IMC—2011

МІЖНАРОДНА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ ім. В. Я. СКОРОБОГАТЬКА

19—23 вересня 2011, Дрогобич, Україна

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

INTERNATIONAL V. YA. SKOROBOHATKO MATHEMATICAL CONFERENCE

September 19—23, 2011, Drohobych, Ukraine

ABSTRACTS

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я. С. ПІДСТРИГАЧА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ІВАНА ФРАНКА
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ „ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА“
ДРОГОБИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. ІВАНА ФРАНКА

ЗАХІДНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР НАН УКРАЇНИ І МОНМС УКРАЇНИ

IMC–2011

МІЖНАРОДНА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМ. В. Я. СКОРОБОГАТЬКА

(19 – 23 вересня 2011, Дрогобич, Україна)

До 40-річчя Західного наукового центру
НАН України і МОНМС України

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Львів – 2011

У збірнику вміщено тези доповідей IX-ої Міжнародної математичної конференції ім. В.Я. Скоробогатька.

Розглянуто питання побудови та дослідження властивостей розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь із частинними похідними, інтегральних та абстрактних операторних рівнянь, вибрані питання теорії функцій дійсної та комплексної змінних, функціонального аналізу, метричної теорії чисел та обчислювальної математики, а також їх застосування до задач математичної та теоретичної фізики і механіки.

Спектр цих досліджень, в основному, збігається з тими напрямками багатогранної наукової діяльності Заслуженого діяча науки України професора Скоробогатька Віталія Яковича, в яких він отримав вагомі результати, розвинуті згодом численними його учнями та послідовниками.

Затверджено до друку вченою радою
Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України
(протокол № 6 від 31.05.2011 р.)

ISBN 978-966-02-6072-6

UKRAINIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
PIDSTRYHACH INSTITUTE FOR APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS AND MATHEMATICS
INSTITUTE OF MATHEMATICS

TARAS SHEVCHENKO KYIV NATIONAL UNIVERSITY
IVAN FRANKO LVIV NATIONAL UNIVERSITY
LVIV POLYTECHNIC NATIONAL UNIVERSITY
IVAN FRANKO DROHOBYCH PEDAGOGICAL UNIVERSITY

WESTERN SCIENTIFIC CENTER OF NAS AND MESYS OF UKRAINE

IMC–2011

INTERNATIONAL V.YA. SKOROBOHATKO MATHEMATICAL CONFERENCE

(September 19 – 23, 2011, Drohobych, Ukraine)

40 anniversary of Western Scientific Center
of NAS and MESYS of Ukraine

ABSTRACTS

Lviv – 2011

Abstracts of the IX International Mathematical Conference dedicated to V.Ya.Skorobogatko are presented. Problems of construction and investigation of properties of solutions of ordinary and partial differential equations, integral and abstract operator equations as well as selected problems of the function theory, functional analysis, metric number theory and computational mathematics are considered. Some applications to problems of mathematical and theoretical physics and mechanics are presented.

Range of the present research corresponds in principal to the fields of scientific interests of Prof. Vitaliy Yakovych Skorobogatko where he had obrtained important results which are developed later by his numerous students and followers.

It is confirmed for the press by the academic
council of Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics

ISBN 978-966-02-6072-6

Абдивалі Акбергенов

Національний технічний університет України „КПІ“
abdivali.akbergenov@gmail.com

ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Вивчається питання існування неперервних N-періодичних розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + f_1(t, x(t), y(t)), \\ y(t+1) = B(t)y(t) + f_2(t, x(t), y(t)), \end{cases} \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$, $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, $A(t), B(t)$ – неперервні N-періодичні $(p \times p)$ і $(q \times q)$-матриці (N – ціле додатне число), $p + q = n$. Припускаємо, що виконуються такі умови:

1. При всіх $t \in \mathbb{R}$ матриці $A(t)$ і $B(t)$ є такими, що виконуються співвідношення
$$|A(t+N-1) \cdot A(t+N-2) \cdot \ldots \cdot A(t)| \leq \Delta_1 < 1,$$
$$|B^{-1}(t) \cdot B^{-1}(t+1) \cdot \ldots \cdot B^{-1}(t+N-1)| \leq \Delta_2 < 1.$$
2. Вектор-функції $f_1(t, x(t), y(t)), f_2(t, x(t), y(t))$ є неперервними відносно всіх своїх змінних, N-періодичними по t і задовольняють умову Ліпшиця
$$|f_i(t, x', y') - f_i(t, x'', y'')| \leq l_i(|x' - x''| + |y' - y''|),$$
де $0 < l_i < 1, x', x'' \in \mathbb{R}^p, y', y'' \in \mathbb{R}^q, t \in \mathbb{R}$.

Основною метою доповіді є ознайомлення з новими результатами, що стосуються існування та єдиності неперервних N-періодичних розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду (1). Зокрема, доведена наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1 і 2. Тоді система рівнянь (1) має єдиний неперервний N-періодичний розв'язок $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$.*

Зауважимо, що при деяких інших умовах система (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків, що наближаються до $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ при $t \to \infty$.

Руслан Андрусяк, Наталя Бурдейна

Львівський національний університет імені Івана Франка
ru.andrusyak@gmail.com, n_burdeina@ukr.net

СПРЯЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ УЗДОВЖ НЕВІДОМОЇ КОНТАКТНОЇ МЕЖІ

Нехай $D_T^{s-} = \{(x,t) : 0 < t < T,\ s_1 < x < s(t)\}$, $D_T^{s+} = \{(x,t) : 0 < t < T,\ s(t) < x < s_2\}$ – області з вільною межею $x = s(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$. В D_T^{s-} розглянемо квазілінійну гіперболічну систему

$$\frac{\partial u_i^-}{\partial t} + \lambda_i^-(x,t,u^-)\frac{\partial u_i^-}{\partial x} = f_i^-(x,t,u^-), \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u^-(x,0) = \alpha^-(x), \quad x \in [s_1, s_0], \tag{2}$$

стосовно шуканої вектор-функції u^-, і подібні рівності в D_T^{s+} стосовно вектор-функції u^+. Нехай поведінка вільної межі описується співвідношеннями

$$\frac{ds}{dt} = g(s,t,u^-(s,t),u^+(s,t)), \quad s(0) = s_0, \ \ s_0 \in (s_1, s_2). \tag{3}$$

Доповнимо задачу крайовими умовами

$$u_i^-(s_1,t) = \beta_{i1}(t), \ \ i \in I_1, \quad u_i^+(s_2,t) = \beta_{i2}(t), \ \ i \in I_2, \tag{4}$$

а також умовами спряження на контактній межі $x = s(t)$

$$\begin{aligned} u_i^-(s(t),t) &= \gamma_i^-(s(t),t,u_j^-(s(t),t)_{j\notin I_-},u_j^+(s(t),t)_{j\notin I_+}), \ \ i \in I_-, \\ u_i^+(s(t),t) &= \gamma_i^+(s(t),t,u_j^-(s(t),t)_{j\notin I_-},u_j^+(s(t),t)_{j\notin I_+}), \ \ i \in I_+, \end{aligned} \tag{5}$$

де множини індексів I_1, I_2, I_-, I_+ визначаються вихідними даними.

Встановлено умови існування та єдиності локального узагальненого розв'язку задачі (1)–(5), а також умови глобальної розв'язності задачі.

1. Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д. Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, №4. – С. 489–503.

Тамара Антонова, Ольга Сусь

Національний університет „Львівська політехніка“
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
tamara_antonova@ukr.net, olja_sus@ukr.net

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІГУРНИХ НАБЛИЖЕНЬ ПАРНОГО І НЕПАРНОГО ПОРЯДКІВ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Розглядаються двовимірні неперервні дроби (ДНД) вигляду

$$\Phi_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i}}{1+\Phi_i}, \quad \Phi_k = \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{k+i,k}}{1} + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+i}}{1}, \tag{1}$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

та їх фігурні наближення — скінченні ДНД вигляду

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{a_{i,i}}{1+\Phi_i^{(n-2i)}}, \quad \Phi_k^{(p)} = \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{p} \frac{a_{k+i,k}}{1} + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{p} \frac{a_{k,k+i}}{1}, \tag{2}$$

$$k = 0, 1, \ldots, \; p = 1, 2, \ldots.$$

Для ДНД з дійсними елементами встановлено достатні умови їх збіжності та нові ознаки збіжності послідовностей їх фігурних наближень парного і непарного порядків вигляду (2). В доведених теоремах сформульовані умови щодо значень величин $\Phi_k^{(p)}$, ($k = 0, 1, \ldots$, $p = 1, 2, \ldots$), та частинних чисельників $a_{i,i}$, ($i = 1, 2, \ldots$). Тому виникає питання, якими повинні бути елементи $a_{k+i,k}$ та $a_{k,k+i}$, ($k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$), щоб справджувались умови для величин $\Phi_k^{(p)}$, ($k = 0, 1, \ldots$, $p = 1, 2, \ldots$)? Виявляється, що якщо всі елементи ДНД (1) $a_{i,i}$, ($i = 1, 2, \ldots$), є недодатними, то елементи $a_{k+i,k}$, $a_{k,k+i}$, ($k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$), можуть бути як недодатними так і невід'ємними. Наведені в роботі теореми доводять цей факт.

Володимир Асташкін, Ігор Чупик, Анна Равська-Скотнічни

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Політехніка Опольська, Польща
dept13@iapmm.lviv.ua

МЕТОДИКА ОПТИМІЗАЦІЇ ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВУ ТИТАНОВОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ

Вироби із титанових сплавів широко використовують у різних галузях народного господарства завдяки високій міцності, корозійній стійкості, зварюваності та ін. При їх виготовленні часто застосовують технології локального нагріву. Внаслідок цього у матеріалі відбуваються поліморфні перетворення і, відповідно, змінюється фазовий склад, що у свою чергу спричиняє появу залишкових напружень. Зміна фазового складу додатково впливає на напружений стан конструкцій, змінюючи їх ресурс міцності. Тому для побудови раціональних режимів цільового нагріву виробів із титанових сплавів і оцінки їх функціональної здатності важливою є наявність математичних моделей і методів дослідження напруженого стану виробів з таких матеріалів під час виготовлення шляхом локальної термообробки в діапазоні температур фазових перетворень.

Приймаємо, що локальне температурне навантаження під час термообробки не викликає пластичних деформацій (причиною виникнення залишкових напружень є лише нерівномірний розподіл фаз, який встановлюється в оболонці після її охолодження).

За критерій оптимізації приймаємо мінімум функціоналу енергії тимчасових або залишкових деформацій оболонки. Розв'язки прямих і екстремальних задач знаходимо з використанням методу скінченних елементів (для апроксимації шуканих розв'язків за просторовими змінними).

Запропонована методика дає можливість ефективно встановити оптимальний за залишковими напруженнями локальний профіль температури в титановій оболонці за врахування фазових перетворень.

Winfried Auzinger, Roksolyana Stolyarchuk

Vienna University of Technology
Lviv Polytechnic National University
w.auzinger@tuwien.ac.at, roksols@yahoo.com

RATIONAL MULTISTEP SCHEMES FOR SEMILINEAR STIFF SYSTEMS

Let $u'(t) = Au(t) + g(t, u(t))$ represent a semilinear ODE stiff system emanating from the spatial discretization of an evolutionary PDE, where the linear part represents the dominant, stiff component. In computational physics one is interested in the efficient and accurate integration of such systems. If the linear part can be efficiently treated, for instance via spectral approximation in combination with an A-stable scheme, the question is how to full problem can be tackled in a similarly efficient way.

Since the 1970, several authors have considered integration based on an A-stable rational approximations $R(hA)$ to the matrix exponential e^{hA} in combination with a multistep ansatz for the nonlinear part. Later, exponential schemes have become popular where evaluation of e^{tA} is directly approximated using pseudospectral of Krylov subspace techniques.

We consider these approaches in common framework. In particular, we demonstrate how rational schemes can be directly related to exponential schemes, which enables a precise convergence analysis for the rational versions, in particular for A-stable Padé approximations $R(hA)$ to e^{hA}. We discuss implementation issues and present numerical examples.

1. Auzinger W., Łapińska M. Convergence of rational multistep methods of Adams-Padé type // BIT Numer. Math. – submitted
2. Cox S.M., Matthews P.C. Exponential time differencing for stiff systems // J. Comp. Phys. – 2002. – **176**. – P. 430–455.
3. Hochbruck M., Ostermann A. Exponential integrators // Acta Numerica. – 2010. – P. 209–286.
4. Slonevsky R, Stolyarchuk R. Rational-fractional methods for solving stiff systems of differential equations // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – **150** (5). – P. 2434–2438.
5. Verwer J.G. On generalized linear multistep methods with zero-parasitic roots and adaptive principal root // Numer. Math. – 1976. – **27**. – P. 143–155.

Borys Bazaliy

Institute of Applied Mathematics and Mechanics NASU
bazaliy@iamm.ac.donetsk.ua

CLASSICAL SOLUTIONS OF DEGENERATE ELLIPTIC-PARABOLIC FREE BOUNDARY PROBLEMS

We consider the free boundary problem modelling fluid flow in a partially saturated porous media. An unknown function represents the pressure and satisfies an elliptic equation in the saturated domain and a quasilinear parabolic equation in the unsaturated domain. The existence and uniqueness of a classical solution locally in time is proved.

We study a classical solution of a degenerate elliptic-parabolic free boundary problem. Here an interface separates the filtration domain into an elliptic and parabolic region. In the parabolic domain the governing parabolic equation is degenerated. The existence of a smooth solution in the weighted Hölder space is proved.

Оксана Баран, Дмитро Боднар

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Тернопільський національний економічний університет
boe13@ukr.net, dmytro_bodnar@hotmail.com

ПРО СПАРЕНІ МНОЖИНИ ЗНАЧЕНЬ І МНОЖИНИ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Розглянемо ГЛД з комплексними елементами вигляду

$$\mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де $i_0 = N$. Нехай $l = \sum\limits_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}$ – кількість повторів індекса i_k в мультиіндексі $i(k) = i_1 i_2 \dots i_k$, $\delta_{i_k}^{i_s}$ – символ Кронекера. Розіб'ємо множину всіх мультиіндексів елементів (1) на підмножини, які попарно не перетинаються:

$$I_j^p := \{i(k) : i_k = p, j = 1 + (l+1)\, mod\, 2\}, p = \overline{1, N}, j = 1, 2.$$

Розглянемо множини $\mathbf{V}_i := \left\{V_i^1, V_i^2, \dots, V_i^N\right\}, i = 0, 1; \mathbf{E}_j := \left\{E_j^1, E_j^2, \dots, E_j^N\right\}, j = 1, 2$, де $V_i^p \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ – задані, $E_j^p \subseteq \mathbb{C}$ – визначаються співвідношеннями: $E_j^p := \left\{a \in \mathbb{C} : \frac{a}{1+\sum\limits_{s=1}^{p} V^s_{j\ mod\ 2}} \subseteq V^p_{1-j\ mod\ 2}\right\}$, $p = \overline{1, N}$. Множини $\langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \rangle$ називаються спареними множинами значень для дробу (1), а множини $\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rangle$ – спареними множинами елементів, що відповідають множинам $\langle \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \rangle$, якщо $a_{i(k)} \in E_j^{i_k}$, $i(k) \in I_j^{i_k}$, $j = 1, 2$.

Досліджено властивості спарених множин значень та відповідних їм спарених множин елементів, які є багатовимірними узагальненнями результатів, встановлених L. Lorentzen [1] для неперервних дробів, та застосовано до дослідження збіжності ГЛД (1).

1. Lorentzen L., Convergence criteria for continued fractions $\mathrm{K}(a_n/1)$ based on value sets // Contemporary Mathematics. – 1999. – **236**. – P. 205–255.

Ярослав Баранецький

Національний університет „Львівська політехніка“
baryaros@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛОКАЛЬНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено спектральні властивості нелокальної багатоточкової задачі для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в $m-$вимірному одиничному кубі $K = \{(x_1, \ldots, x_m): 0 < x_1, x_2 \ldots, x_m < 1\}$:

$$L(D)u \equiv \sum_{|s|\leq n} c_s D^{2s} u = f, \;\; x \in K, \tag{1}$$

$$\ell_{j,k} u \equiv D_j^{2k} u_{|_{x_j=0}} - D_j^{2k} u_{|_{x_j=1}} = 0, \; j = \overline{1,m}, \; k = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

$$\ell_{j,k+n} u \equiv D_j^{2k+1} u_{|_{x_j=0}} - D_j^{2k+1} u_{|_{x_j=1}} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n_j} b_{r,j} (D_j^{2k+1} u_{|_{x_j=x_{r,j}}} + D_j^{2k+1} u_{|_{x_j=1-x_{r,j}}}) = 0, \tag{3}$$

$$j = \overline{1,m}, \;\; k = \overline{0, n-1}, \;\; m, n \in \mathbb{N},$$

де $L-$ безтипний оператор, $c_s \in \mathbb{R}$, $D^{2s} = D_1^{2s_1} D_2^{2s_2} \ldots D_m^{2s_m}$, $D_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,m}$, $s = (s_1, \ldots s_m)$, $|s| = s_1 + s_2 + \ldots + s_m$, $s_1, \ldots, s_m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $b_{r,j} \in \mathbb{R}$, $0 < x_{1,j} < x_{2,j} < \ldots < x_{n_j,j} < 1$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Встановлено умови повноти системи власних та приєднаних функцій задачі (1)–(3) в просторі $L_2(K)$. Визначено точковий спектр задачі. Побудовано зображення розв'язку цієї задачі у вигляді ряду за системою власних та приєднаних функцій.

Наталія Басса, Григорій Кіт

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ПІВБЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ З ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЮ ДО ЇЇ КРАЮ ТЕПЛОАКТИВНОЮ ТРІЩИНОЮ

Визначається розподіл температури і напружень у півбезмежній $(x \geq 0)$ пластинці товщиною d з перпендикулярною до її краю теплоактивною тріщиною, на якій задані температура або тепловий потік. Бокові грані пластинки теплоізольовані, а її межа $x = 0$ підтримується при нульовій температурі. Стаціонарне температурне поле, зумовлене тепловиділенням, подаємо через логарифмічний потенціал простого шару з густиною $w(\xi)$, яка описує потужність теплових джерел на тріщині:

$$T(x,y) = \frac{1}{2\pi\lambda d} \int\limits_a^b w(\xi) \ln \frac{r_2}{r_1} d\xi, \tag{1}$$

де $r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+\xi)^2 + y^2}$, λ – коефіцієнт теплопровідності.

