Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»
27–29 травня 2024 р., Львів

УДК 517.5

ЛОКАЛЬНА ГЕЛЬДЕРОВІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ БЕЛЬТРАМІ

[1]Ігор Пєтков, [2]Руслан Салімов, [3]Марія Стефанчук

[1]Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова,
[2,3]Інститут математики НАН України,
[1]igorpetkov83@gmail.com, [2]ruslan.salimov1@gmail.com,
[3]stefanmv43@gmail.com

Нехай G — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і $\mu : G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння

$$f_{\bar{z}} = \mu(z)\, f_z\,, \tag{1}$$

де $f_{\bar{z}} = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x і f_y— частинні похідні відображення f по x та y, відповідно. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом.*

Нехай $\sigma\colon G \to \mathbb{C}$ — вимірна функція та $m \geqslant 0$. Розглянемо наступне рівняння, записане у полярних координатах (r, θ), $z = z_0 + re^{i\theta}$, $z_0 \in G$:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\, |f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{2}$$

де f_r та f_θ — частинні похідні відображення f по r і θ, відповідно. У декартових координатах рівняння (2) має наступний вигляд:

$$f_{\overline{z}} \,=\, \left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}\right)^2 \, \frac{\sigma(z)\, N_m(f, z, z_0) - 1}{\sigma(z) N_m(f, z, z_0) + 1}\, f_z\,, \tag{3}$$

де $N_m(f, z, z_0) = i\,|z - z_0|\,|(z - z_0) f_z - \overline{(z - z_0)} f_{\overline{z}}|^m$.

При $m = 0$ рівняння (3) зводиться до звичайного лінійного рівняння Бельтрамі (1) з комплексним коефіцієнтом

$$\mu(z) \,=\, \left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}\right)^2 \, \frac{i\sigma(z)\,|z-z_0| - 1}{i\sigma(z)\,|z-z_0| + 1}\,.$$

Поклавши у (3) $m = 0$ і $\sigma = -i/|z - z_0|$, ми приходимо до класичної системи Коші-Рімана. Всюди далі будемо вважати, що $m > 0$.

Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ м.с. *Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння* (3) називається регулярний гомеоморфізм $f\colon G \to \mathbb{C}$, який задовольняє (3) м.с. в G.

Надалі будемо використовувати наступні позначення

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}\,, \quad C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Теорема 1. *Нехай* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3)*, який належить класу Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $\beta > \frac{m+2}{m+1}$ *і* $C_{z_0} > 0$. *Якщо*

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{|dz|}{\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leqslant C_{z_0} r^{\beta}$$

для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$, *то*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \nu_0 C_{z_0}^{\frac{m+1}{m}} |z - z_0|^{\frac{\beta(m+1)-m-2}{m}}$$

для всіх $z \in B(z_0, \frac{d_0}{4})$, *де* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m *та* β.

Наслідок 1. *Нехай* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3)*, який належить класу Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $\sigma_0 > 0$ *та* $\alpha > 1$. *Якщо*

$$\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)} \geqslant \frac{\sigma_0}{|z - z_0|^{\alpha}}$$

для м.в. $z \in B(z_0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$, *то*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \nu_0\, \sigma_0^{-\frac{1}{m}} |z - z_0|^{\frac{\alpha-1}{m}}$$

для всіх $z \in B(z_0, \frac{d_0}{4})$, *де* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m *та* α.

Поклавши у теоремі 1 $\beta = 2$, отримаємо достатню умову локальної ліпшицевості у точці z_0.

Наслідок 2. *Нехай* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *— регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння* (3)*, який належить класу Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *і* $C_{z_0} > 0$. *Якщо*

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{|dz|}{\left(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}} \leqslant C_{z_0} r^{2}$$

для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial G)$, *то*

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant \nu_0 C_{z_0}^{\frac{m+1}{m}} |z - z_0|$$

для всіх $z \in B(z_0, \frac{d_0}{4})$, *де* ν_0 *— додатна стала, яка залежить тільки від* m.

LOCAL HÖLDER CONTINUITY OF SOLUTIONS TO NONLINEAR BELTRAMI EQUATION

A sufficient condition providing Hölder's continuity for the regular solutions of Sobolev class $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *to a nonlinear Beltrami equation is established.*