Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»,
27–29 травня 2024 р., Львів

УДК 539.3

ФРИКЦІЙНА ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНИХ ТІЛ З ОБЛАСТЯМИ КОНТАКТУ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Ольга Соляр

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, вул. Наукова, 3б

solyarolya@gmail.com

Тривимірні контактні задачі для гладких штампів (за відсутності тертя) добре вивчені в літературі, при цьому для широкого класу задач розв'язки отримані в аналітичному вигляді [1]. Для дослідження фрикційних контактних задач, як правило використовують числові методи. У роботі наведено числово-аналітичний алгоритм, який базується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь-нерівностей Сіньйоріні [2] та квадратичного програмування.

Розглядається контактна задача про взаємодію двох пружних тіл, коли взаємодія відбувається з тертям і дотичні напруження в області контакту описуються за законом Кулона. Позначимо пружні характеристики першого тіла через E_1, ν_1 і рівняння його форми в області контакту описується рівнянням $z = f_1(x, y)$, аналогічно для другого тіла E_2, ν_2, $z = f_2(x, y)$, причому вісь z направлена вверх у першому випадку та вниз у другому.

Основні співвідношення. Інтегральне рівняння широкого кола контактних задач про взаємодію пружних тіл зводиться до такого вигляду

$$\iint_D \left(K(x-\xi,\, y-\eta)\right)\sigma(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta = F(x,y) + w_0\,, \qquad (1)$$

де $F(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)$, $D-$ область контакту, $\sigma(\xi,\,\eta)$ – контактні напруження, $\xi,\,\eta \in D$, $-\infty < x, y < +\infty$ [1]. Функція $K(x,y)$ визначається через відповідні фундаментальні розв'язки. Зокрема для випадку контактної взаємодії тіл великих розмірів

$$K(x,y) = \lambda\frac{1}{R} + \beta\frac{x-\xi}{R^2}\,. \qquad (2)$$

Тут $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, параметри $\lambda,\,\beta$ мають вигляд [1],

$$\lambda = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu^2{}_2}{E_2}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-\nu_1}{G_1}+\frac{1-\nu_2}{G_2}\right),\quad \beta = \frac{k}{4\pi}\left(\frac{1-2\nu_1}{G_1}+\frac{1-2\nu_2}{G_2}\right),$$

k – коефіцієнт тертя, G_1, G_2 – модулі зсуву, ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона.

Тут і далі розглянуто випадок, коли дотичні напруження діють в напрямку осі Ox.Для фрикційних задач області контакту, як правило наперед невідомі і тому для їх розв'язування використовуються числові методи. Використаємо підхід Сіньйоріні [2]. У цьому підході вводиться в розгляд область S, яка вміщує в собі область контакту D. Довизначаємо функцію $\sigma(x, y)$ в області S поза областю D поклавши її тут рівною нулю. Умови для контактної задачі в області S записуються у вигляді інтегральних рівнянь-нерівностей

$$\int_S \sigma(\xi,\eta)K(x-\xi, y-\eta)d\xi d\eta - F(x,y) - w_0 = 0, \quad (x,y)\in D\ (\sigma<0), \tag{3}$$

$$\int_S \sigma(\xi,\eta)K(x-\xi, y-\eta)d\xi d\eta - F(x,y) - w_0 \le 0, \quad (x,y)\in S\backslash D\ (\sigma=0), \tag{4}$$

Тобто, при невідомій наперед області контакту має місце інтегральне рівняння-нерівність

$$\int_S \sigma(\xi,\eta)K(x-\xi, y-\eta)d\xi d\eta - F(x,y) - w_0 \le 0, \quad \sigma\le 0,\ (x,y)\in S. \tag{5}$$

Домножимо ліву і праву частини співвідношення (5) на величину σ і проінтегруємо по області S. Вважаючи при цьому, що функція σ задовольняє умови (3), (4), тоді отримуємо

$$J \ge 0,$$

де

$$J = \int_S\int_S \sigma(x,y)\sigma(\xi,\eta)K(x-\xi, y-\eta)dS_{\xi\eta}dS_{xy} - \\ -\int_S \sigma(x,y)F(x,y)dS - w_0\int_S \sigma(\xi,\eta)dS. \tag{6}$$

За побудовою величина $\boldsymbol{J}$ є додатною і на розв'язку контактної задачі (1) дорівнює нулю. Тобто, розв'язування контактної задачі зводиться до знаходження мінімального значення величини (6) за виконання умов (3), (4).

Сформульована задача є задачею квадратичного програмування. У частковому випадку, коли штамп гладкий контактна задача зведена до задачі квадратичного програмування в [3] іншим методом. Розв'язавши цю задачу знаходимо ділянки контакту і розподіл тисків на них. З використанням розробленого алгоритму розглянуто фрикційні контактні задачі про взаємодію двох тіл, що мають форму шару і циліндричного жолуба, роликового підшипника і кругового жолуба, двох циліндрів, розташованих навхрест та ін. Для цих тіл функція, яка описує геометрію областей в околі контакту тіл має вигляд $F(x, y) = Ax^2 + By^2$ [1]. При виборі області S у першому наближенні використовувались розв'язки контактних задач для гладких штампів, які отримані в літературі в аналітичному вигляді [1]. Далі ці області уточнювали за врахування тертя. При розв'язуванні задачі враховано, що контактні тиски є симетричними відносно осі Ox, що дозволило зменшити кількість невідомих у системі рівнянь-нерівностей.

Розрахунки проведено при різних значеннях A і B, різних значеннях взаємного проникнення (w_0), різних значеннях коефіцієнтів тертя (k) та Пуассона (ν). Проведено дослідження достовірності отриманих числово результатів. Показано, що для випадку гладкого штампа знайдений числово розв'язок добре узгоджується з наведеним в літературі аналітичним розв'язком. Для випадків контактування тіл з тертям з метою перевірки достовірності визначалась форма здеформованих поверхонь тіл, яка виникає від дії знайдених контактних тисків. Показано, що розраховані таким чином форми поверхонь задовольняють умовам контакту, на основі яких розв'язувалась задача.

Отже, побудовано чисельний алгоритм розв'язування фрикційної контактної задачі про взаємодію двох тіл. Алгоритм грунтується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь-нерівностей та квадратичного програмування. Показано, що розроблений алгоритм, є ефективним і дає змогу розв'язувати фрикційні контактні задачі про взаємодію двох тіл з контрольованою точністю.

1. *Галин Л.А* Контактные задачи упругости и вязкоупругости. Москва: Наука, 1980.
2. *Signorini A*. Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearzzata // Rend. di Matem. e delle sue appl. – 1959. – 18, № 1 -2. – P. 95-139.
3. *Kalker,* JoostJacques. Rolling contact phenomena: linear elasticity. Springer Vienna, 2000.

FRICTIONAL INTERACTION OF ELASTIC BODIES WITH COMPLEX CONTACT AREAS

A numerical algorithm for solving frictional contact problem of interaction bodies with complex contact areas is presented. The contact problem is formulated in the form of Signorini integral equations-inequalities, which, using quadrature formulas for singular integrals, are transformed into a system of linear algebraic equations-inequalities. Solving the system is reduced to finding the minimum of the quadratic form under linear constraints on the unknown contact stresses.