Якщо на тріщині задана температура $T(x,0)$, із (1) при $y = 0$ маємо інтегральне рівняння для визначення потужності теплових джерел $w(\xi)$. Напруження визначаємо з використанням термопружного потенціалу переміщень і функції напружень Ері [1].

Зокрема, на місці тріщини нормальні напруження

$$\sigma_{yy}(x,0) = 4MG \int\limits_a^b w(\xi) \left[\ln \left| \frac{\xi - x}{\xi + x} \right| + \frac{2\xi(2\xi + x)}{(\xi + x)^2} \right] d\xi, M = \frac{(1+\nu)\alpha}{8\pi\lambda d},$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення, G – модуль зсуву.

Звільнивши область $a \leq x \leq b$ від цих напружень, визначаємо коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызванные стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.

Василий Берник, Денис Васильев, Николай Калоша

Институт математики НАН Беларуси
bernik@im.bas-net.by

О МЕРЕ ЛЕБЕГА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВ В ТЕОРЕМАХ МИНКОВСКОГО

Из теоремы Минковского о линейных формах следует, в частности, что при любом $x \in \mathbb{R}$ и $Q > 1$ неравенство

$$|P(x)| < c_1 Q^{-n} \tag{1}$$

разрешимо в полиномах $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ высоты $H = H(P) = \max_{1 \le j \le n} |a_j| \le Q$ при $c_1 = 1$. Обозначим через $B(c_1)$ множество $x \in [0,1)$, для которых неравенство (1) имеет место. В ряде задач теории трансцендентных чисел необходимо знать, как изменяется мера Лебега множества $B(c_1)$ при уменьшении c_1. Известно [1], что при $c_1 = n^{-1}2^{-n-5}$ справедливо неравенство $\mu B(c_1) < 0,5$. В работе [2] этот результат был использован в задаче о приближении действительных чисел целыми алгебраическими числами.

Теорема 1. *Для любого натурального n имеем $\mu B(c_1) < 1/2$ при $c_1 < 2^{-n-2}$.*

Теорема 2. *Для $n = 2$ имеем $\mu B(c_1) < 1/2$ при $c_1 < 0,25$.*

Теорема 3. *Для $n = 1$ справедливо неравенство $\mu B(c_1) < 1/2$ при $c_1 < 3/\pi^2$.*

1. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arithm. – 1999. – **90**. – P. 97–112.
2. Bugeaud Y. Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension // Journal London Math. Soc. – 2002. – **65** (2). – P. 547–559.

Василь Бешлей, Олег Петрук

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
beshley.vasyl@gmail.com

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КАРТ ЗАЛИШКІВ НАДНОВИХ ЗІР ВНАСЛІДОК ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРОТОНІВ

За останнє десятиліття проведено успішні спостереження космічних об'єктів у гама-діапазоні. 2004 р. система черенковських телескопів H.E.S.S. забезпечила перший експеримент, за допомоги якого було отримано карти розподілу поверхневої яскравості астрофізичних об'єктів у гама-діапазоні з енергіями фотонів ≥ 0.1 ТеВ. Космічна гама-обсерваторія ім. Фермі є ще одним експериментом у гама діапазоні; вона з 2008 р. веде спостереження в останньому, досі не дослідженому, електомагнітному "вікні" (0.1 ГеВ – 0.1 ТеВ). За 8 років спостережень в гама-дапазоні отримано близько 20 зображень залишків наднових зір (ЗН). За випромінювання відповідних квантів відповідають або релятивістські електрони (зворотний Комптон-ефект та нетеплове гальмівне випромінювання) або протони (розпади піонів, що утворюються при зіткненнях протонів). Аналізуючи спектри випромінювання, однозначно відповісти на питання про те, які саме частинки (електрони чи протони) випромінюють гама-фотони, неможливо. Тому карти поверхневої яскравості об'єктів є додатковим джерелом інформації про властивості нетеплового випромінювання ЗН. Ми розробили метод моделювання карт поверхневої яскравості ЗН в гама-діапазоні внаслідок протонного випромінювання. В основі методу лежить інтегрування випромінювальної здатності одиниці об'єму вздовж променя зору; для математичного моделювання розподілу випромінювання необхідним є обчислення тривимірної гідродинамічної задачі про сильний точковий вибух та обчислення еволюції енергетичного розподілу прискорених протонів в усьому об'ємі ЗН, яка враховує як адіабатичні так і радіаційні втрати релятивістських часток. Для наближеного опису властивостей радіальних та азимутальних профілів отримано відповідні аналітичні апроксимації поблизу фронту ударної хвилі. Розроблений метод можна використати також для обчислення інтегрального спектру від ЗН.

Ярослав Бігун, Любов Костишин

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
yaroslav.bihun@gmail.com, lyubapav@gmail.com

АГРЕГАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Агрегаційно-ітеративними методами з одним і більше параметрами можна наближено розв'язувати крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь і в тих випадках, коли звичайні ітераційні методи не збіжні. Такі методи розвинуті у працях М.С. Курпеля, Б.А. Шувара та ін. Лінійна крайова задача із запізненням досліджувалась у праці [1]. У даній роботі розглядається двоточкова задача для диференціального рівняння нейтрального типу

$$x''(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t) + a_1(t)x(\lambda t) + b_1(t)x'(\lambda t) + c(t)x''(t) + f(t),$$
$$x(0) = x_1, \ \ x(t_1) = x_2,$$

де a, b, a_1, b_1 і c достатньо гладкі функції. Крайова задача зводиться до інтегрального вигляду і для неї будується ітераційний процес

$$x^{(n+1)}(t) = p(t) + \frac{1}{\lambda^2}d(t)x^{(n)}(\lambda t) + \int\limits_0^t k_1(t,\, s)x^{(n)}(s)ds +$$
$$+ \int\limits_0^t k_2(t,\, s)x^{(n)}(\lambda s)ds - \frac{t}{t_1}\int\limits_0^{t_1} k_1(t,\, s)x^{(n)}(s)ds -$$
$$-\frac{t}{t_1}\int\limits_0^{t_1} k_2(t,\, s)x^{(n)}(\lambda s)ds + a_n(t)(y^{(n)} - y^{(n+1)}),$$

де y – ітераційний параметр, наближення для якого будуються таким же чином як і для $x(t)$. У роботі встановлено умови збіжності ітераційного процесу та розглянуто деякі багатоточкові крайові задачі.

1. Бігун Я.Й., Костишин Л.П. Однопараметричний агрегаційно-ітеративний метод для розв'язання двоточкової крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького університету. Математика. – 2010. – Вип. 374. – С. 5–9.

Ярослав Бігун, Ігор Скутар

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
yaroslav.bihun@gmail.com

УСЕРЕДНЕННЯ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ ПІД ДІЄЮ БАГАТОЧАСТОТНИХ ЗБУРЕНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглядається рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon c(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon f(x,\,\tau,\,a,\,a_\theta,\,\varphi,\,\varphi_\theta),\;\;(x,\,t) \in \mathbb{R} \times [0,\,L\varepsilon^{-1}] \qquad (1)$$

із початковою умовою $u(x,\,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Змінні a і φ задовольняють m-частотну систему рівнянь із лінійним запізненням

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon A(\tau,\,a,\,a_\theta,\,\varphi,\,\varphi_\theta),\, \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega(\tau) + \varepsilon B(\tau,\,a,\,a_\theta,\,\varphi,\,\varphi_\theta) \qquad (2)$$

і початкові умови $\alpha(0) = y$, $\varphi(0) = \psi$, де $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $m > 1$, ε – малий додатний параметр, $\tau = \varepsilon t$, $\theta \in (0,\,1)$, $\alpha_\theta(t) = \alpha(\theta t)$, функції f, ω, A і B задовольняють певні умови гладкості і 2π-періодичні за φ і φ_θ. Усереднена за швидкими змінними система рівнянь

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = c(\tau)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + f_0(x,\,\tau,\,\bar{a},\,\bar{a}_\theta),$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = A_0(\tau,\,\bar{a},\,\bar{a}_\theta),\;\; \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B_0(\tau,\,\bar{a},\,\bar{a}_\theta).$$

Складністю в дослідженні системи (1), (2) є резонансні явища. У точці τ умова резонансу [1]: $(k,\,\omega(\tau)) + \theta(l,\,\omega(\theta\tau)) = 0,\;\; \|k\| + \|l\| \neq 0$. Метод усереднення для широких класів звичайних диференціальних рівнянь обгрунтовано в [2]. У даній роботі встановлено існування і єдиність розв'язку точної задачі та одержано оцінку похибки методу усереднення, порядок якої ε^α, $\alpha \in (0,\,(2m)^{-1}]$.

1. Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №4. – С. 435–446.
2. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

Марія Білозерова

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Marbel@ukr.net

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-ГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Розглядаємо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i(y^{(i)}), \tag{1}$$

в якому $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[^1 \to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0, ..., n)$ — неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — деякий односторонній окіл Y_i. Також вважаємо, що кожна з функцій φ_i є правильно змінною при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядку σ_i, причому $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sigma_i \neq 1$. Отримано необхідні та достатні умови існування досить широкого класу розв'язків рівняння (1), неявні асимптотичні формули для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n - 1$ включно. До розглянутого класу розв'язків входять всі правильно змінні та швидко змінні при $t \uparrow \omega$ розв'язки рівняння (1).

З огляду на поведінку функцій φ_i рівняння (1) є в певному сенсі близьким до відомого рівняння $y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod\limits_{i=0}^{n-1} |y^{(i)}|^{\sigma_i}$, для якого аналогічні класи розв'язків були детально досліджені в [1,2].

1. Евтухов В.М. Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена-Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, №2. – С. 269–273.
2. Евтухов В.М. Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **324**, №2. – С. 258–260.

[1]При $\omega > 0$ вважаємо, що $a > 0$.

Степан Блажевський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
appl-dpt@chnu.edu.ua

НЕСТАЦІОНАРНІ ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ В ОРТОТРОПНІЙ КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ

Задача про структуру температурного поля в ортотропній необмеженій кусково-однорідній скінченній пластині математично приводить до побудови обмеженого в області

$$D = \Big\{(t,x,y):\ t>0, x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty), y\in(0,b), b<\infty\Big\}$$

розв'язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial T_j}{\partial t} + \chi_j^2 T_j - \Big(k_{1j}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{2j}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)T_j(t,x,y) = f_j(t,x,y),\ j=1,2,$$

за початковими умовами

$$T_j(t,x,y)|_{t=0} = g_j(x,y),\ j=1,2,$$

крайовими умовами

$$\Big(-h_{11}\frac{\partial}{\partial y} + h_{12}\Big)T_j(t,x,y)\bigg|_{y=0} = \Psi_{1j}(t,x),\ h_{11}^2 + h_{12}^2 \neq 0, j=1,2,$$

$$\Big(h_{21}\frac{\partial}{\partial y} + h_{22}\Big)T_j(t,x,y)\bigg|_{y=b} = \Psi_{2j}(t,x),\ h_{21}^2 + h_{22}^2 \neq 0,$$

та умовами неідеального термічного контакту.

Обмежений в області D розв'язок розглянутої задачі побудовано методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є за геометричною змінною y та інтегрального перетворення Фур'є на декартовій осі з однією точкою спряження за геометричною змінною x.

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
2. Блажевский С.Г., Ленюк М.П. Нестационарные температурные поля в многослойных полубесконечных пластинах. – Черновцы, 1990. – 20 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 103. – Ук 90.

Микола Бокало

Львівський національний університет імені Івана Франка
mm.bokalo@gmail.com

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Нехай V і H – гільбертові простори з нормами відповідно $\|\cdot\|$ і $|\cdot|$, $V \subset H$, V – щільна множина в H, $\lambda|v| \le \|v\| \quad \forall v \in V$, $\lambda = \mathrm{const} > 0$. Вважаємо, що $V \subset H \subset V'$, де V' – спряжений до V простір. Нехай $S = (-\infty, 0]$ і сім'я операторів $A(t) : V \to V', t \in S$, така, що $(A(t)v, v) \ge \alpha(t)\|v\|^2$, $\|A(t)v\|_* \le \beta(t)\|v\|$, $v \in V, t \in S$, для деяких функцій α і β з простору $C(S)$, $0 < \alpha(t) \le \beta(t), t \in S$.

Для довільних $\omega \in \mathbb{R}$, $\gamma \in L^\infty_{loc}(S)$, $\gamma(t) > 0$ для м.в. $t \in S$, і гільбертового простору X позначаємо через $L^2_{\omega,\gamma}(S;X)$ простір функцій $f : S \to X$ таких, що $\int_S \gamma(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \|f(t)\|_X^2 dt < \infty$.

Нехай $\omega < \lambda$, $\quad W_\omega(S) := \{y \in L^2_{\omega,\alpha}(S;V) : y' \in L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')\}$; U – гільбертів простір керувань; $B \in \mathcal{L}(U; L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V'))$; $f \in L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')$. Стан еволюційної системи $y(v) = y(\cdot; v) \in W_\omega(S)$ при заданому керуванні $v \in U$ визначається співвідношеннями

$$\frac{d}{dt} y(t;v) + A(t)y(t;v) = f(t) + Bv(t), \quad t \in S,$$

$$e^{\omega\int_0^t \alpha(s)ds} |y(t;v)| \to 0 \text{ при } t \to -\infty.$$

Нехай $\mathcal{H}$ – деякий гільбертів простір, $C \in \mathcal{L}(W_\omega(S); \mathcal{H})$ і

$$J(v) = \|Cy(v) - z_0\|^2_{\mathcal{H}} + (Nv, v)_U, \quad v \in U, \quad - \quad \text{функція вартості},$$

де $z_0 \in \mathcal{H}$ – заданий елемент, $N \in \mathcal{L}(U;U)$, $(Nv,v)_U \ge \nu\|v\|_U$ для кожного $v \in V$ при деякому $\nu = \mathrm{const} > 0$.

Нехай U_∂ – опукла замкнена множина в U.

Розглядаємо **задачу**: знайти $u \in U_\partial$ такі, що

$$\inf_{v \in U_\partial} J(v) = J(u)\,.$$

При відповідних уточненнях вихідних даних доведено існування та єдиність розв'язку цієї задачі.

Taras Bokalo

Ivan Franko National University, Lviv
tbokalo@gmail.com

ANISOTROPIC CASE OF DEGENERATE DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Let Ω be a bounded domain with $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$,

$$L_+^\infty(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega) : \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} v(x) > 1\}.$$

Let also $r \geq 2$, $\gamma_1 \dots, \gamma_n \geq 2$.

We are going to speak about mixed problem

$$(\mathcal{R}u)_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i})_{x_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} B(x,t,u)u_{x_i} + G(x,t,u) = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

where

$$\mathcal{R}u = \frac{1}{r-1}|u|^{r-2}u.$$

Here functions $B(x,t,\xi)$ and $G(x,t,u)$ satisfy Caratheodory conditions and

$$|B(x,t,\xi)| \leq b^0|\xi|^{s(x)-1} \text{ for a.e. } (x,t) \in Q_{0,T} \text{ and for all } \xi \in \mathbb{R},$$

$$|G(x,t,\xi)| \leq g^0|\xi|^{q(x)-1} \text{ for a.e. } (x,t) \in Q_{0,T} \text{ and for all } \xi \in \mathbb{R},$$

where $s, q \in L_+^\infty(\Omega)$, $b^0, g^0 > 0$.

We establish the conditions of existence of solution by using elliptic regularization procedure, i.e. the solution to (1)–(3) is a limit of the sequence $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, where u^m is a solution of a boundary problem for elliptic equation, $m \in \mathbb{N}$. The solution of (1)–(3) belongs to the generalized Lebesgue-Sobolev space.

Андрій Бомба, Сергій Ярощак

Рівненський державний гуманітарний університет
abomba@ukr.net, yaroschak@mail.ru

КОМПЛЕКСНИЙ ПІДХІД ДО ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДВОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Розглядається процес двофазної фільтрації в пласті, обмеженому непроникним зовнішнім контуром та контурами почергово розміщених криволінійними рядами нагнітальних і експлуатаційних свердловин, без перетоків між рядами. В рамках теорії Баклея-Леверетта [1–2] на основі ідей методів квазіконформних відображень і поетапної фіксації характеристик середовища та процесу, розроблено числовий алгоритм розв'язання відповідних задач (на побудову гідродинамічної сітки, відшукання поля насиченості, координат точок „призупинки", часу повного заводнення, фільтраційних витрат, тощо) для випадків, коли область комплексного квазіпотенціалу є багатолистою поверхнею, листи якої складаються із спеціальним чином склеєних між собою вздовж певних ділянок границі внутрішностей прямокутників [1–4].

1. Бомба А. Я., Ярощак С. В. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації // Доповіді НАН України. – 2010. – №10 – С. 34–40.
2. Бомба А. Я., Ярощак С. В. Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації // Обчислювальна та прикладна математика. – 2010. – №2. – С. 3–13.
3. Бомба А. Я., Скопецкий В. В., Ярощак С. В. Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях // Проблемы управления и информатики. – 2010. – №4. – С. 64–72.
4. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.

Marta Bordulyak, Myroslav Sheremeta

Ivan Franko National University, Lviv
mbordulyak@yahoo.com, m_m_sheremeta@list.ru

BOUNDEDNESS OF l-INDEX OF ANALYTIC CURVES

Let $0 < R \le +\infty$, $D_R = \{z : |z| < R\}$ and $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ be an analytic curve in D_R, i.e. $F : D_R \to \mathbb{C}^m$ is a vector-valued function, where each function f_j is analytic in D_R, $||F(z)||_S$ be sup-norm and $||F(z)||_E$ be Euclidean norm. Let $\beta > 1$ and by $Q_\beta(D_R)$ we denote the class of positive continuous functions l on $[0, R)$ such that $l(r) > \frac{\beta}{R-r}$ (for $R = +\infty$ this condition is unnecessary) and $0 < \lambda_1(t) \le \lambda_2(t) < +\infty$ for all $t \in [0, \beta]$, where $\lambda_1(t) = \inf\{l(r)/l(r_0) : |r-r_0| \le t/l(r_0), 0 \le r_0 < R\}$ and $\lambda_2(t) = \sup\{l(r)/l(r_0) : |r - r_0| \le t/l(r_0), 0 \le r_0 < R\}$.

