**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»
27–29 травня 2024 р., Львів**

УДК 517.958

МУЛЬТИПЛІКАТИВНЕ РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ БЕЗДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ НИЖНИКА

Олександра Вінніченко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua

Бездисперсійне рівняння Нижника

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y \tag{1}$$

є бездисперсійною границею дійсного симетричного потенціального рівняння Нижника, яке отримують введенням потенціалів у дійсній версії системи Нижника [2], яка є однією з перших відомих (1+2)-вимірних інтегровних моделей. У літературі рівняння (1) також називають бездисперсійним рівнянням Нижника–Новікова–Вєсєлова або бездисперсійним рівнянням Новікова–Вєсєлова; див. обговорення історії рівняння (1) в статті [1]. Використовуючи результати [1] щодо максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння (1) та його псевдогрупи точкової симетрії G, у статті [3] прокласифіковано одно- та двовимірні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ і побудовано широкі сім'ї інваріантних розв'язків цього рівняння.

Оскільки будь-яка функція вигляду $u = w(t,x) + \tilde{w}(t,y)$, що відповідає адитивному розділенню змінних, є розв'язком рівняння (1), таке розділення тривіальне для цього рівняння. Тому для пошуку неліївських розв'язків рівняння (1), які узагальнюють його інваріантні розв'язки, в [3] застосовано мультиплікативне розділенням змінних x і y: $u = \varphi(t,x)\psi(t,y)$, де $\varphi_x \neq 0$ і $\psi_y \neq 0$.

Після підстановки цього анзацу у рівняння (1), часткового розділення змінних x і y та диференціювання отриманого рівняння за обома цими змінними, отримано систему, яка еквівалентна парі перевизначених систем на функції φ і ψ,

$$\frac{(\varphi_{xx}\varphi_x)_x}{\varphi_x} = \alpha\varphi + \beta,\ \frac{\varphi_{tx}}{\varphi_x} = \gamma\varphi + \delta; \quad \frac{(\psi_{yy}\psi_y)_y}{\psi_y} = -\alpha\psi + \gamma,\ \frac{\psi_{ty}}{\psi_y} = \beta\psi - \delta,$$

що пов'язані параметр-функціями α, β, γ і δ змінної t. Ці системи можна проінтегрувати відносно φ і ψ та, використовуючи умови сумісності

$(\varphi_x)_t = (\varphi_t)_x$ і $(\psi_y)_t = (\psi_t)_y$, розщепити відносно цих же функцій. Таким чином, отримано системи на зазначені параметр-функції та додаткові функції ζ^0, ζ^1, ζ^2, θ^0, θ^1, θ^2 змінної t:

$$\alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = 0, \quad \alpha_t = 0, \quad \beta_t = \frac{5}{3}\gamma\zeta^1 - \alpha\zeta^2, \quad \gamma_t = \frac{5}{3}\beta\theta^1 + \alpha\theta^2,$$
$$\zeta^1_t = 3\gamma\zeta^0 - 3\beta\zeta^2, \quad \theta^1_t = 3\beta\theta^0 - 3\gamma\theta^2, \quad \zeta^0_t = -\zeta^1\zeta^2, \quad \theta^0_t = -\theta^1\theta^2.$$

Було виокремлено чотири можливих випадки. При $\alpha \neq 0$ отримано $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \gamma = \zeta^2 = \theta^2 = 0$, а отже ζ^0, ζ^1, θ^0 і θ^1 є константами. Відповідну сім'ю G-нееквівалентних розв'язків рівняння (1) побудовано у вигляді $u = \varphi(x)\psi(y)$, де

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{(\varphi^3 + c_1\varphi + c_2)^{1/3}} = x, \quad \int \frac{\mathrm{d}\psi}{(\psi^3 + c_3\psi + c_4)^{1/3}} = -y.$$

Для $\beta \neq 0$ маємо $\alpha = \gamma = 0$, а тому $\theta^0 = \theta^1 = 0$, що суперечить умові нетривіальності $\psi_y \neq 0$. Випадок $\gamma \neq 0$ зводиться до випадку $\beta \neq 0$ за допомогою перестановки x і y. Якщо ж $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то ζ^1 і θ^1 — константи, $\zeta^0 = -\int \zeta^1\zeta^2 \mathrm{d}t$ і $\theta^0 = -\int \theta^1\theta^2 \mathrm{d}t$. Отже, з точністю до G-еквівалентності побудовано ще такі розв'язки рівняння (1):

$$u = \big(|x|^{3/2} + \zeta(t)\big)\big(|y|^{3/2} + \theta(t)\big), \quad u = \big(x + \zeta(t)\big)|y|^{3/2},$$

де ζ і θ — достатньо гладкі функції змінної t.

Авторка висловлює вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу та доктору фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку за визначення напрямку дослідження та постановку задач. Це дослідження підтримано грантом від Simons Foundation (1290607, O.O.V.).

1. *Boyko V.M., Popovych R.O. and Vinnichenko O.O.* Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2024. — V. 132, no. 107915. — 19 pp., arXiv:2211.09759.

2. *Nizhnik L.P.* Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method // Soviet Phys. Dokl. — 1980. — V. 25. — P. 706–708.

3. *Vinnichenko O.O., Boyko V.M. and Popovych R.O.* Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation // Accepted to Anal. Math. Phys. — 2024. — 41 pp., arXiv:2308.03744.

MULTIPLICATIVE SEPARATION OF VARIABLES FOR FINDING SOLUTIONS OF THE DISPERSIONLESS NIZHNIK EQUATION

Using multiplicative separation of variables, we construct non-Lie solutions of the dispersionless Nizhnik equation, which generalize invariant solutions of this equation.