l\in\mathbb{Z}_+$, – простір вектор-функцій $v(t,x)=(v_1(t,x),\dots,\quad \dots,v_m(t,x))$, для яких $v_j\in C^l([0,T],H_q(\Omega^p))$, $j\in\{1,\dots,m\}$, з нормою

$$\left\|v;\bar{C}^l([0,T],H_q(\Omega^p))\right\|^2:=\sum_{j=1}^{m}\left\|v_j;C^l([0,T],H_q(\Omega^p))\right\|^2;$$

Позначимо $\lambda_j(k)$, $j\in\{1,\dots,nm\}$, – корені (за припущенням різні та відмінні від нуля) рівняння

$$\det\left[\sum_{|s|\le 2l}B_s(ik_1)^{s_1}\cdots(ik_p)^{s_p}\lambda^n+\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{|s|\le\omega}A_{sr}(ik_1)^{s_1}\cdots(ik_p)^{s_p}\lambda^r\right]=0;$$

$$\eta_j(k)=\sqrt{|\lambda_j(k)|}\exp\left(i\arg\lambda_j(k)/2\right),\ \arg\lambda_j(k)\in[-\pi,\pi).$$

Теорема 1. *Для єдиності розв’язку задачі* (1)*,* (2) *у просторі* $\bar{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k\in\mathbb{Z}^p,\ \ \forall h\in\mathbb{Z})\qquad i\eta_j(k)T\ne\pi(h+1/2),\qquad j\in\{1,\dots,nm\}.\quad (3)$$

Вважаючи, що умови (3) виконуються, побудовано формальний розв’язок задачі (1), (2) у вигляді векторного ряду за системою ортогональних функцій та встановлено умови його існування у шкалі просторів $\bar{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв’язку задачі, використано метричний підхід.

Для систем рівнянь із частинними похідними, розв’язаних відносно старшої похідної за часовою змінною, задачі з умовами (2) досліджувались, зокрема, у працях [2, 3]. Дана робота є дотичною до роботи [1], у якій для систем рівнянь типу (1) розглянуто задачу типу Діріхле та встановлено умови існування та єдиності її класичних розв’язків та розв’язків у просторах періодичних функцій експоненційного типу.

1. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.
2. *Пташник Б.Й., Репетило С.М.* Задача Діріхле-Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – Т. 57, № 2. – С. 25–31.
3. *Пташник Б.Й., Репетило С.М.* Задача Діріхле-Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 7–14.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR THE SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS NOT SOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER ORDER TIME DERIVATIVE

In the limited cylindrical domain the problem with Dirichlet – Neumann conditions with respect to time variable and the conditions of periodicity with respect to spatial coordinates for the systems of hight-order partial differential equations with constant coefficients not solved with respect to the higher order time derivative is investigated. The conditions of unique solvability of this problem in Sobolev spaces are established and its solution in the form of a vector series based on the system of orthogonal functions is constructed. For estimations from below of small denominators that appeared during construction of solution of the problem the metric approach is used.