Definition. An analytic curve F is said of bounded l-index by sup-norm if there exists $N \in \mathbb{Z}_+$ such that

$$\frac{||F^{(n)}(z)||_S}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{||F^{(k)}(z)||_S}{k!l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}$$

for all $n \in \mathbb{Z}_+$ and $z \in D_R$. If we replace $||F^{(k)}(z)||_S$ by $||F^{(k)}(z)||_E$ then we obtain the concept of an analytic curve in D_R of bounded l-index by Euclidean norm. We show that boundedness of l-index of analytic curve by sup-norm and by Euclidean norm are equivalent.

Theorem. *Let $\beta > 1$, $l \in Q_\beta(D_R)$ and $l(r) \ge \beta$ for all $r \in [0, +\infty)$ in the case $R = +\infty$. Suppose that an analytic in D_R curve H is of bounded l-index. Then an analytic in D_R solution $F = (f_1, \dots, f_m)$ of equation*

$$W^{(n)} + Q_1 W^{(n-1)} + \dots + Q_n W = H(z), \qquad (1)$$

where

$$Q_s = \begin{pmatrix} q_{11}^{(s)} \dots q_{1m}^{(s)} \\ \dots\dots\dots \\ q_{m1}^{(s)} \dots q_{mm}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad H(z) = \begin{pmatrix} h_1(z) \\ \dots \\ h_m(z) \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix}$$

and all $q_{ik}^{(s)}$ are constant numbers, is a curve of bounded l-index.

Also we study a boundedness of l-index of analytic curves satisfying equation (1) of first and second order where $q_{ik}^{(s)}$ are meromorphic in D_R.

Alexander Bratus, Vladimir Posvyanskii, Artem Novozhilov

Moscow State University of Railway Engineering

STABILITY AND LIMIT BEHAVIOR OF A DISTRIBUTED REPLICATOR SYSTEM

The replicator equation is known to provide a general modeling framework for several distinct areas in mathematical biology. In particular, it arises as a selection equation in population genetics, as a dynamic description of the evolutionary game theory, and as a model for putative chemical reactions describing prebiotic evolution. In its simplest form, when the fitness of the species is a linear function of the relative abundances of other species, the replicator equation takes the form

$$\dot{v}_i = v_i[(\mathbf{A}\mathbf{v})_i - f^{loc}(t)], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

where $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathbf{A}$ is an $n \times n$ matrix with elements a_{ij} describing the contribution of the j-th species to the fitness of the i-th species, $(\mathbf{A}\mathbf{v})_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_j$, and the mean fitness $f^{loc}(t) = \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}\mathbf{v})_i \mathbf{v}_i$ is chosen such that $\mathbf{v} \in S_n = \{\mathbf{v} : \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\}$.

There are several different approaches to add space to (1). We suggest that the global regulation represents a natural and convenient approach to consider the replicator equation with an explicit spatial structure. To be exact, as a counterpart of the local model (1) we consider the model

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i[(\mathbf{A}\mathbf{u})_i - f^{sp}(t)] + d_i \Delta u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

where now $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, 3$, $d_i > 0$ are diffusion coefficients, and the mean integral fitness is given, assuming Niemann's boundary conditions, by $f^{sp}(t) = \int_\Omega \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle dx$. This approach allows analytical investigation of (2): the tool which was mainly missing in the analysis of replicator equations with explicit space. In particular, it is possible to find the conditions for asymptotically stable rest points of (1) to be asymptotically stable homogeneous equilibria of (2). In our work, we show that for some values of the diffusion coefficients spatially heterogeneous solutions appear. Using a definition for the stability in the mean integral sense we prove that these heterogeneous solutions can be attracting; in particular this is the case for Eigen's hypercycle. Defining in some natural way evolutionary stable states for the distributed system (2), we provide the conditions for this distributed state to be an asymptotically stable stationary solution to (2).

Марія Бубняк, Ольга Возняк

Тернопільський національний економічний університет
mbubniak@list.ru, olvoz@ukr.net

ГРАНИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ 1-ПЕРІОДИЧНОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Розглянемо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб вигляду:

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де $c_j \in \mathbb{C}$; $c_j \neq 0$; $j=\overline{1,N}$; $i_0 = N-$ натуральне число.

Нехай $R_n(m) = 1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j_k=1}^{j_{k-1}}\dfrac{c_{j_k}}{1}$ $\quad(n=1,\ldots;j_0=m;m=\overline{1,N})$ – залишки цього дробу.

Для n-го підхідного дробу встановлено формулу

$$F_n = R_n(1)\cdot h_n(2)\cdot\ldots\cdot h_n(N),$$

де $h_n(m) = 1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n}\dfrac{c_m/(R_{n+1-k}(m-1)R_{n-k}(m-1))}{1}$ – критичний залишок гранично-періодичного дробу $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{c_m/(R_k(m-1)R_{k-1}(m-1))}{1}$, $R_0(m)=1$ $(m=\overline{2,N};\ n=1,2,\ldots)$.

Якщо дріб (1) збігається, то його значення F дорівнює $F=\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{N}x_j}$, де x_j – фіксована точка притягання дробово-лінійного відображення $t_j(\omega)=1+\dfrac{c_j/\prod_{k=1}^{j-1}x_k^2}{\omega}$ $(j=\overline{1,N})$.

1. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наукова думка, 1986. – 176 с.
2. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 606 p.

$\boxed{\text{Ярослав Бурак}}$, Роман Мусій
Дмитро Тарлаковський, Йосип Шимчак

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Національний університет „Львівська політехніка“
Московський авіаційний інститут (державний технічний університет)
Політехніка Опольська, Польща
dept13@iapmm.lviv.ua

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

Для циліндричних і сферичних тіл та тіл з плоскопаралельними границями сформульовано тривимірні задачі термомеханіки електропровідних тіл і запропоновано методику наближеного їх розв'язування з використанням апроксимації ключових функцій (дотичної компоненти вектора напруженості магнітного поля, температури і компонент тензора напружень) многочленом третього степеня за відповідною координатною змінною. Коефіцієнти апроксимаційних многочленів (за відповідної гладкості ключових функцій) виражаються через інтегральні характеристики ключових функцій і задані граничні значення цих функцій чи відомі граничні умови стосовно них на крайових поверхнях. Рівняння для визначення інтегральних характеристик отримуються множенням вихідних рівнянь для ключових величин на відповідний степінь даної координатної змінної та інтегруванням за цією змінною. Тоді тривимірна задача зводиться до двовимірної на інтегральні відносно координатної змінної (радіальної для циліндричного і сферичного шарів, суцільних циліндра і кулі та товщинної для шару з плоскопаралельними границями) характеристики ключових функцій. За неоднорідних крайових умов на ці функції для підвищення точності апроксимації за недостатньої гладкості їх крайових значень або коли вони є невідомі, використано подання цих функцій у вигляді суми двох складників. Перший з них задовольняє заданим неоднорідним крайовим умовам і має певну структуру залежно від геометрії тіла, а другий - відповідному рівнянню за однорідних крайових умов. Дана методика дозволила зменшити розмірність сформульованих задач і тим самим спростити побудову їх розв'язків.

Іван Буртняк, Ганна Малицька

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
bvanya@meta.ua

МЕТОД ЛЕВІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ТИПУ ДИФУЗІЇ З ІНЕРЦІЄЮ

Розглянемо задачу Коші для системи:

$$\partial_t u_\nu(t,x) - x_1 \partial_{x_2} u_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n} [a_2^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1}^2 + a_1^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1} +$$

$$+a_0^{r\nu}(t,x)]u_r(t,x), \nu = 1, ..., n, (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, n \in N, \tag{1}$$

$$u_\nu(t,x)|_{t=\tau} = u_{\nu 0}(x), 0 \leq \tau < t \leq T, \tag{2}$$

де $\partial_t w_\nu(t,x) = \sum\limits_{r=1}^{n} [a_2^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1}^2 + a_2^{r\nu}(t,x)\partial_{x_1} + a_0^{r\nu}(t,x)]w_r(t,x)$ – рівномірно параболічна за Петровським в $\Pi_{[0,T]}$, (x_2 – параметр). Коефіцієнти системи (1) задовольняють умови: А) $a_j^{r\nu}(t,x), j = 0,1,2$ – комплекснозначні, неперервні і обмежені функції, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$;
Б) $|a_j^{r\nu}(t,x) - a_j^{r\nu}(t,x')| \leq K(|x_1 - x_1'|^{\alpha_1} + |x_2 - x_2'|^{\alpha_2}), \forall\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]}, \alpha_1 \in (0,1], \alpha_2 \in (\frac{1}{3}, 1], K > 0$ стала, незалежна від t, x, x';
В) існують неперервні, обмежені $\partial_{x_1}^j a_j^{r\nu}(t,x), j = 0,1,2$, що задовольняють умову Б).

Теорема. *Якщо виконуються умови А), Б), то існує фундаментальна матриця розв'язків системи (1) $\mathcal{E}(t,x;\tau,\xi), t > \tau$. Якщо ще виконується умова В), то існує фундаментальна матриця розв'язків $\mathcal{E}^*(t,x;\tau,\xi), t > \tau$ спряженої системи до (1), при цьому $\mathcal{E}'(t,x;\tau,\xi) = \mathcal{E}^*(t,x;\tau,\xi)$ і виконуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^k \mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \leq C_k(t-\tau)^{-\frac{4+k}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, 0 \leq k \leq 2, \tag{3}$$

$$|\partial_{x_2} \mathcal{E}(t,x;\tau,\xi)| \leq C_1(t-\tau)^{-\frac{7}{2}} \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi)\}, \tag{4}$$

де $\rho(t,x;\tau,\xi) = (x_1 - \xi_1)^2(4(t-\tau))^{-1} + 3(x_2 - \xi_2 + (x_1 + \xi_1)\times \times(2(t-\tau))^{-1})^2(t-\tau)^{-3}$, *$c, C_k, C_1$ сталі, що залежать від $\delta, \alpha_1, \alpha_2$, $\sup\limits_{\Pi_{[0,T]}} |a_k(t,x)|, T$ та характеру неперервності $a_2(t,x)$.*

Катерина Буряченко

Донецький національний університет
katarzyna_@ukr.net

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ IV ПОРЯДКУ

В обмеженій області $\Omega \subset R^2$ з гладкою межею $\partial\Omega$ розглянемо безтипне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами з ненульовою правою частиною

$$L(\partial_x)u = a_0\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2} + a_2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + a_3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3} + a_4\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x). \tag{1}$$

Для рівняння (1) розглянемо граничну задачу:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x),\, u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi(x),\, u''_{\nu\nu}|_{\partial\Omega} = \sigma,\, u'''_{\nu\nu\nu}|_{\partial\Omega} = \chi. \tag{2}$$

Вважатимемо, що $f \in H^{m-4}(\Omega)$, $\varphi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\psi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $\sigma \in H^{m-5/2}(\partial\Omega)$, $\chi \in H^{m-7/2}(\partial\Omega)$, $m \geq 4$, $\vec{\nu}-$ вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, 4$.

Основним апаратом досліджень є метод слідів, асоційованих з оператором L ($L-$ слідів).

Теорема 1. *Для існування та єдиності розв'язку задачі Коші (1), (2) в просторі Соболєва $H^m(\Omega)$, $m \geqslant 4$, необхідно, а у випадку еліптичності рівняння (1) і достатньо, щоб $L-$ сліди $L_{(0)}u$, $L_{(1)}u$, $L_{(2)}u$, $L_{(3)}u$ задовольняли умовам*

$$\int\limits_{\partial\Omega}\{\sum_{k=0}^{3} L_{(3-k)}u \cdot Q_\nu^{(k)}(-\tilde{a}^j \cdot x)\}ds_x = \int\limits_{\Omega} f(x)\cdot \overline{Q(-\tilde{a}^j \cdot x)}dx,$$

для довільного полінома $Q \in \mathbb{C}[z]$, $j = 1, 2, 3, 4.$

Зокрема, у доповіді йтиметься про застосування теореми 1 у випадку одиничного круга К і отримання за допомогою цього теореми існування розв'язку граничної задачі з трьома крайовими умовами за умови належності граничних функцій деяким ваговим просторам Соболєва $H^s_\rho(\partial K)$.

Василь Вавричук

Львівський національний університет імені Івана Франка
vvavrychuk@gmail.com

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ У ЧАСТКОВО НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ З ТРІЩИНОЮ

Нехай D_0 частково необмежена канонічна область, яка містить розімкнену криву Γ, позначимо $D = D_0 \setminus \Gamma$. Необхідно знайти розв'язок $\nu(x,t)$ задачі Коші

$$\begin{cases} \mathcal{L}\,\nu = \partial_t \nu & \text{в } D \times (0,T), \\ \nu = f_1 & \text{на } \partial D_0 \times (0,T), \\ \mathcal{N}\nu = f_2 & \text{на } \partial D_0 \times (0,T), \\ \nu(x,0) = 0 & \text{для } x \in D, \end{cases} \tag{1}$$

де $\mathcal{L}$ – строго еліптичний оператор другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а $\mathcal{N}$ – конормальна похідна.

У зв'язку з некоректністю задачі (1) застосуємо метод Ландвебера, на кожній ітерації якого необхідно розв'язувати початково-крайові задачі Діріхле-Неймана. Методом Роте [1] одержимо послідовність еліптичних задач з умовою Діріхле $u_n^{\pm} = g_{n1}^{\pm}$ на Γ та умовою Неймана $\frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} = g_{n0}$ на ∂D_0. Далі, аналогічно до теорії потенціалу, на основі послідовності функцій Гріна N_n подамо розв'язок у вигляді композиції потенціалу простого шару з густиною φ_m, потенціалу подвійного шару χ_n по кривій Γ з густиною $[g_{n1}]$ і потенціалу простого шару ω_n по границі ∂D_0 з густиною g_{n0}:

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \int_{\Gamma} \varphi_m(y) N_{n-m}(x,y) ds(y) + \chi_n(x) + \omega_n(x).$$

Після використання теореми про граничний перехід для відповідних потенціалів одержимо послідовність інтегральних рівнянь по границі тріщини Γ, подальше розв'язування яких здійснюється методом квадратур. Проведені чисельні експерименти підтверджують ефективність розробленого методу.

1. Chapko R., Kress R. Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations // J. Integral Equations Appl. – 1997. – **9**, N 1. – P. 47-70.

Петро Вагін, Романна Малець

Львівський національний університет імені Івана Франка
romannam@yahoo.com

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ В ОБОЛОНКАХ, ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА СТИСНЕННЯ

Для побудови адекватної математичної моделі процесу теплопровідності у конструкціях, складених з тонкостінних елементів, сформульовано початковокрайову та відповідну їй варіаційну задачу теплопровідності у тонкому криволінійному шарі, яка враховує анізотропні властивості матеріалу, наявність внутрішніх джерел тепла та змішані умови теплообміну з довкіллям. Методом Гальоркіна здійснено напівдискретизацію останньої за просторовою змінною товщини теплопровідного шару [1]. Для наближеного обчислення температури побудовано числову схему, яка використовує апроксимації методу скінченних елементів за змінними серединної поверхні шару та однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. Можливості такої методики ілюструються результатами обчислювального експерименту.

Виходячи із співвідношень геометрично нелінійної теорії пружності, кінематичних гіпотез типу Тимошенка та гіпотези Дюгамеля-Неймана, побудовано рівняння та граничні умови крайової задачі, яка описує стан термопружної рівноваги гнучких ізотропних оболонок, податливих на зсув та стиснення. Особливістю деформаційних співвідношень цієї моделі є врахування лінійного розподілу компонент тензора поворотів за товщиною. На основі принципу Лагранжа сформульовано відповідну варіаційну задачу термопружності оболонок. На прикладі задачі про термопружну рівновагу циліндричної оболонки під дією осесиметричного теплового навантаження проілюстровано ефективність застосування запропонованої моделі [2].

1. Вагін П.П., Малець Р.Б., Шинкаренко Г.А. Напівдискретизація за товщиною задачі теплопровідності у тонкому криволінійному шарі // Математичні студії. – 2006. – **26**, № 1. – С. 71–80.
2. Вагін П.П., Малець Р.Б., Шинкаренко Г.А. Дослідження термонапруженого стану гнучких зсувних оболонок у квазістатичному наближенні // Матем.методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 3. – С. 108-117.

Сергей Вакарчук

Днепропетровский университет экономики и права имени А.Нобеля
sbvakarchuk@mail.ru

О ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Данное сообщение продолжает тематику работ автора [1,2] и использует подход к построению шкалы роста целых функций, предложенный М.Н.Шереметой [3]. Приведем один из полученных результатов. Функция f, аналитическая в конечной односвязной области G, принадлежит пространству $\mathcal{E}'_q(G)$, $\quad q \geqslant 1$, если $\|f\|_q := \left\{ \left(\iint\limits_G |f(z)|^q d\sigma_z \right)^{1/q}, \text{ если } 1 \leqslant q < \infty;\ \sup\limits_{z\in G} |f(z)|, \text{ если } q = \infty \right\} < \infty$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного степени $\leqslant n$; $\mathcal{F}_n(f)$ –частная сумма n-го порядка разложения функции $f \in \mathcal{E}'_q(G)$ в ряд по полиномам Фабера в области G. Обозначим через $E_n^{(1)}(f)_q := \inf\{\|f - p_n\|_q : p_n \in \mathcal{P}_n\}$ наилучшее полиномиальное приближение функции $f \in \mathcal{E}'_q(G)$; $E_n^{(2)}(f)_q := \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_q$, $E_n^{(3)}(f)_q := \|\mathcal{F}_n(f) - \mathcal{F}_{n-1}(f)\|_q$.

