UDC 517.9

C^k- linearization of random dynamical systems in continuous time

Iryna Vasylieva

University of Klagenfurt, Klagenfurt, Austria, iryna.vasylieva@aau.at

Let X be a Banach space, $I \subseteq \mathbb{R}$ be a nonempty interval and $(\Omega, \mathfrak{F})$ be a measurable space, $A_\omega : I \to L(X)$ be locally integrable and $F_\omega : I \times X \to X$.

Consider semilinear Carathéodory differential equations with random parameter

$$\dot{x} = A_\omega(t)x + F_\omega(t,x). \tag{N}$$

Together with the system (N) consider a linear system:

$$\dot{x} = A_\omega(t)x. \tag{L}$$

We write $D_2^j F_\omega : I \times X \to L_j(X)$ for the j-th order partial derivative of a mapping $F_\omega : I \times X \to X$ with respect to the second variable. Assume that the following assumptions hold for all $\omega \in \Omega$:

(H_1) $A_\omega : I \to L(X)$ is locally integrable and there exist reals $K \geq 1$ and $\alpha > 0$ such that

$$\|\Phi_\omega(t,s)\|_{s,t,\omega} \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{for all } t, s \in I,\ s \leq t. \tag{1}$$

(H_2^0) $F_\omega : I \times X \to X$ is a Carathéodory function and there exist reals $L, M \geq 0$ such that

$$F_\omega(t,0) = 0, \tag{2}$$

$$\|F_\omega(t,x)\|_{t,\omega} \leq M, \tag{3}$$

$$\|F_\omega(t,x) - F_\omega(t,\bar{x})\|_{t,\omega} \leq L\,\|x - \bar{x}\|_{t,\omega} \tag{4}$$

(H_2^m) $F_\omega : I \times X \to X$ and its partial derivatives $D_2^j F_\omega : I \times X \to L_j(X)$, $1 \leq j \leq m$, are Carathéodory functions and there exist reals $M_j \geq 0$ such that

$$\left\| D_2^j F_\omega(t,x) \right\|_{t,\omega} \leq M_j \tag{5}$$

for almost all $t \in I$ and all $x, \bar{x} \in X$.

Theorem 1. *If* (H_1) *and* (H_2^0) *hold on* $I := [\tau_0, \infty)$ *with* $KL < \alpha$*, then there exists a map* $H_\omega : I \times X \to X$ *such that for every* $\omega \in \Omega$*,* $s, t \in I$*:*

(i) $H_\omega(t, \cdot)$ *is a homeomorphism on* X *with* $H_\omega(t, 0) = 0$*;*

(ii) the linear equation (L) *and the semilinear equation* (N) *are conjugated in the sense that*

$$H_\omega(t, \Phi_\omega(t, s)\cdot) = \varphi_\omega(t, s, H_\omega(s, \cdot));$$

(iii) the operators $H_\omega(t, \cdot)$ *and its inverse are near identity, i.e. for all* $\xi \in X$*,* $\eta \in X$*:*

$$\|H_\omega(t, \xi) - \xi\|_{t,\omega} \leq \frac{KM}{\alpha} \quad \text{and} \quad \left\|H_\omega(t, \cdot)^{-1}(\eta) - \eta\right\|_{t,\omega} \leq \frac{KM}{\alpha};$$

(iv) the operators $H_\omega(t, \cdot) : X \to X$ *and its inverse satisfy a global Lipschitz condition;*

(v) the operator $H_\omega : I \times X \to X$ *and its inverse are continuous.*

Theorem 2. *Assume the hypothesis* (H_1) *and* (H_2^m) *hold on* $I := [\tau_0, \infty)$ *and* $KM_1 < \alpha$*. Then all statements of the Theorem 1 holds. Moreover,* $H_\omega(t, \cdot)$ *is a* C^m- *diffeomorphism.*

The obtained C^k-linearization result has been extended to encompass random dynamical systems generated both random differential equations as well as stochastic differential equations.

1. Arnold L. Random dynamical systems. Springer, 1995.
2. Grobman D.M. *Homeomorphism of systems of differential equations.* Doklady Akademii Nauk SSSR, 1959, **128.5**, 880–881.
3. Hartman P. *On local homeomorphisms of Euclidean spaces.* In: Bol. Soc. Mat. Mexicana , 1960, **5.2** , 220–241.
4. Hartman P. *A lemma in the theory of structural stability of differential equations.* In: Proceedings of the American Mathematical Society, 1960, **11.4**, 610–620.

C^k- лінеаризація неперервних випадкових динамічних систем

Доповідь присвячено проблемі лінеаризації випадкових динамічних систем. Зокрема, розглянуто динамічні системи, породжені диференціальними рівняннями з випадковим параметром типу Каратеодорі. Наведено достатні умови сильної топологічної еквівалентності між системами даного типу та їх лінеаризаціями у довільному Банаховому просторі. Крім того, встановлено достатні умови того, щоб сполучуюче відображення між вищезгаданими системами було C^k- *дифеоморфізмом. Отриманий результат було розширено з метою охоплення випадкових динамічних систем, згенерованих як випадковими диференціальними рівняннями, так і стохастичними диференціальними рівняннямию*