Теорема. *Пусть выполнены условия теоремы 1 из [3] и граница γ области G принадлежит классу Альпера. Тогда для того, чтобы функция $f \in \mathcal{E}'_q(G)$ была целой трансцендентной конечного обобщенного порядка роста $\rho(\alpha,\beta) = \xi$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\alpha(n) \Big/ \beta\big(-n^{-1} \ln E_n^{(j)}(f)_q \big) \right) = \xi; \quad j = 1,2 \text{ *или* } 3.$$

1. Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №9. – С. 1123–1133.
2. Вакарчук С.Б., Жир С.И. О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций обобщенного порядка // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №8. – С. 1011–1026.
3. Шеремета М.Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – №2. – С. 100–108.

Віталій Василик

Інститут математики НАН України
vasylyk@imath.kiev.ua

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО ЗБІЖНИЙ МЕТОД ДЛЯ m-ТОЧКОВОЇ ЕЛІПТИЧНОЇ ЗАДАЧІ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглядається нелокальна m-точкова задача

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2} - Au = f(t), \quad x \in [0, X] \\ &u(0) = 0, \\ &u(1) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(\xi_k) + u_1, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, $0 \le \xi_1 \le \cdots \le \xi_m < 1$, $f(t)$ – задана векторнозначна функція зі значеннями в банаховому просторі X, $u_1 \in X$. Оператор A є сильно позитивним у банаховому просторі X.

Наближення до розв'язку задачі (1) будується використовуючи його зображення за допомогою інтеграла Данфорда-Коші та Sinc-квадратурної формули. Доведено, що таке наближення забезпечує експоненціальну швидкість збіжності при виконанні умови

$$\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \frac{\cosh(\xi_k \sqrt{a_I})}{\sinh \sqrt{a_I}} < 1 \tag{2}$$

на коефіцієнти α_k, що гарантують існування та єдиність розв'зку в банаховому просторі X. a_I – параметри гіперболи, яка охоплює спектр.

1. Gavrilyuk I.P., Makarov V.L., Sytnyk D.O., and Vasylyk V.B. Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for a first order differential equation in Banach space // Numer. Funct. Anal. Optim. – 2010 – **31**, N 1-3. – P. 1–21.
2. Gavrilyuk I.P., Makarov V.L., Vasylyk V.B. Exponentially convergent approximation to the elliptic solution operator // Comput. Methods Appl. Math. – 2006. – **6** (4). – P. 386–404.

Nataliya Vasylyeva

Institute of Applied Mathematics and Mechanics NASU
vasylyeva@iamm.ac.donetsk.ua

ON THE MUSKAT PROBLEM WITH NONREGULAR INITIAL INTERFACE

We consider the nonlinear free boundary problem which arises in many applications, for instance, in the filtration theory, in biology. The specific of two-phase Hele-Shaw problem (the Muskat problem) consists in that one is the transmission problem for the elliptical equations with a dynamic boundary condition. Moreover, in our case an unknown interface is not regular in the initial time. In the present moment, there are a lot of results connected with investigation of the one-phase Hele-Shaw problem (see, corresponding papers of J. Ockendon, S. Howison, A. Friedman, J. King, J. Esher, G. Simonett and others). In the particular case for the one-phase Hele-Shaw problems the case of nonregular initial interfaces was studied and the next result was found. If the inner angle of the initial shape of the free boundary is enough small, then there is the ''waiting time" phenomenon (the vertex and the opening of the angle do not change during some time). We find the certain sufficient conditions on initial data for existence of a unique solution to the Muskat problem with the ''waiting time" property. To this end we use the results of the elliptic theory (Schauder method), the theory of difference equations, the fix point theorem, and introduce the special weighted Hölder spaces.

Андрій Вельгач

Інститут математики НАН України
velgandr@ukr.net

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Розглядаємо систему диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу із відхиленнями аргументу вигляду

$$x'(t+1) = Ax'(t) + F(t, x(t), x(f(t, x(t))), x'(g(t, x(t)))), \qquad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$, A — неособлива $(n \times n)$-матриця, $F\colon \mathbb{R}^+ \times \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$. Для системи рівнянь (1) досліджуємо структуру множини неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків, що задовольняють умову

$$\lim_{t \to +\infty} [x(t+1) - Ax(t)] = 0. \qquad (2)$$

Отримано достатні умови, при яких задача (1), (2) має сім'ю неперервно диференційовних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ (разом із першою похідною) розв'язків $x(t) = x(t, \varphi(t))$, похідні яких задовольняють умову Ліпшиця

$$|x'(t) - x'(s)| \leq l|t - s|,$$

де l — додатна стала, $t, s \in \mathbb{R}^+$, і які задовольняють умову

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0,$$

також запропоновано метод побудови таких розв'язків.

1. Пелюх Г. П. Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2003. – **39**, №1. – С. 45–49.
2. Вельгач А.В. Асимптотичні властивості розв'язків систем нелінійних диференціально функціональних рівнянь нейтрального типу // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, №1. – С. 277–289.

Виктор Вербицкий, Ирина Глушко

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
Одесский национальный политехнический университет
vvverb@mail.ru

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ОДНОЙ КОНЕЧНО–ЭЛЕМЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Рассматривается метод Сьяле–Равьярта [1] аппроксимации смешанным методом конечных элементов задачи Дирихле для бигармонического оператора на многоугольнике Ω. Метод порождает следующую конечно–элементную аппроксимацию краевой задачи. Для $f \in L_2(\Omega)$ найти такие $(u_h, p_h) \in S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h) \times S^{2,0}(\mathcal{T}_h)$, что

$$\int\limits_\Omega p_h \overline{p}_h dx = \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \overline{p}_h dx \quad \forall \overline{p}_h \in S^{2,0}(\mathcal{T}_h), \tag{1}$$

$$\int\limits_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla \overline{u}_h dx = \int\limits_\Omega f \overline{u}_h dx \quad \forall \overline{u}_h \in S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h), \tag{2}$$

где

$$S^{2,0}(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in C^0(\overline{\Omega}) \ : \ u_h|_K \in P_2(K) \, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

— пространство непрерывных сплайнов степени 2 и

$$S_0^{2,0}(\mathcal{T}_h) = \{u_h \in S_0^{1,0}(\mathcal{T}_h) \ : \ u_h = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Здесь u_h аппроксимирует решение u краевой задачи, а p_h приближает $p = \Delta u$.

На основании невязки решения конечно–элементной аппроксимации (1)–(2) построен апостериорный оценщик [2]. Получены апостериорные оценки сверху погрешности дискретного решения.

1. Ciarlet P., Raviart P. A Mixed Finite Element Method for the Biharmonic Equation // Symposium on Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations. – New York: Academic Press, 1974. – P. 125–143.
2. Ainsworth M., Oden J. T. A posteriori error estimation in finite element Analysis. – Jonh Wiley & Sons, 2000. – 240 p.

Богдан Винницький, Руслан Хаць

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
vynnytskyi@ukr.net, khats@ukr.net

УЗАГАЛЬНЕНІ ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Розглядається питання про побудову біортогональної системи підсистеми власних векторів деяких лінійних диференціальних операторів в гільбертовому просторі, система власних векторів яких є переповненою. В ряді випадків таку біортогональну систему можна знайти в рамках поняття узагальнених власних векторів спряженого оператора. Нехай H — векторний простір і $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ — непорожня множина. Множина $\mathfrak{M}(B) = \{\mu_j : j \in \Omega\}$ називається множиною *узагальнених власних значень* лінійного оператора $B : H \to H$ з областю визначення $D(B)$, якщо знайдеться така множина $\mathfrak{U}(B) = \{U_j : j \in \Omega\}$ ненульових елементів $U_j \in H$, що $U_k - U_n \in D(B)$ і $B(U_k - U_n) = \mu_k U_k - \mu_n U_n$ для будь-яких $k \in \Omega$ і $n \in \Omega$. При цьому, множина $\mathfrak{U}(B)$ зветься множиною *узагальнених власних векторів* оператора B.

Теорема. *Нехай $A : H \to H$ — деякий лінійний оператор в евклідовому просторі H зі скалярним добутком $\langle \cdot ; \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, областю визначення $D(A)$, множиною звичайних власних значень $\{\lambda_k : k \in \Omega\}$ і відповідною множиною власних векторів $\{v_k : k \in \Omega\}$. Нехай, окрім цього, цей оператор має спряжений в H оператор $B : H \to H$ з ненульовою областю визначення $D(B)$, для якого множина $\mathfrak{M}(B) = \{\mu_j : j \in \Omega\}$, $\mu_j := \overline{\lambda_j}$, є множиною узагальнених власних значень, а $\mathfrak{U}(B) = \{U_j : j \in \Omega\}$ — відповідною множиною узагальнених власних векторів. Тоді $\langle v_k ; U_n \rangle = 0$, $k \neq n$.*

Отримані результати застосовуються при розв'язуванні деяких некласичних крайових задач, породжених оператором Бесселя, які вперше були розглянуті О. Шавалою [1].

1. Винницький Б. В., Шавала О. В. Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя // Матем. студії. – 2008. – **30**, №1. – С. 31–41.

Елена Владова

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова
lena@gavrilovka.com.ua

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}) \quad (i = \overline{1, n-1}), \\ y_n' = \alpha_n p_n(t)\varphi_1(y_1), \end{cases} \tag{1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1,n})$, $p_i : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1,n})$ – непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to]0; +\infty[$ $(i = \overline{1,n})$ – непрерывно дифференцируемые и правильно меняющиеся при $y_i \to Y_i^0$ функции порядков σ_i таких, что $\prod_{i=1}^{n} \sigma_i \neq 1$, где $\Delta(Y_i^0)$ – некоторая односторонняя окрестность точки $Y_i^0 \in \{0, \pm\infty\}$.

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, будем называть $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решением, если для него при $i = \overline{1, n-1}$ выполняются условия

$$y_i(t) \in \Delta(Y_i^0) \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y_i(t) = Y_i^0, \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t)y_{i+1}'(t)}{y_i'(t)y_{i+1}(t)} = \Lambda_i.$$

Для системы (1) получены необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений и их асимтотические представления. В отдельности рассматривались случаи, когда среди чисел Λ_i имеются равные 0. Эти случаи требуют применения особой методики. Для одного из таких случаев, когда $m = \max\{i \in \{1, \dots, n-1\} : \Lambda_i = 0\} < n - 1$, получена асимптотика при $t \uparrow \omega$:

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = Q_i(t)[1 + o(1)] \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

$$\frac{y_n(t)}{[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t))]^{\prod\limits_{i=1}^{m} \sigma_i}} = Q_n(t)[1 + o(1)],$$

где Q_i – некоторые функции, точно определяемые через коэффициенты p_i, $i = \overline{1,n}$.

Олеся Власій

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
olesyav@ukr.net

РЕКУРЕНТНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ УЗАГАЛЬНЕНИХ СИСТЕМ З МІРАМИ

Нехай на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ задана деяка скінченна впорядкована множина точок $\{x_k : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b\}$.

Розглянемо неоднорідну узагальнену систему вигляду

$$Y' - \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k + \sum_{k=1}^{N} C_k \delta_k(x) \right) Y = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x)\Theta_k + \sum_{k=1}^{N} S_k \delta_k(x), \quad (1)$$

де $Y = Y(x)$ – невідома розмірності p вектор-функція; $\Theta_k = \Theta_k(x)$ – характеристична функція проміжка $I_k = [x_k; x_{k+1})$; $\delta_k(x) = \delta(x - x_k)$; $A_k(x)$ – $p \times p$ матриці і $R_k(x)$ – вектори розмірності p з елементами із простору $C(I_k)$, $k = \overline{0, N-1}$; C_k – дійсні $p \times p$ матриці, S_k – дійсні розмірності p вектори, $k = \overline{1, N}$.

Для системи (1) поставимо початкову умову

$$Y(x_0) = Y_0. \quad (2)$$

Позначимо $\widetilde{B}_k(x, s)$ – фундаментальну матрицю визначальної системи [1] на проміжку I_k і $\widetilde{C}_k = E + C_k$, де E – одинична матриця.

Теорема. *Розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти за формулами*

$$Y_0(x) = \widetilde{B}_0(x, x_0)Y_0 + \int_{x_0}^{x} \widetilde{B}_0(x, s)R_0(s)ds, \quad x \in [x_0, x_1), \quad (3)$$

$$Y_k(x) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\left[\widetilde{C}_k Y_{k-1}(x_k) + S_k\right] + \\ + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds, \quad x \in I_k, k = \overline{1, N-1}, \quad (4)$$

$$Y_N(x_N) = \widetilde{C}_N Y_{N-1}(x_N - 0) + S_N. \quad (5)$$

1. Власій О.О., Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ ЛП: Фіз.-мат. науки. – 2009. – **660**. – С. 34–38.

Vitaliy Vlasov

Ivan Franko National University, Lviv
siphiuel@gmail.com

AN INVERSE PROBLEM FOR A STRONGLY DEGENERATE TWO-DIMENSIONAL ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATION

In the domain $Q_T = \{(x, y, t) : 0 < x < h,\ 0 < y < l,\ 0 < t < T\}$ we consider the inverse problem for the parabolic equation

$$u_t = t^{\beta_1} a_1(t) u_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t) u_{yy} + b_1(x, y, t) u_x + b_2(x, y, t) u_y + \\ + c(x, y, t) u + f(x, y, t), \qquad (x, y, t) \in Q_T, \tag{1}$$

with unknown coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$, the initial condition

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in [0, h] \times [0, l], \tag{2}$$

Dirichlet boundary conditions

$$u(0, y, t) = \mu_1(y, t), \quad u(h, y, t) = \mu_2(y, t), \quad x \in [0, h],\ t \in [0, T], \tag{3}$$

$$u(x, 0, t) = \nu_1(x, t), \quad u(x, l, t) = \nu_2(x, t), \quad y \in [0, l],\ t \in [0, T], \tag{4}$$

and the local overdetermination conditions

$$t^{\beta_1} a_1(t) u_x(0, y_0, t) = \varkappa_1(t), \quad 0 < y_0 < l,\ t \in [0, T], \tag{5}$$

$$t^{\beta_2} a_2(t) u_y(x_0, 0, t) = \varkappa_2(t), \quad 0 < x_0 < h,\ t \in [0, T]. \tag{6}$$

Equation (1) is strongly degenerate, that is, it is assumed that $\beta \geq 1$. Similar problem for a single-dimensional heat equation has been considered in [1], for complete parabolic equation see [2].

The existence of the solution to the problem (1)–(6) is proven by transforming the system (1)–(6) to the system of operator equations $(a_1, a_2, u, u_x, u_y) = \mathbf{P}(a_1, a_2, u, u_x, u_y)$ and application of Schauder fixed point theorem. Uniqueness of the solution is also established.

1. Ivanchov M., Saldina N. An inverse problem for strongly degenerate heat equation // J. Inv. Ill-Posed problems. – 2006. – **14**, N 5. – P. 465–480.
2. Ivanchov M. I. and Saldina N. V. Inverse problem for a parabolic equation with strong power degeneration // Ukrainian Mathematical Journal. – 2006. – **58**, N 11. – P. 1487–1500.

Vitaly Volpert

CNRS, University Lyon 1, France
volpert@math.univ-lyon1.fr

ELLIPTIC PROBLEMS IN UNBOUNDED DOMAINS

The classical theory of elliptic boundary value problems affirms that an elliptic operator satisfies the Fredholm property if and only if the ellipticity condition, proper ellipticity and Lopatinskii condition are satisfied. This result applies for elliptic problems in bounded domains with a sufficiently smooth boundary. It is not generally applicable for problems in unbounded domains. In this case, the conditions above should be completed by an additional condition formulated in terms on limiting problems.

We develop a general theory of elliptic operators in unbounded domains. Fredholm property, solvability conditions, index, operator with a parameter are studied for general linear elliptic boundary value problems. These results are applied to study nonlinear elliptic problems including topological degree and various application. These results are presented in a recent monograph [1].

1. Volpert V. Elliptic Partial Differential Equations. Volume 1. Fredholm Theory of Elliptic Problems in Unbounded Domains. – Birkhäuser, Basel, 2011. – 637 p.

Ярослав Гарасим, Борис Остудін

Львівський національний університет імені Івана Франка
kom@franko.lviv.ua

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Метод інтегральних рівнянь виявився особливо ефективним при математичному моделюванні окремих фізичних явищ за умов суттєво просторової постановки та наявності розімкнених граничних поверхонь [1,2]. Подання розв'язків у інтегральному вигляді дозволяє звести початкову крайову задачу до відшукання певних характеристик досліджуваного явища, розподілених лише по вказаних поверхнях. З точки зору обчислювальної математики проблема зводиться до побудови та дослідження наближених схем розв'язання двовимірних інтегральних рівнянь, ядра яких ускладнені різного характеру сингулярностями.

Авторами запропонована [2] чисельно-аналітична методика розв'язування інтегральних рівнянь зазначеного типу. Клас допустимих поверхонь обмежується при цьому лише можливістю їх параметричного зображення та аналітичного обчислення відповідних двовимірних невласних інтегралів. У даній роботі вказана методика узагальнюється на достатній для практики клас поверхонь та передбачає нерівномірну дискретизацію області при визначенні шуканої функції. Запроваджено також спеціальні оцінювачі похибок, за допомогою яких реалізована процедура уточнення отримуваних наближених роз-в'язків в околі особливих точок розімкнених граничних поверхонь. Зазначені вдосконалення знайшли своє відображення при розв'язу-ванні значної кількості модельних та практично важливих задач тео-рії потенціалу в електронній оптиці.

1. Sybil Yu.M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface // Матем. студії. – 1997. – **8**, № 2. – С. 79–96.
2. Garasym Ya.S., Ostudin B.A. On numerical approach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method // Jour. of Num. and Appl. Math. – 2003. – № 1 (88). – С. 17–28.

Микола Гачкевич, Богдан Тріщ, Анна Козіарська

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Політехніка Опольська, Польща
dept13@iapmm.lviv.ua

ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ЗА НЕОДНОРІДНИХ ПОЧАТКОВИХ ТА КРАЙОВИХ УМОВ

При оптимізації напружено-деформованого стану тонких складених оболонок, які працюють в умовах нестаціонарного нагріву, необхідно попередньо визначити температурне поле за заданих неоднорідних початкового розподілу температури та її розподілу на крайових поверхнях. Алгоритм оптимізації суттєво спрощується за наявності відносно нескладного аналітичного виразу температури. В зв'язку з цим виникає потреба в постановці і розробці такої методики розв'язування відповідної задачі теплопровідності для тонкостінних елементів конструкцій, яка забезпечувала б виконання цих умов.

Для отримання наближеного розв'язку задачі теплопровідності при крайовій умові третього роду, зручного для використання в числових алгоритмах оптимізації, апроксимуємо розподіл температури по товщинній координаті γ кубічним поліномом, коефіцієнти якого виражаються через усереднені характеристики температурного поля по товщині оболонки та задані граничні умови.

Розв'язок задачі за неоднорідних крайових умов першого і другого роду представляємо у вигляді суми двох складових, перша з яких визначається з рівняння теплопровідності при однорідних крайових умовах, а друга має структуру, що задовільняє заданим крайовим умовам на зовнішніх поверхнях. Для побудови розв'язку таких часткових задач використовуємо схему, окреслену за умов третього роду.

За неоднорідних початкових умов при розв'язуванні рівняння теплопровідності розв'язок будуємо у вигляді суми двох складових, де перша є розв'зком рівняння при нульовій початковій умові, а друга є добутком початкового значення температури на функцію $\exp(-\tau)$. Розв'язки для складових шукаємо аналогічно до наведених (представляючи їх відповідними кубічними поліномами).

Олександр Гачкевич, Євген Ірза,
Володимир Бойчук, Зигмунт Касперський

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Політехніка Опольська, Польща
dept13@iapmm.lviv.ua

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ НАГРІВУ СКЛЯНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

Методика оптимізації теплових режимів в процесах термообробки скляних тіл обертання включає: математичну постановку відповідної задачі оптимального керування; розробку числових алгоритмів розв'язування складових задач, зокрема пошуку оптимального розв'язку; програмну реалізацію числових алгоритмів, комп'ютерне моделювання і аналіз режимів для конкретних тіл і технологій.

Етапи математичної постановки таких задач: розробка адекватної фізико-математичної моделі опису фізико-механічних процесів; побудова відповідного критерію оптимальності; вибір функцій керування, за допомогою яких досягається екстремум функціоналу оптимізації; формування обмежень на параметри стану і функції керування.

В роботі вихідними приймаються такі математичні моделі: термопружного тіла при низькотемпературному нагріві-охолодженні і в'язкопружного тіла при підвищених температурах, а за критерій оптимальності – мінімум часу термообробки.

За функцію керування вибрано температуру навколишнього (зовнішнього) середовища, коефіцієнт тепловіддачі, тепловий потік.

Розглянуто обмеження на функцію керування, напружений стан і обмеження на можливості технічних засобів нагріву.

Алгоритм розв'язування відповідних диференціальних рівнянь базується на числовому методі зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів. В алгоритмі по оптимізації використано метод параметричної оптимізації.

Програмну реалізацію алгоритму оптимізації здійснено на основі формування дискретних моделей розглядуваних задач з використанням ключових систем рівнянь. Розглянуто математичні проблеми, які виникають при запропонованому способі оптимізації.

Світлана Гембарська

Волинський національний університет імені Лесі Українки
gembar@mail.lutsk.ua

ДОТИЧНІ ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ЧОТИРИГАРМОНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ

Розглянемо задачу Діріхле для чотиригармонійного рівняння в крузі $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$: знайти в крузі $\mathcal{D}$ функцію $u = u(re^{i\varphi})$, $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, яка є розв'язком равняння $\Delta^4 u = 0$ і задовольняє такі крайові умови: $u\Big|_{\partial\mathcal{D}} = g_0$, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = g_1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = g_2$, $\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = g_3$, де g_0, g_1, g_2, g_3 — функції, задані на межі з певними властивостями, що забезпечують існування і єдиність розв'язку цієї задачі. У випадку одиничного круга $\mathcal{D}$ розв'язком вказаної задачі Діріхле є функція

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{(1-r^2)^4}{12\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Bigg[\Bigg(\frac{6(1-r\cos(\varphi-t))^3}{(r^2 2r\cos(\varphi-t)+1)^4} - \frac{3r\cos(\varphi-t)(1-r\cos(\varphi-t))}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3} -$$

$$-\frac{\frac{3}{4}r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2}\Bigg)g_0(e^{it}) + 3\Bigg(\frac{\frac{r}{2}\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2} -$$

$$-\frac{2(r\cos(\phi-t)-1)^2}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3}\Bigg)g_1(e^{it}) + 3\frac{1-r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2}g_2(e^{it}) -$$

$$-\frac{1}{r^2-2r\cos(\varphi-t)+1}g_3(e^{it})\Bigg]dt.$$

Якщо на одиничному колі $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, то розв'язком відповідної задачі Діріхле є чотиригармонійний інтеграл Пуссона

$$u_{g_0}(re^{i\phi})) = \frac{(1-r^2)^4}{12\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{6(1-r\cos(\varphi-t))^3}{(r^2 2r\cos(\varphi-t)+1)^4} -\right.$$

$$\left.-\frac{3r\cos(\varphi-t)(1-r\cos(\varphi-t))}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3} - \frac{\frac{3}{4}r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2}\right]g_0(e^{it})dt.$$

Теорема. *Існує обмежена чотиригармонійна функція $p(z)$ в $\mathcal{D}$ така, що $\lim\limits_{|z|\to 1, z\in C_\theta} p(z)$ не існує для всіх θ, $0 \le \theta \le 2\pi$.*

1. Гембарська С.Б. Існування тригармонійних в крузі функцій, які в кожній точці не мають дотичних границь // Ряди Фур'є: теорія і застосування. Праці Інституту математики НАН України. – Т. 20. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 92–100.

Oksana Hentosh

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
ohen@ua.fm

HAMILTONIAN HOMOGENEOUS SYMMETRIES FOR LAX INTEGRABLE $(1|2+1)$-DIMENSIONAL MATRIX SUPERSYMMETRIC SYSTEMS

On the extension $\mathcal{G}^* \times W^{2N} \times \tilde{W}^{2N}$ of the dual space $\mathcal{G}^*$ to the Lie algebra $\mathcal{G}$ of super-integro-differential operators

$$A := \partial^q + \sum_{j<q-1} a_j \partial^j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N},$$
$$a_j := a_{0,j} + a_{1,j} D_{\theta_1} + a_{3,j} D_{\theta_2} + a_{2,j} D_{\theta_1} D_{\theta_2},$$

where $a_{r,j} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \Lambda_1^2; gl(m|n))$, $a_{r,j} = a_{r,j}(x, \theta_1, \theta_2) := a^0_{r,j}(x) + \theta_1 a^1_{r,j}(x) + \theta_2 a^3_{r,j}(x) + \theta_1\theta_2 a^2_{r,j}(x)$, $r = \overline{0,3}$, $x \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\partial := \partial/\partial x$, $D_{\theta_i} := \partial/\partial\theta_i + \theta_i \partial/\partial x$, $\theta_i \in \Lambda_1$, $i = 1, 2$, $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ being a Grassmann algebra over the field $\mathbb{C}$, the hierarchy of dynamical systems, formed by the Lax type flows

$$l_{t_p} = [l_+^p, l], \quad l \in \mathcal{G}^*, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

where the subscript "+"denotes a pure differential part of the corresponding operator, and the evolutions

$$\begin{aligned} F_{k,t_p} &= l_+^p F_k, \quad F^*_{k,t_p} = -(l_+^p)^* F_k^*, \\ \Phi_{k,t_p} &= l_+^p \Phi_k, \quad \Phi^*_{k,t_p} = -I(l_+^p)^* I \Phi_k^*, \end{aligned} \tag{2}$$

where $I := diag(\underbrace{1, \dots, 1}_{m}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n})$, of eigenfunctions $F_i \in W = L_2(\mathbb{S} \times \Lambda_1; \Lambda_0^m \times \Lambda_1^n)$, $\Phi_i \in \tilde{W} := L_2(\mathbb{S} \times \Lambda_1; \Lambda_1^m \times \Lambda_0^n)$, and adjoint eigenfunctions $F_i^* \in W$, $\Phi_i^* \in \tilde{W}$, related to the eigenvalues $\lambda_i \in \Lambda_0$, $i = \overline{1, N}$, of associated spectral problem, is considered.

The coupled hierarchy (1)-(2) is shown to be Hamiltonian with respect to the Poisson structure Θ being obtained from the tensor product of the $\mathcal{R}$-deformed Lie-Poisson bracket on $\mathcal{G}^*$ with the even standard Poisson bracket on $W^{2N} \times \tilde{W}^{2N}$ under some Bäcklund transformation. It is proven that the corresponding hierarchies of squared eigenfunction symmetries are generated by the Poisson structure Θ and the natural powers of eigenvalues $\lambda_i \in \Lambda_0$, $i = \overline{1, N}$, as Hamiltonian functions.

Олена Гірняк

Львівський національний університет імені Івана Франка
girniakolena@gmail.com

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

В прямокутнику $\Pi(T) = \{\, (x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T \,\}$ розглянемо систему гіперболічних квазілінійних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \quad i \in \{1...m\}, \quad u = (u_1, ..., u_m). \quad (1)$$

Для системи (1) розглянемо початково-крайові умови:

$$u(x,0) = \alpha(\upsilon(x), x), \quad x \in [0,l], \quad (2)$$

$$u_i(0,t) = \gamma_i^+(t, u(0,t), \upsilon^+(t)), \ \ i \in I_+^o = \{i \in \{1,...,m\} \,|\, \lambda_i(0,0,0) = 1\},$$

$$u_i(l,t) = \gamma_i^-(t, u(l,t), \upsilon^-(t)), \ \ i \in I_-^l = \{i \in \{1,...,m\} \,|\, \lambda_i(l,0,0) = -1\},$$

де керуючі впливи $\upsilon(x), \upsilon^+(t), \upsilon^-(t)$ є вектор-функції, що задовільняють обмеженням:

$$\int_0^l F_i(\upsilon(x))dx = L_i, \quad i \in \{1,...,m\}, \quad (3)$$

$$\int_0^T F_i^+(\upsilon^+(t))dt = L_i^+, \ \ i \in I_+^o, \quad \int_0^T F_i^-(\upsilon^-(t))dt = L_i^-, \ \ i \in I_-^l. \quad (4)$$

Метою задачі є оптимізація функціоналу

$$J(u) = \int_0^l \psi(u(x,T), x)dx + \iint_{\Pi_T} \Phi(u,x,t)dxdt.$$

За певних умов гладкості на вихідні дані задачі та обмеженості функціоналу, одержано умови розв'язності задачі (1)-(4). Випадок оптимального керування в задачах для лінійних та напівлінійних гіперболічних систем розглянуто в монографії [1].

1. Аргучинцев А.В. Оптимальное управление гиперболическими системами. - М.: Физматлит, 2007. – 168 с.

Володимир Гладун, Катерина Матулка

Національний університет „Львівська політехніка“
v_hladun@yahoo.com

СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

Об'єктом дослідження є функціональні гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД)

$$a_0(\mathbf{z})\left(b_0(\mathbf{z})+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}\right)^{-1}, \qquad (1)$$

де $a_{i(k)}(\mathbf{z})$, $b_{i(k)}(\mathbf{z})$ – деяка сукупність функцій визначених в області $D\subset\mathbb{C}^n$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots z_n)$, $i(k)\in I_k=\{i(k){=}i_1i_2\ldots i_k : 1\le i_p\le N,$ $p=\overline{1,k}\}$, $k=0,1,2,\ldots$

ГЛД (1) називають абсолютно стійким до збурень в точці $\mathbf{z}\in D$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що будь-який ГЛД

$$\widehat{a}_0(\mathbf{z})\left(\widehat{b}_0(\mathbf{z})+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\widehat{a}_{i(k)}(\mathbf{z})}{\widehat{b}_{i(k)}(\mathbf{z})}\right)^{-1} \qquad (2)$$

елементи якого задовольняють нерівності $\left|\widehat{a}_{i(k)}(\mathbf{z})-a_{i(k)}(\mathbf{z})\right|<\delta$, $\left|\widehat{b}_{i(k)}(\mathbf{z})-b_{i(k)}(\mathbf{z})\right|<\delta$, $i(k)\in I_k, k=0,1,2,\ldots$, збігається, і для кожного s, $s=0,1,2,\ldots$, виконуються нерівності $\left|\widehat{f}^{(s)}(\mathbf{z})-f^{(s)}(\mathbf{z})\right|<\varepsilon$, де $f^{(s)}(\mathbf{z})$, $\widehat{f}^{(s)}(\mathbf{z})$ – s-ті підхідні дроби ГЛД (1), (2) відповідно.

Якщо ГЛД (1) є абсолютно стійким до збурень в кожній точці $\mathbf{z}\in D$, то область D називають областю абсолютної стійкості до збурень.

Побудовано області абсолютної стійкості до збурень і встановлено оцінки похибок підхідних дробів деяких типів функціональних ГЛД, зокрема, багатовимірних регулярних C-дробів.

Тарас Глова, Петро Філевич

Львівський національний університет імені Івана Франка
ЛНУВМБТ ім. С. З. Ґжицького
glova1@ukr.net, filevych@mail.ru

ЗРОСТАННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ В ТЕРМІНАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ТИПІВ

Позначимо через $\mathcal{A}$ клас трансцендентних цілих функцій вигляду $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Для $f \in \mathcal{A}$ нехай $M_f(r) = \{|f(z)| : |z| = r\}$ – максимум модуля, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ – максимальний член, $G_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$.

Нехай Ω – клас опуклих на $\mathbb{R}$ функцій Φ таких, що $\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty$, $x \to +\infty$. Для $f \in \mathcal{A}$ і $\Phi \in \Omega$ покладемо

$$A_f(\Phi) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\Phi(\ln r)}, \quad B_f(\Phi) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\Phi(\ln r)},$$

$$C_f(\Phi) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_f(r)}{\Phi(\ln r)}, \quad \Delta(\Phi) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln \Phi'_+(x)}{\Phi(x)}.$$

Наступне твердження доповнює результати робіт [1]–[2].

Теорема. *Нехай* $\Phi \in \Omega$.

(i) Для довільної $f \in \mathcal{A}$ *правильні нерівності* $0 \le A_f(\Phi) \le B_f(\Phi) \le C_f(\Phi) \le \min\{A_f(\Phi) + \Delta(\Phi), B_f(\Phi) + \frac{1}{2}\Delta(\Phi)\}$.

(ii) Якщо $0 \le A \le B \le C \le \min\{A + \Delta(\Phi), B + \frac{1}{2}\Delta(\Phi)\}$, *то існує* $f \in \mathcal{A}$ *така, що* $A_f(\Phi) = A$, $B_f(\Phi) = B$, $C_f(\Phi) = C$.

Якщо $\Delta(\Phi) = 0$, то для кожної $f \in \mathcal{A}$ правильна рівність $B_f(\Phi) = A_f(\Phi)$. Цю рівність можна розглядати як формулу, за якою тип $B_f(\Phi)$ можна виразити через послідовність $(|a_n|)$ модулів коефіцієнтів функції $f \in \mathcal{A}$. У випадку $\Delta(\Phi) > 0$ таку формулу вказати не можна; як випливає з твердження (ii) у цьому випадку існують цілі функції $f \in \mathcal{A}$ і $g \in \mathcal{A}$, послідовності модулів коефіцієнтів яких співпадають, однак $B_f(\Phi) < B_g(\Phi)$.

1. Філевич П.В. Асимптотична поведінка цілих функцій з винятковими значеннями у співвідношенні Бореля // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 522–530.
2. Філевич П.В. Зростання цілої і випадкової цілої функції // Мат. студ. – 2008. – **30**, №1. – С. 15–21.

Юрій Гнатюк, Василь Гнатюк, Уляна Гудима

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
gneve@yandex.ru

НАЙКРАЩА У РОЗУМІННІ ОПУКЛОГО ЛІПШИЦЕВОГО ФУНКЦІОНАЛА АПРОКСИМАЦІЯ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ ПРОСТОРУ НЕПЕРЕРВНИХ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Нехай S – метричний компакт, X – сепарабельний нормований лінійний над полем комплексних чисел простір, X^* – простір, спряжений до X, $C(S,X)$ – лінійний над полем дійсних чисел простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ – сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $\tilde{C}(S,K(X))$ – множина багатозначних відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$ та які напівнеперервні зверху на S ,V – скінченновимірний підпростір простору $C(S,X)$, p – заданий на X опуклий ліпшіцевий функціонал.

Задачею найкращої у розумінні функціонала p рівномірної апроксимації відображення $a \in \tilde{C}(S,K(X))$ підпростором V будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p(y-g(s)). \tag{1}$$

Відображення $g^* \in V$ таке, що $\alpha_a^*(V) = \max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)} p(y-g^*(s))$, будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Теорема. *Для того, щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували точки $s_j \in S$, $y_j \in a(s_j)$, $f_j \in X^*$, додатні числа $\rho_j, 1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n+1$, $\sum\limits_{j=1}^{k}\rho_j = 1$, такі, що*

$$Ref_j(y_j - g^*(s_j)) - p^*(Ref_j) = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p(y - g^*(s)), j = \overline{1,k},$$

$$\sum_{j=1}^{k}\rho_i Ref_j(g(s_j)) = 0, g \in V.$$

Наталя Гоєнко, Леся Манзій

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Національний університет „Львівська політехніка“
hoyenko@ukr.net, lesly@ukr.net

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ЗАЛИШКІВ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ НЬОРЛУНДА

Відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$F_D(a,\mathbf{b};\,c;\,\mathbf{z})/F_D(a+1,\mathbf{b}+\mathbf{e}_1;\,c+1;\,\mathbf{z})$$

розвивається у гіллястий ланцюговий дріб Ньорлунда

$$b_0(\mathbf{z})+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathbf{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})},$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_{i(k)}(\mathbf{z})=\frac{(a+k)(b_{i_k}+p_{i(k)})}{(c+k-1)(c+k)}z_{i_k}(1-z_{i_k}),\quad k=1,2,\ldots,$$

$$b_{i(k)}(\mathbf{z})=1-\frac{a+k}{c+k}z_{i_k}-\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j+p_{i(k)j}}{c+k}z_j,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

де $a,b_1,\ldots,b_N,c$ — комплексні числа, причому $c\neq 0,-1,-2,\ldots$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_N)$, змінна $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)\in\mathbb{C}^N$, мультиіндекс $i(n)\in\mathfrak{I}=\{i(k)=i_1i_2\ldots i_k : i_s=\overline{1,N}, s=\overline{1,k}, k\in\mathbb{N}\}$, $i(0)=0$, $p_{i(k)}=\sum\limits_{l=1}^{k-1}\delta_{i_j}^{i_k}+\delta_{i_k}^{1}$, $\mathbf{e}_i=(\delta_i^1,\delta_i^2,\ldots,\delta_i^N)$, $i=\overline{1,N}$, δ_i^j – символ Кронекера.

Теорема. *Нехай $a,b_1,\ldots,b_n,c$ – довільні комплексні числа ($c\neq 0,-1,-2,\ldots$), тоді існує $n_0=n_0(a,b_1,\ldots,b_n,c)$ таке, що для кожного $n>n_0$ і довільного мультиіндексу $i(n)\in\mathfrak{I}$ залишок ГЛД Ньорлунда $Q_{i(n)}^{\infty}(\mathbf{z})=\left(b_{i(n)}(\mathbf{z})+\underset{k=n+1}{\overset{\infty}{\mathbf{D}}}\sum\limits_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}\right)^{-1}$ рівномірно збігається всередині області $G:=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N : |z_j|<1/8, j=\overline{1,N}\right\}$ до функції $F_D^{(N)}(a+n+1,\mathbf{b}+\mathbf{e}^{i(n+1)};c+n+1;\mathbf{z})/F_D^{(N)}(a+n,\mathbf{b}+\mathbf{e}^{i(n)};c+n;\mathbf{z})$, де $\mathbf{e}^{i(s)}=\sum\limits_{k=1}^{N}p_{i(s-1)k}\mathbf{e}_i$, $s=n,n+1$.*

Yuriy Golovaty

Ivan Franko National University, Lviv
yu_holovaty@franko.lviv.ua

RETURNING TO THE SUBJECT OF SCHRÖDINGER OPERATORS WITH PSEUDOPOTENTIALS

This talk is devoted to the mathematical justification of some solvable models in quantum physics. Point interactions represent a special case of singular perturbations, where the original operator is a differential operator and the perturbation has support of zero measure. The formal Hamiltonians with pseudopotentials

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}+\sum\alpha_k\delta_k(x)+\sum\beta_l\delta_l'(x)+\sum\gamma_m\,\delta_m'(x)\,\langle\delta_m'(x),\,\cdot\,\rangle$$

have been used by theoretical physics from the 1930s to obtain exactly solvable models of different physical phenomena. Here δ is the Dirac delta function, $\delta_i^{(j)}(x)=\delta^{(j)}(x-x_i)$, and α_k, β_l and γ_m are coupling constants taking values in $\mathbb{R}$. Summations are over some discrete sets of points.

Turning back to the problem of rigorous mathematical interpretation of the Schrödinger operator with pseudopotentials we show that the problem in its conventional formulation contains hidden parameters and the choice of the correct selfadjoint operators is ambiguously determined. Point interactions in one dimension appear naturally as boundary conditions for functions from the domain of an ordinary differential operator. In order to obtain these conditions we study the limit behaviour of the Hamiltonians with smooth sharply localized potentials that converge to the pseudopotentials in the sense of distributions. The results strongly depend on the way of smooth approximations of the pseudopotentials. Some resonant phenomena in the limit behaviour are discovered.

1. Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – **43**, No. 15. – 14 p.
2. Man'ko S. S. On δ'-like potential scattering on star graphs // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – **43**, No. 44. – 14 p.

Юрій Головатий, Віталій Гут

Львівський національний університет імені Івана Франка
yu_holovaty@franko.lviv.ua, v.hut@ukr.net

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА КОНТРАСТНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ

В доповіді йтиметься про спектральну крайову задачу, що виникає при дослідженні коливних процесів в сильно неоднорідних матеріалах. Ми моделюємо обмежене середовище, яке містить скінченну кількість легких і жорстких в стосунку до середовища включень.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$, причому $\Omega = \Omega_0 \cup \overline{\omega}$ та $\partial\Omega \subset \partial\Omega_0$. Підобласть Ω_0 – зв'язна, а ω може мати кілька компонент зв'язності $\omega_1, \ldots, \omega_m$. Вивчаємо асимптотику власних значень λ^ε та власних функції u_ε при $\varepsilon \to 0$ крайової задачі

$$-\mathrm{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1}$$

де додатні й обмежені коефіцієнти a_ε і ρ_ε мають вигляд

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon a(x), & x \in \Omega_0, \\ a_\omega(x), & x \in \omega, \end{cases} \qquad \rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho(x), & x \in \Omega_0, \\ \varepsilon^2 \rho_\omega(x), & x \in \omega. \end{cases}$$

Доведено, що граничний оператор, який визначає головні члени асимптотики, є некласичним самоспряженим розширенням оператора $-\mathrm{div}(a\nabla\,\cdot\,)$ в $L_2(\Omega_0)$, асоційованим з крайовою задачею

$$\begin{gathered} -\mathrm{div}(a\nabla u) = \mu\rho u \quad \text{в } \Omega_0, \qquad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ u \text{ – стала на } \partial\omega_k, \quad \int_{\partial\omega_k} a\,\partial_\nu u\,ds = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{2}$$

Тут ν – вектор нормалі на $\partial\omega$. Для власних значень λ_n^ε задачі (1) справедлива асимптотика $\lambda_n^\varepsilon = \varepsilon\mu_n + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, де μ_n – власні значення задачі (2). Відповідні власні функції $u_{\varepsilon,n}$ збігаються в Ω_0 до власних функцій задачі (2), а на ω їхні границі є сталими на кожній з компонент зв'язності. Подібні моделі вивчали також в [1,2].

1. Yu. Golovaty, D. Gomez, M. Lobo, E. Perez. On vibrating membranes with very heavy thin inclusions// Math. Models Methods Appl. Sci. – 2004. – **14**, N 7. – P. 987—1034.
2. N. Babych, Yu. Golovaty. Low and high frequency approximations to eigenvibrations in a medium with double contrasts // J. of Computational and Applied Math. – 2010. – **234**. – P. 1860–1867.

Юрій Головатий, Мирослава Прохоренко

Львівський національний університет імені Івана Франка
Національний університет „Львівська політехніка“
yu_holovaty@franko.lviv.ua, myroslava.prokhorenko@gmail.com

ЗАДАЧА КЕРУВАННЯ ТЕПЛОВИМ ПРОЦЕСОМ В СТЕРЖНІ

В доповіді розглядатимемо задачу керування тепловим процесом в однорідному стержні $I = (0, l)$. Мета керування – забезпечення певного температурного режиму у фіксованій точці x_0 стержня, а фактично в деякому її околі. Нехай $u(x, t)$ – температура стержня в точці x в момент часу t. Якщо на кінцях стержня підтримують нульову температуру і відсутні зовнішні джерела тепла, то з часом температура $u(x_0, t)$ падає до деякого критичного значення U_*. Тоді вмикають зовнішні джерела тепла, розподілені вдовж усього стержня, щоб підняти температуру в точці x_0 до значення U^*, більшого за U_*. В момент часу, коли $u(x_0, t)$ дорівнює U^*, зовнішні джерела вимикають. Крім того, значення температури U^* треба відновити за час, що не перевищує деякого $T > 0$. Модель описуємо задачею

$$\begin{aligned}
&u_t = au_{xx} + \chi(u)f(x,t), && (x,t) \in I \times \mathbb{R}_t^+,\\
&u(x,0) = \varphi(x), && x \in I,\\
&u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, && t \in \mathbb{R}_t^+,
\end{aligned}$$

де функції φ та f достатньо гладкі, $a > 0$, а також $U_* \leqslant \varphi(x_0) \leqslant U^*$. Нехай $\{t_n(u)\}_{n=1}^{\infty}$ – зростаюча послідовність моментів, в які вмикають чи вимикають зовнішні джерела. Елементи цієї послідовності з непарними номерами є коренями рівняння $u(x_0, t) = U_*$, а з парними – $u(x_0, t) = U^*$. Нелінійний функціонал керування $\chi(u)$ дорівнює одиниці на кожному з інтервалів $(t_{2k-1}(u), t_{2k}(u))$, довжини яких не перевищують T, і нулю поза ними. Зрозуміло, що це неявний опис $\chi(u)$, бо моменти $t_n(u)$ наперед невідомі і визначаються тепловим процесом. Подібні моделі з імпульсним підігрівом вивчали в [1,2].

1. Мышкис А.Д. Авторегулируемый импульсный точечный подогрев конечной среды // Мат. зам. – 2006. – **79**, №1. – С. 35–43.
2. Chow Y., Chen Yei-Mei and Hsieh J. On a heat conduction problem by Myshkis // J. Diff. Eq. and Appl. – 2000. – **6**. – P. 309–318.

Юрій Головатий, Володимир Флюд

Львівський національний університет імені Івана Франка
Політехніка Опольська, Польща
yu_holovaty@franko.lviv.ua, flyud@yahoo.com

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НА ГРАФІ З РЕБРАМИ РІЗНОЇ ЖОРСТКОСТІ

Нехай Γ – компактний зірковий граф в $\mathbb{R}^3$, який складається з n ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ зі спільною вершиною a. Об'єднання решти вершин називатимемо межею графа і позначатимемо $\partial\Gamma$. Граф моделює систему n струн, скріплених у спільній точці. Коливання системи описують функцією $u\colon \Gamma \times (0,T) \to \mathbb{R}$, що є розв'язком задачі для гіперболічного рівняння

$$\partial_t^2 u - a(x,\varepsilon)\,\partial_x^2 u + q(x)u = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{2}$$

$$u(x,t) = \mu(t), \qquad (x,t) \in \partial\Gamma \times (0,T). \tag{3}$$

З фізичних міркувань розв'язок u у вершині a повинен бути неперервним $u_{\gamma_1}(a,t) = u_{\gamma_2}(a,t) = \dots = u_{\gamma_n}(a,t)$ та справджувати умову балансу сил натягу $\big(\partial_{\gamma_1} u + \partial_{\gamma_2} u + \dots + \partial_{\gamma_n} u\big)(a,t) = 0$, де $t \in (0,T)$. Тут u_{γ_k} – звуження функції u на ребро γ_k, а $\partial_{\gamma_k} u(a,\cdot)$ – значення похідної за просторовою змінною у вершині a вздовж ребра γ_k в напрямку від цієї вершини. Коефіцієнт жорсткості $a(x,\varepsilon)$ є додатним на Γ для кожного $\varepsilon > 0$, але може стати нульовим при $\varepsilon = 0$ на усіх чи частині ребер графа. Крім того, швидкість виродження $a(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ на різних ребрах може відрізнятися.

Відомо [1, 2], що при кожному $\varepsilon > 0$ існує єдиний розв'язок u_ε задачі (1)–(3). Ми ж вивчаємо асимптотику u_ε при $\varepsilon \to 0$. За умов гладкості даних задачі побудовані повні розвинення стосовно степенів малого параметру ε таких розв'язків для різних випадків виродження коефіцієнта $a(x,\varepsilon)$ та доведена їхня асимптотична коректність.

1. Ali-Mehmeti F. Nonlinear waves in networks. – Academie-Verlag, 1994. – 173 pp.

2. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. Волновое уравнение на пространственной сети // Доклады РАН. – 2003. – **388**, № 1. – С. 16–18.

Рада Грабовська, Галина Соколовська

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова
Одеський національний морський університет
s.socol@bigmir.net

СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗЛІЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ „МАЙЖЕ РОЗВ'ЯЗКІВ“

Розглянемо систему диференціальних рівнянь виду

$$xy_k' = y_k + x\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} f_j\left(y_j'\right) + a_k\right) + F_k\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right),$$

$$k = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

де $\det\left(a_{kj}\right)_{k,j=1}^{n} \neq 0$. Позначимо через b_{j,i_j} розв'язки системи рівнянь $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} f_j(b_{j,i_j}) = -a_k,\ \ k = \overline{1,n}$. Тут при кожному фіксованому j множина індексів i_j злічення, $f_j \in \mathbf{C}^3\left(|y_j' - b_{j,i_j}| \leq r\right)$, $r > 0$, $j = \overline{1,n}$. Припустимо також, що функція $y_j = b_{j,i_j} x$, де $j = \overline{1,n}$, є "майже розв'язком" системи (1) при $x \to +0$, тобто

$\Phi_k(x) = F_k(x, b_{1i_1}x, ..., b_{ni_n}x,\ b_{1i_1}, ..., b_{ni_n}) = O(x^2)$, $x \to 0$,
$\Phi_k(x) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$.

Введемо нові змінні за формулами

$$y_k = b_{ki_k} x(1 + Y_k), Y_k(0) = 0, y_k' = b_{ki_k}(1 + S_k), S_k(0) = 0. \qquad (2)$$

Після підстановки (2) в систему (1) одержимо систему рівнянь, яка визначає неявні функції $S_k = \omega_k(x, Y_1, ..., Y_n)$, $\omega_k(0, ..., 0) = 0$ (умови існування неявних функцій вважаємо виконаними). Тоді з співвідношень (2), скориставшись для S_k формулою Тейлора, одержимо систему рівнянь виду

$$xY_k' = -Y_k + \sum_{j=1}^{n} C_{kj} Y_j + D_k x + R_{2k}(x, Y_1, Y_2, ..., Y_n),\ \ k = \overline{1,n}.$$

Одержано достатні умови існування хоча б одного або безлічі розв'язків цієї системи, що задовольняють умову $\sqrt{V(Y_1(x), ..., Y_n(x))} < \delta\phi(x)$, де $x \in (0; \Delta]$, V – функція Ляпунова, $\phi(+0) = 0$, $\phi \in \mathbf{C}^1(0; \Delta]$, $\phi'(x) > 0$, δ – велика, а $\Delta > 0$ – мала додатні сталі.

Геннадій Грабчак

Львівський національний університет імені Івана Франка
h_hrabchak@franko.lviv.ua

НИЗЬКОЧАСТОТНА АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ЖОРСТКОЇ ЗАДАЧІ НА ГЕОМЕТРИЧНОМУ ГРАФІ

Жорсткими називають крайові задачі, в яких коефіцієнти при старших похідних у диференціальному виразі мають суттєво різний порядок на різних частинах області. Нехай Γ – зв'язний скінченний геометричний граф в $\mathbb{R}^3$, який складається з двох підграфів Γ_1 і Γ_2, що перетинаються у вершинах $\{a_1, \ldots, a_l\}$; Γ_2 – зв'язний (це несуттєво). На Γ розглянуто жорстку спектральну задачу для оператора $L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv (p_\varepsilon u_\varepsilon')' + \lambda_\varepsilon \rho u_\varepsilon$, де ε – малий параметр; $p_\varepsilon = 1$ на Γ_1 і $p_\varepsilon = \varepsilon$ на Γ_2; λ_ε – спектральний параметр; ρ – гладка додатна функція на ребрах Γ; умови закріплення (Діріхле) наявні лише у деяких вершинах підграфа Γ_2. В механіці жорсткі задачі описують власні коливання пружних струнних сіток, які виготовлені з матеріалів із суттєво різною жорсткістю.

З'ясовано, що власні значення з фіксованими номерами задачі є неперервними функціями параметра ε, безмежно малими при $\varepsilon \to 0$. Нехай Γ_b – граф, одержаний з Γ_2 ототожненням вершин $\{a_1, \ldots, a_l\}$ з точкою b. Показано, що в головному власні коливання збуреної системи є плоско-паралельними рухами її жорсткішої частини Γ_1, а амплітудні функції коливань менш жорсткої частини Γ_2 є розв'язками спектральної задачі на графі Γ_b з концентрованою масою у вершині b, величина якої дорівнює масі частини Γ_2. З'ясовано і обґрунтовано пономерну збіжність спектра збуреної задачі до спектра граничної, побудовано і обґрунтовано повні асимптотичні розвинення простого власного значення і власної функції збуреної задачі. Таку задачу для оператора четвертого порядку на інтервалі (модель стержня) досліджено в [1], де також вивчено явище резонансу з породженими ним високочастотними формами коливань.

1. Babych N. O., Golovaty Yu. D. Complete WKB asymptotics of high frequency vibrations in a stiff problem // Математичні студії. – 2000. – **14**, №1. – С. 59–72.

Rostyslav Hryniv

Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
rhryniv@iapmm.lviv.ua

RECONSTRUCTION OF LAYERED DIELECTRIC MEDIA FROM THE AMPLITUDE OF THE REFLECTION COEFFICIENTS

The aim of the talk is to discuss a possibility to solve the inverse scattering problem of reconstructing a layered dielectric medium from the known amplitude of the reflection coefficient for the electromagnetic wave under the normal incidence. Assuming that the layers are isotropic and the permeability of the structure is known, we recast the corresponding Maxwell system as a Schrödinger equation in impedance form, with a piece-wise constant impedance function p involving an unknown permittivity. The problem of interest is to reconstruct p from the amplitude of the reflected wave. The motivation for this setting is that in practice it is much easier to measure the amplitude than the phase.

Similarly to the case of a Schrödinger operator in potential form, such an inverse scattering problem has no unique solution, and the question is what additional information guarantees uniqueness of reconstruction. We prove that such additional information can be the amplitude of the reflection coefficient of the artificially enlarged system, with one extra layer of known characteristics added. This is an analogue of the result in [1] established therein for potential scattering.

Further, we prove that if only the reflection amplitude and the characteristics of the first layer are known, then the dielectric system can be unambiguously reconstructed if the layer widths are pairwise incommensurable, but no uniqueness holds in general. In the case of a periodic layer grid, we clarify the reason for such non-uniqueness and describe the sets of “isospectral” impedance functions.

The talk is based on a joint project with Z. Nazarchuk and A. Synyavskyy (Physico-Mechanical Institute, Lviv).

1. Aktosun T. and Sacks P. E. Inverse problem on the line without phase information // Inverse Problems. – 1998 – **14**, № 2. – P. 211–224.

Надія Гринців

Львівський національний університет імені Івана Франка
hryntsiv@ukr.net

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНИМ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$ — невідома функція, розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $b = b(t)$ при першій похідній невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні

$$u_t = \psi(t)a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h(t),t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3}$$

та інтегральними умовами перевизначення

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_4(t),\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Відомо, що $a = a(x,t)$ строго додатна функція, $\psi = \psi(t)$ — монотонна зростаюча функція, $\psi(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $\psi(0) = 0$.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку $(b,h,u) \in C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$ задачі (1)-(5) у випадку слабкого виродження, коли $\lim\limits_{t\to+0}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$.

Орест Гуменчук, Максиміліан Гаєк, Анджей Маринович

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Політехніка Опольська, Польща
dept13@iapmm.lviv.ua

ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ЧАСТКОВО ПРОЗОРИХ ТІЛАХ ЗА ТЕПЛОВОГО ОПРОМІНЕННЯ

В сучасних інженерних конструкціях широко використовуються частково прозорі для теплового випромінювання елементи, виготовлення чи експлуатація яких часто пов'язані з дією теплового опромінення. Така дія проявляється в утворенні об'ємних тепловиділеннях у тілі, в результаті яких виникають взаємозв'язані теплові і механічні процеси. При цьому можуть досягатись високі рівні напружень, які можуть перевищувати допустимі і суттєво впливати на міцнісні та функціональні параметри відповідних виробів. Тому актуальним є дослідження зумовленого тепловим опроміненням термонапруженого стану частково прозорих тіл та встановлення закономірностей їх нагріву з метою визначення допустимих меж параметрів зовнішнього теплового опромінення та термомеханічного навантаження.

В роботі на основі феноменологічної теорії випромінювання та квазістатичної термопружності сформульовано вихідну математичну модель, що описує зумовлені тепловим опроміненням зв'язані процеси теплообміну випромінюванням, теплопровідності та деформації в частково прозорих тілах. За ключові функції вибрано інтенсивність випромінювання, температуру та компоненти тензора напружень. Дана модель містить системи інтегральних рівнянь типу Вольтера другого роду (для запису яких використано розв'язок рівняння переносу енергії випромінювання), рівняння теплопровідності та співвідношення квазістатичної термопружності за відповідних початкових та граничних умов, що враховують теплообмін та силове навантаження на поверхнях тіла. При цьому здійснений перехід від інтегрування по поверхнях до інтегрування по тілесних кутах, в які стягують дані поверхні, дав змогу усунути наявні сингулярності в ядрах інтегральних рівнянь.

При отриманні розв'язків використано методи квадратур, скінченних різниць та ітерацій.

Сергій Гуран, Богдан Копитко

Львівський національний університет імені Івана Франка
bohdan.kopytko@gmail.com

ПРО ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ В УМОВІ СПРЯЖЕННЯ

Нехай S — замкнена поверхня в $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, яка розділяє $\mathbb{R}^n$ на дві області — внутрішню D_1 і зовнішню D_2, так, що $\mathbb{R}^n = D_1 \cup D_2 \cup S$. Розглянемо задачу спряження, в якій при $t > 0,\ x \in D_m,\ m = 1, 2$, задані диференціальні рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)}(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} = 0,$$

при $t = 0$ шукана функція u задовольняє початкову умову $u(0,x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n$, а при $t > 0,\ x \in S$ — умови спряження

$$\begin{aligned} &u(t, x-) = u(t, x+), \\ &\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \Big(l^{(1)}(x), \nabla u(t, x-)\Big) - \Big(l^{(2)}(x), \nabla u(t, x+)\Big) = 0, \end{aligned}$$

де $b_{ij}^{(m)}(x) = b_{ji}^{(m)}(x),\ \ \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(m)}(x)\theta_i\theta_j \geq b_0|\theta|^2,\ \forall x \in \overline{D}_m,\ \ \theta \in \mathbb{R}^n$, $b_0 = \text{const} > 0,\ \ l^{(m)}(x) = \Big(l_1^{(m)}(x), \ldots, l_n^{(m)}(x)\Big),\ \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $\big(l^{(m)}, \nabla u\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i^{(m)} \frac{\partial u}{\partial x_i}$, а символи $u(t, x-)$ $(\nabla u(t, x-))$ та $u(t, x+)$ $(\nabla u(t, x+))$ означають недотичні границі функції u (градієнта функції u) в точці $x \in S$ з боку множин D_1 та D_2 відповідно.

Відзначимо, що сформульована задача виникає, зокрема, у теорії випадкових процесів при вивченні аналітичними методами задачі про склеювання двох дифузійних процесів з умовою спряження типу Вентцеля [1]. Класичну розв'язність задачі спряження отримано нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайного потенціалу простого шару.

1. Вентцель А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процесов // Теория вероятн. и её примен. – 1959. – **4**, №2. – С. 172–185.

Ігор Демків

Національний університет „Львівська політехніка“
ihor.demkiv@gmail.com

ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ

Уперше інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби (І ІЛД) були введені у роботі [1]. Але досліджуваний у [1] І ІЛД має одну ваду: він не переходить у інтерполяційний ланцюговий дріб для функції однієї змінної, коли його аргумент та каркас континуальних вузлів стають тотожними сталими. Щоб позбутися цієї вади у [2] введений новий клас ІЛД такий, щоб він був природним узагальненням інтерполяційного ланцюгового дробу.

Метою цієї роботи є побудова та дослідження ІЛД, що інтерполює нелінійні функціонали від двох змінних. При цьому залишається вимога, щоб вузли інтерполяції були континуальними за кожною змінною окремо.

Доведена теорема про визначення ядер побудованого ІЛД, що є необхідною умовою інтерполяційності цього дробу для функціонала від двох змінних. Достатньою умовою інтерполяційності досліджуваного ІЛД є те, щоб функціонал $F\left(x\left(\cdot\right), y\left(\cdot\right)\right)$ задовольняв правило підстановки за кожною змінною окремо.

Знайдено вигляд досліджуваного І ІЛД, коли його аргумент та каркас континуальних вузлів стають тотожними сталими. Доведено, що одержаний ланцюговий дріб є інтерполяційним для функції від двох змінних. Слід зауважити, що цей І ІЛД відрізняється від інтерполяційних гіллястих ланцюгових дробів, запропонованих у [3].

1. Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів // УМЖ. – 1999. – **51**, №3. – С. 364–375.
2. Макаров В.Л., Демків І.І. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 17–23.
3. Кучмінська Х.Й. Двовимірні неперервні дроби. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.

Наталья Деркач

Севастопольский национальный технический университет
natalyaderkach@gmail.com

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ ГАЗА

Исследуется тонкий слой газа, заключенный между двумя усеченными коническими поверхностями, одна из которых может смещаться в трех направлениях [1]: в осевом(ζ), радиальном(ε) и угловом(χ). Давление в газовом слое описывается уравнением в частных производных второго порядка эллиптического типа [1]

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \Theta_1 \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) \sin^2 \psi + \nu^3 \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\Theta_2 \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) = 0.$$

Здесь $U(\rho,\,\varphi)$ — квадрат безразмерного давления, а Θ_1 и Θ_2 — достаточно сложные функции ρ и φ. Поэтому аналитическое решение этого уравнения при произвольных значениях ε и χ невозможно. Но при малой несоосности эти выражения упрощаются, производные в уравнении можно раскрыть и искать решение в виде функционального ряда, в котором остаются только члены нулевого и первого порядка относительно ε и χ: $U(\rho, \varphi) = R_0 + R_1 \cos \varphi$.

В результате получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых является уравнением второго порядка относительно функций $R_0(\rho)$ и $R_1(\rho)$. Интегрирование этой системы дает общее решение исходного уравнения в виде

$$U(\rho, \varphi) = a_{01} + a_{02} \ln \rho + (a_{11} \rho^{\sigma} + a_{12} \rho^{-\sigma} - 3\chi \Lambda a_{02} \rho) \cos \varphi.$$

Константы a_{01}, a_{02}, a_{11} и a_{12} должны определяться из краевых условий конкретной задачи, а величины σ и Λ зависят от параметров конструкции.

1. Деркач Н.А. Теория и расчет осесимметричных подвесов при наличии осевых, радиальных и нутационных смещений подвижного элемента // Всесоюзная школа-семинар: Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону, 1990.

Володимир Дільний, Ярослав Ренчка

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
dilnyi@ukr.net

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ВІНЕРА-ХОПФА У КУТОВІЙ ОБЛАСТІ

Позначимо через $E^2[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ простір функцій, аналітичних в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких

$$\sup_{\varphi\in(\alpha;\beta)} \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi}|^2 dr < +\infty.$$

Розглядається рівняння

$$\varphi(\tau) - \int\limits_{\partial\mathbb{C}(0;\pi/2)} K(w-\tau)\varphi(w)dw = \xi(\tau), \tag{1}$$

де $\xi \in E^2[\mathbb{C}(\pi/2;2\pi)]$, $K \in E^2[\mathbb{C}(-\pi/2;\pi)]$, $\tau \in \partial\mathbb{C}(0;\pi/2)$, а функція φ шукається у класі $E^2[\mathbb{C}(\pi/2;2\pi)]$.

Теорема. *Рівняння (1) має розв'язок $\varphi \in E^2[\mathbb{C}(\pi/2;2\pi)]$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\frac{Q(z)}{1-K(z)} \in E^2[\mathbb{C}(\pi/2;\pi)].$$

У цьому випадку розв'язок єдиний і визначається формулою

$$\varphi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty e^{i\theta}} \frac{Q(z)}{1-K(z)} e^{-zw} dz, \quad \theta \in \mathbb{C}(\pi/2;\pi).$$

Мар'ян Дмитришин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
m_dmytryshyn@hotmail.com

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТЕНЗОРНИХ ДОБУТКІВ ПРОСТОРІВ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Нехай $\{\mathfrak{X}_j, \|.\|_{\mathfrak{X}_j}\}_{j=1}^J$ — скінченний набір банахових просторів над полем комплексних чисел. На просторі $\mathfrak{X}_j$, $j=1,\dots,J$, розглядаємо необмежений замкнений лінійний оператор $A_j : \mathcal{D}(A_j) \subset \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A_j)$. Для будь-яких чисел $\nu_j > 0$, $1 \le p_j \le \infty$ визначимо простори цілих векторів експоненціального типу оператора A_j

$$\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) \equiv \left\{ x \in \mathcal{D}(A_j) : \ \|x\|_{\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A_j^k x\|_{\mathfrak{X}_j}^{p_j}}{\nu_j^{kp_j}} \right)^{1/p_j} < \infty \right\}.$$

Побудуємо тензорний добуток $\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j) \equiv \mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)$ з проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}_{p_1}^{\nu_1}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}_{p_J}^{\nu_J}(A_J)}.$$

Нехай $0 < \nu_j, \gamma_j < \infty$, $1 \le q, q_j, p_j, r_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Використовуючи позначення роботи [1], визначимо інтерполяційні простори

$$\big(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j} \text{ і } \big(\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \otimes_j \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q}.$$

Теорема. *Нехай* $0 < \nu_j, \gamma_j < \infty$, $1 \le q, q_j, p_j, r_j \le \infty$, $0 < \theta < 1$. *Тоді при* $\dfrac{1}{q} - 1 = \sum_{j=1}^{J} \left(\dfrac{1}{q_j} - 1 \right)$ *справедлива рівність*

$$\big(\otimes_j \mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \otimes_j \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q} = \otimes_j \big(\mathcal{E}_{p_j}^{\nu_j}(A_j), \mathcal{E}_{r_j}^{\gamma_j}(A_j)\big)_{\theta,q_j}.$$

1. Triebel H. Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1995.

Роман Дмитришин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
dmytryshynr@hotmail.com

ПРО ДЕЯКІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ БАГАТОВИМІРНОГО J-ДРОБУ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Функціональні неперервні дроби (g-дроби, J-дроби, C-дроби) відіграють важливу роль при дослідженні голоморфних і мероморфних функцій. Серед різноманітних багатовимірних узагальнень таких дробів найбільш пристосованими до наближення функцій багатьох змінних є гіллясті ланцюгові дроби. Найпростішими конструкціями за структурою аналогічними структурі кратних степеневих рядів є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними, зокрема, багатовимірні J-дроби з нерівнозначними змінними

$$\sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{-a_{i(1)}^2}{b_{i(1)} + z_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{-a_{i(2)}^2}{b_{i(2)} + z_{i_2} + \ddots + \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i_k} + \ddots}}},$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$; $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$ — мультиіндекс; $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, — комплексні сталі, причому всі $a_{i(k)} \ne 0$.

При накладанні певних обмежень на коефіцієнти таких дробів досліджено їх збіжність у деяких областях простору $\mathbb{C}^N$.

Михайло Довжик, Володимир Назаренко

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
medved_mik@ukr.net, nazvm1@gmail.com

РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛУ ПІД ЧАС СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ДИСКОВОЇ ТРІЩИНИ ДЛЯ МАЛИХ ЗНАЧЕНЬ ВІДСТАНЕЙ МІЖ ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ І ТРІЩИНОЮ

Розглядається просторова осесиметрична задача про руйнування півплощини з приповерхневою дисковою тріщиною, що знаходиться в площині, паралельній до вільної поверхні, під час двохосного рівномірного стиску вздовж площини тріщини. Для дослідження отриманої для такого випадку системи інтегральних рівнянь Фредгольма [1] у випадку рівних коренів, використовувалась методика, побудована на основі методу Бубнова-Гальоркіна. Як системи координатних функцій використовувались степеневі функції.

Для розрахунків використовувався пакет символьної математики Wolfram Mathematica, який дозволив, використовуючи рекурентні співвідношення, аналітично порахувати інтеграли від ядер та з наперед заданою гарантованою точністю провести необхідні розрахунки.

Для гармонічного потенціалу визначено значення критичних напружень та критичних скорочень для різних значень $\beta = ha^{-1}$, де h – відстань між вільною поверхнею і площиною тріщини, a – діаметр тріщини. Підчас обчислень були отримані результати аж до $\beta = 10^{-9}$.

Отримані результати показують, що вже для $\beta = 0.05$ розбіжність між отриманими критичними напруженнями та результатами для наближених розрахункових схем [2] у випадку жорсткого закріплення круглої пластини буде менше 1% .

1. Guz A.N., Nazarenco V.M. Symmetric failure of the halfspace with penny-shaped cracks in compression // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 1985. – **3**. – P. 233–245.
2. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. Трехмерная теория устойчивости стержней пластин и оболочек. – Киев: Высшая школа, 1980. – 168 с.

Мирослава Долинюк, Олег Скасків

Бродівський педагогічний коледж імені Маркіяна Шашкевича
Львівський національний університет імені Івана Франка
mira0201@rambler.ru; matstud@franko.lviv.ua

ПРО СТІЙКІСТЬ МАКСИМУМА ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $D(\lambda)$ клас цілих рядів Діріхле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $z \in \mathbb{C}$, де $\lambda = (\lambda_n)$ – деяка послідовність така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$, а $D_*(\lambda)$ – клас формальних рядів Діріхле таких, що $a_n e^{x\lambda_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$, тобто, для кожного $x \in \mathbb{R}$ існує максимальний член $\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n} : n \ge 0\} < +\infty$.

Нехай L_+ – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Через $\mathcal{W}$ позначимо клас функцій $w \in L_+$ таких, що $\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x)dx < +\infty$. Для $w \in L_+$, $F \in D_*(\lambda)$, позначимо $B_w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{w(\lambda_n)+z\lambda_n}$.

Теорема 1. *Нехай $w \in L_+$, $B_w \in D_*(\lambda)$ і виконується умова*
$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln \nu(t)dt < +\infty$, *де* $\nu(t) = \int_0^t e^{w(x)}dn(x)$, $n(x) = \sum_{\lambda_n \le x} 1$.
Тоді співвідношення $\ln \mu(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, B_w)$ виконується при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри.

Наслідок 1. *Нехай для $\lambda = (\lambda_n)$ виконується умова $\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln n(t)dt < +\infty$, $n(t) \stackrel{def}{=} \sum_{\lambda_n \le t} 1$. Якщо $w \in \mathcal{W}$ і $B_w \in D_*(\lambda)$, то співвідношення $\ln \mu(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, B_w)$ виконується при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри.*

Раніше в [1] твердження Теореми 1 і Наслідку 1 було встановлено за умови $\{F, B^+, B^-\} \subset D(\lambda)$, і висловлювалось припущення ([1]), що вказану умову можна замінити на умову $\{F, B^+, B^-\} \subset D_*(\lambda)$, де $B^{\pm}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{\pm 1} a_n e^{z\lambda_n}$, а $b_n \in \mathbb{C}$ такі, що $\ln(|b_n| + |b_n|^{-1}) \le w(\lambda_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Власне, зі сформулюваних теорем випливає, що це припущення правильне.

1. Скасків О.Б., Тракало О.М. Про стійкість максимального члена цілого ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, №4. – С. 571–576.

Ярослав Дрінь

Буковинська державна фінансова академія
drin_jaroslav@i.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛОКАЛЬНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Еволюційні рівняння з псевдодиференціальними операторами (ПДО) виникають при моделюванні різних реальних процесів і мають важливі застосування [1]. С.Д. Ейдельман і Я.М. Дрінь означили параболічні ПДО з негладкими символами і розпочали дослідження задачі Коші для них (див. бібліографію, наведену в [1]). В [1] А.Н. Кочубей вперше трактував ПДО як гіперсингулярні оператори і отримав завершені результати, її досліджували також В.В. Городецький, В.А. Літовченко, М.В. Федорюк, Ю.А. Дубінський та ін.

У даній доповіді розвивається методика дослідження m-точкової ($m \geq 3$) задачі для еволюційного рівняння з ПДО, побудованим за негладким однорідним символом, залежним від часу, та крайовою умовою, яка визначається узагальненою функцією скінченного поряд-ку, а саме: 1) досліджується структура та властивості фундаментального розв'язку; 2) встановлюється її коректна розв'язність в класі крайових умов, які є узагальненими функціями типу розподілів; 3) доведено, що розв'язок m-точкової задачі має властивість локалізації (див. [2], в якій розвинуто методику, відмінну від [3], де $m = 2$).

1. Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, №5. – С. 909–934.
2. Дрінь Я.М. Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. НАНУ. – 2010. – №7. – С. 7–11.
3. Городецький В.В., Дрінь Я.М. Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Випуск 336–337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 63–78.

Богдан Дробенко, Олександр Бурик

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
dept13@iapmm.lviv.ua

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА УМОВ ПОЖЕЖІ

Запропоновано методику числового розв'язування нестаціонарної задачі теплопровідності в елементах будівельних конструкцій за умов пожежі з урахуванням температурної залежності теплофізичних характеристик.

В основу покладено підхід, який ґрунтується на сумісному застосуванні в межах однієї обчислювальної схеми методу скінченних елементів (для апроксимації шуканих розв'язків за просторовими змінними) та різницевих алгоритмів (для апроксимації за часом) за використання різних за величиною кроків числового інтегрування рівняння теплопровідності за часом.

Внаслідок проведення стандартної процедури скінчено-елементної дискретизації за просторовими змінними у варіанті методу зважених залишків, задачу теплопровідності зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих значень температури у вузлах скінченно-елементного поділу області тіла. Вихідні співвідношення методу зважених залишків отримано при цьому відомим способом, — домножаючи рівняння теплопровідності на довільну вагову функцію, інтегруючи його по області визначення і понижуючи порядок виразів на шукану температуру під інтегралами за рахунок використання формули Остроградського-Гауса.

Як приклад, знайдено розподіли температури у бетонних і залізобетонних балках за умов пожежі. Виконано дослідження збіжності і достовірності отриманих розв'язків. Наведено порівняльний аналіз результатів числового моделювання з експериментальними результатами, отриманими під час пожеж. Досліджено вплив сталевого зміцнення (арматури) на перебіг процесів теплопровідності у залізобетонних балках.

Марія Дубей

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mariadubey@gmail.com

АНАЛОГ СИМЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРНОГО ДОБУТКУ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Нехай $X, Y-$ метричні простори з відміченими точками θ_x та θ_y відповідно.

Побудуємо множину $\Omega_X = \{\underline{x}_1 - \underline{x}_2 \,|\, x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\} \cup \theta_x$ та $\Omega_Y = \{\underline{y}_1 - \underline{y}_2 \,|\, y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2\} \cup \theta_y$, де $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \operatorname{span} X$ (формальна лінійна оболонка простору X), $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \operatorname{span} Y$. Розглянемо простір Σ формальних сум $\sum\limits_i \lambda_i(x_i, y_i)$, де $(x_i, y_i) \in \Omega_X \times \Omega_Y$ та його підпростір $\Sigma_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k(x_k, \theta_y) + \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(\theta_x, y_j)$. Позначимо фактор-простір через $\widetilde{\Sigma} = \Sigma/\Sigma_0$, а клас еквівалентності елемента (x, y) через $x \diamond y$. Будемо називати *тензорним добутком* метричних просторів X та Y множину

$$X \diamond Y = \{x \diamond y \,|\, x \in \Omega_X, y \in \Omega_Y\}.$$

Така побудова аналогу тензорного добутку для метричних просторів описана в [1]. У доповіді розглядатиметься аналог симетричного тензорного добутку $X \diamond_s Y$ та $\diamond_s^n X$ і деякі його застосування.

1. Дубей М.В. Аналог тензорного добутку метричних просторів. // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2010. – Вип. 501. – С. 33–38.

Анна Дудикевич, Софія Левицька

Львівський національний університет імені Івана Франка
Sofialev@mail333.com

ОДИН СПОСІБ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ В ПРИГРАНИЧНИХ ВУЗЛАХ РІЗНИЦЕВОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

При розв'язуванні задачі Діріхле для рівняння Пуассона в прямокутній області використовують різні наближені методи. У даній роботі диференціальна задача зводиться до різницевої зі застосуванням неортогонального семиточкового шаблону [1] на рівномірній сітці.

Для знаходження розв'язку в приграничних вузлах сітки будуємо інтерполяційний кубічний сплайн з дефектом 1. Невідомі коефіцієнти сплайну одержуємо з умов інтерполяції та умов гладкості з'єднання ланок сплайну [2].

Різницева задача розв'язується ітераційним методом простої ітерації, Зейделя, релаксації за точками та лініями [3]. На різних модельних задачах показана ефективність використання запровадженої методики.

1. Bystrytsky M. Method of building difference Laplace operators on nonorthogonal patters // Procerdings of Kyiv Univ. – 1999. – №1. – P. 117–129.
2. Цегелик Г.Г. Чисельні методи: Підручник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 408 с.
3. Дудикевич А.Т., Кардаш А.І., Левицька С.М. Ефективний спосіб розв'язування різницевої задачі Діріхле на семиточковому шаблоні для рівняння Пуассона // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2005. – **2** (10). – С. 45–48.

Вячеслав Евтухов, Александр Клопот

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
emden@farlep.net, mrtark@gmail.com

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{ij}(y^{(j)}), \tag{1}$$

где $\alpha_i \in \{-1;1\}$ $(i = 1,\dots,m)$, $p_i : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(i = 1,\dots,m)$ – непрерывные функции, $\varphi_{ij} : \triangle_{Y_j} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(i = 1,\dots,m;\ j = 0,\dots,n-1)$ – непрерывные и правильно меняющиеся при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$ функции порядков σ_{ij}, $(i = 1,...,m;\ j = 0,\dots,n-1)$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\triangle_{Y_j}$ – одностороняя окрестность Y_j, Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$y^{(j)} : [t_0,\omega[\longrightarrow \triangle_{Y_j}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = 0,\dots,n-1),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

При фиксированных $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$ и $k \in \{1,\dots,m\}$ получены необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$-решений, для которых

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{ij}(y^{(j)}(t))}{p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)}(t))} = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{1,\dots,m\} \setminus \{k\}.$$

Установлены также асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

Андрій Загороднюк, Вікторія Кравців

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
andriyzag@yahoo.com, maksymivvika@gmail.com

ЗОБРАЖЕННЯ СПЕКТРА АЛГЕБРИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ У ВИГЛЯДІ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Розглянемо простір $\mathcal{X}_m^2 = \oplus_1^m \mathbb{C}^2$ з нормою $\|\overline{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{m} \|x_i\|$, де вектор $\overline{x} \in \mathcal{X}_m^2$ і $x_i \in \mathbb{C}^2$. Будемо називати поліном P на просторі $\mathcal{X}_m^2$ *блочно-симетричним (векторно-симетричним)*, якщо:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

де $x_i \in \mathbb{C}^2$ і σ – довільна підстановка на множині $\{1, 2, \ldots, m\}$. Позначимо $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ — алгебру блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}_m^2$ і $\mathcal{M}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ — множину характерів (комплексних гомоморфізмів) алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$.

Відомо (див. напр. [1]), що поліном вигляду:

$$R_n^{p,q}(x, y) = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ j_1 < \ldots < j_q \\ i_k \neq j_l}} x_{i_1} \ldots x_{i_p} y_{j_1} \ldots y_{j_q},$$

де p, q – кількість x_{i_k} і y_{j_l} відповідно і $p + q = n$, утворюють множину твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$.

Нехай $\mathbb{C}\{t_1, t_2\}$ — простір усіх степеневих рядів над $\mathbb{C}^2$. У доповіді буде показано, що відображення $\mathcal{R}(\varphi) = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ p+q=k}}^{m} t_1^p t_2^q \varphi(R_n^{p,q})$, яке діє з $\mathcal{M}_{vs}(\mathcal{X}_m^2)$ у $\mathbb{C}\{t_1, t_2\}$ є функцією експоненціального типу з плоскими нулями.

1. Вейль Г. Классические группы: их инварианты и представления. Государственное издательство иностранной литературы. – М: Мир – 1973.

Андрій Загороднюк, Михайло Митрофанов

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
mishmit@rambler.ru

ЗВ'ЯЗОК МІЖ СЛАБКОЮ ПОЛІНОМІАЛЬНОЮ ТОПОЛОГІЄЮ ТА ІСНУВАННЯМ РОЗДІЛЯЮЧОГО ПОЛІНОМА НА БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

При дослідженні задачі про апроксимацію неперервних функцій на банахових просторах (див. наприклад [1]) виникає необхідність у розгляді розділяючих поліномів та дослідженні їх властивостей.

Нагадаємо означення розділяючого полінома.

Означення. *Нехай X є нормованим простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q\colon X \to \mathbb{R}$ називається розділяючим поліномом, якщо $q(x)$ задовольняє умову:*

$$\inf_{x \in X,\ ||x||=1} |q(x) - q(0)| > 0. \tag{1}$$

Визначимо *слабко поліноміальну топологію* на дійсному банаховому просторі X як найслабшу топологію w_P, відносно якої всі неперервні поліноми на X зі значеннями в полі $\mathbb{R}$ будуть неперервними. Справедливою є наступна теорема.

Теорема 1. *Слабко поліноміальна топологія на дійсному просторі X збігається з топологією норми тоді і тільки тоді, коли на X існує розділяючий поліном.*

Добре відомо, що у нескінченновимірному банаховому просторі одинична сфера є щільною в одиничній кулі у слабкій топології. Наступна теорема показує, що при певних умовах w_P має таку ж властивість.

Теорема 2. *Нехай X — нескінченновимірний дійсний банахів простір. Одинична сфера S_X є щільною в одиничній кулі $\overline{B}_X$ у слабко поліноміальній топології тоді і тільки тоді, коли X не допускає розділяючого полінома.*

1. Kurzweil J. On approximation in real Banach spaces // Studia Math. – 1954. – **14**. – P. 214–231.

Андрій Загороднюк, Олена Тарас

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ОПЕРАТОР МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ ЗГОРТКИ В ПРОСТОРІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВІЙ АЛГЕБРІ

Нехай A – банахова алгебра, $B(A)$ – простір обмежених лінійних операторів, $H_b(A)$ – алгебра аналітичних функцій обмеженого типу на A, $M_b(A)$ – множина комплексних гомоморфізмів на $H_b(A)$, T_a – лінійний оператор множення на елемент алгебри $a \in A$, $T_a \in B(A)$. Для функціоналів $\phi, \psi \in H_b^*(A)$ означимо оператор мультиплікативної згортки $(\phi \star \psi)(f) = \phi(\psi(f(x \cdot y)))$, $f \in H_b(A)$, $x, y \in A$.

Розглянемо оператор $(\Lambda_{T_a}\phi)(f) = \phi(f \circ T_a)$, де $f \in H_b(A)$, $\phi \in H_b^*(A)$. Якщо у згортці $\phi \star \psi$ функціонал ϕ визначається як значення функції у точці ($\phi = \delta_{u_1}$, $u_1 \in A$), то дана згортка запишеться в термінах оператора $\Lambda_{T_{u_1}}\phi$: $(\phi \star \psi)(f) = (\Lambda_{T_{u_1}}\psi)(f)$, де $\psi \in M_b(A)$.

Згідно з [1] довільний комплексний гомоморфізм $\phi \in M_b(A)$ можна розглядати як послідовність елементів u_n: $\phi = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$, де $u_n \in E_n \subset (\otimes_{s\pi}^n A)^{**}$ і гомоморфізм вигляду $(0, 0, \ldots, 0, u_k, 0, \ldots)$ анулюється на поліномах степеня, меншого за k. Згортка $\phi \star \psi \in M_b(A)$ [2], тому $\phi \star \psi = (w_1, w_2, \ldots)$, $w_i \in E_i \subset (\otimes_{s\pi}^i A)^{**}$. У доповіді буде розглядатися питання про те, як залежать $(w_1, w_2, \ldots)$ від ϕ, ψ.

Твердження 1. *Нехай $\psi = (0, \ldots, 0, v_k, 0, \ldots)$, $k > 1$, T – довільний лінійний оператор з $B(A)$, P – поліном степеня $j < k$. Якщо гомоморфізм $(\Lambda_T\psi)(P) = \delta_z(P)$, то $z = 0$.*

Теорема 1. *Нехай $\phi = (u_1, 0, \ldots) \in M_b(A), \psi = (0, \ldots, 0, v_k, 0, \ldots) \in M_b(A), k > 1$. Тоді $\Lambda_{T_{u_1}}\psi$ визначає гомоморфізм вигляду*

$$(0, \ldots, 0, w_k, 0, \ldots).$$

1. Zagorodnyuk A. Spectra of Algebra of Entire Functions on Banach Spaces // Proceedings Of The American Mathematical Society. – 2006. – **134**. – C. 2559–2569.
2. Тарас О.Г. Узагальнення продовження Аренса на спектр аналітичних функцій на банаховій алгебрі // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2010. – **8**. – С. 78–83.

Роман Заторський

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
romazz@rambler.ru

ПЕРІОДИЧНІ РЕКУРЕНТНІ ДРОБИ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ

Розглядається клас періодичних рекурентних дробів [1], які служують зображенням алгебраїчних ірраціональностей вищих порядків. Доводиться теорема, що є n-вимірним узагальненням теореми Лагранжа про періодичні ланцюгові дроби.

1. Боднар Д.І., Заторський Р.А. Узагальнення ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, №1. – С. 21–24.

Олександр Зернов, Юлія Кузіна

Південноукраїнський національний педогогічний університет
імені К.Д. Ушинського
Одеський інститут фінансів Українського державного
університету економіки і фінансів
yuliak@te.net.ua

ПРО ІСНУВАННЯ ТА АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

В доповіді йтиметься про результати якісного аналізу задачі Коші

$$\sum_{1\le i,j,k\le n} a_{ijk}t^i(x(t))^j(x'(t))^k + f(t,x(t),x'(t)) = 0, \tag{1}$$

$$x(0)=0, \tag{2}$$

де i,j,k – цілі невід'ємні числа , a_{ijk} – сталі, $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ – невідома функція, $f:D\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, яка в деякому сенсі є малою, $D\subset(0,\tau)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Розв'язком задачі (1), (2) називаємо неперервно диференційовну функцію $x:(0,\sigma]\to\mathbb{R}$ $(0<\sigma<\tau)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1) при всіх $t\in(0,\sigma]$ і $x(t)\to 0$ при $t\to+0$.

Для достатньо малих σ знайдено достатні умови існування непорожньої множини розв'язків $x:(0,\sigma]\to\mathbb{R}$ таких , що

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m} c_n t^k + o(t^m), \qquad t\to+0,$$

де $c_1,\dots,c_n$ – відомі сталі, $m\le n$. Встановлено також умови єдиності розв'язків такого вигляду для задачі Коші (1), (2).

Дмитро Зікрач, Олег Скасків

Українська академія друкарства
Львівський національний університет імені Івана Франка
zikrach.dm@gmail.com, matstud@franko.lviv.ua

ПРО ОДНУ ОЦІНКУ ЗВЕРХУ ІНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА–СТІЛЬТ'ЄСА

Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_p), y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, тоді вживатимемо такі позначення

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i,\ |x| = \Big(\sum_{i=1}^p x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}},\ \|x\| = \sum_{i=1}^{p} |x_i|,\ \mathbb{R}_+ = (0, +\infty).$$

Нехай ν — зліченно-адитивна на $\mathbb{R}_+^p$ міра з необмеженим носієм $\operatorname{supp}\nu$, $f(x)$ — довільна невід'ємна вимірна функція на $\mathbb{R}_+^p$, $\nu_0(0,t] = \nu\{x \in \mathbb{R}^p\colon \|x\| < t\}$, $t > 0$. Через $\nu(E)$ позначимо ν-міру ν-вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^p$, тобто $\nu(E) = \int_E d\nu(x)$, а через $\mathcal{I}^p(\nu)$ – клас функцій $F\colon \mathbb{R}^p \to [0, +\infty)$, зображуваних для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралом

$$F(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{\langle \sigma, x\rangle} d\nu(x).$$

Для $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$ означимо $\mu_*(\sigma) = \sup\{f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle}\colon x \in \operatorname{supp}\nu\}$.

Теорема. *Нехай $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$. Якщо виконується умова*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\nu_0(0,t]}{t} < +\infty,$$

то співвідношення $F(s) \le o(\mu_*(\sigma) \ln \mu_*(\sigma))$ виконується при $|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K\backslash E$ для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}_+^p$ з вершиною в початку координат O такого, що $\overline{K}\backslash\{O\} \subset \mathbb{R}_+^p$, де множина E така, що виконується

$$\tau_p(E) := \int\limits_{E\cap\mathbb{R}_+^p} \frac{d\sigma_1 \dots d\sigma_p}{|\sigma|^{p-1}} < +\infty.$$

Гіпотеза. Якщо $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\nu_0(0,t]}{t} = +\infty$, то існують функція $F \in \mathcal{I}^p(\nu)$, вимірна множина $E \subset \mathbb{R}_+^p$, стала $d > 0$ такі, що $\tau_p(E) = +\infty$ і

$$(\forall \sigma \in E)\colon F(s) \ge d\mu_*(\sigma) \ln \mu_*(\sigma).$$

Ольга Золота, Ігор Чижиков

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
Львівський національний університет імені Івана Франка
o.zolota@gmail.com, ichyzh@lviv.farlep.net

НЕДОТИЧНЕ ЗРОСТАННЯ ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА-СТІЛЬТЬЄСА В ПОЛІКРУЗІ

Для $z \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ нехай $|z| = \max\{|z_j| : 1 \le j \le n\}$ — полікругова норма, $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ — полікруг, $T^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1, 1 \le j \le n\}$ — кістяк. Позначимо $\mathcal{P}(z,w) = \prod_{j=1}^{n} P_0(z_j, w_j)$ — кратне ядро Пуассона, де $z \in U^n, z_j = r_j e^{i\varphi_j}, w_j = e^{i\theta_j}, 1 \le j \le n$, $P_0(z_j, w_j) = \mathrm{Re}\,\frac{w_j+z_j}{w_j-z_j}$ — ядро Пуассона для одиничного круга. Функція $P : U^n \to \mathbb{R}$, визначена рівністю $P[d\mu](z) = \int_{T^n} \mathcal{P}(z,w)d\mu(w)$, називається інтегралом Пуассона-Стільтьєса борелевого заряду, $|\mu|(T^n) < +\infty$, де $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Будемо казати, що $\mu \in H^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}$, $\beta_j > 0$, $1 \le j \le n$, $\frac{1}{\beta_*} = \frac{1}{\beta_1} + \ldots + \frac{1}{\beta_n}$, якщо $(0 < \delta < 1)$

$$\sup|\mu|\left(\left\{(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}) \in T^n : |\theta_j - \varphi_j| \le \delta^{\frac{1}{\beta_j}}, 1 \le j \le n\right\}\right) \le C\delta.$$

Нехай $-\pi \le \theta_j \le \pi$, $0 \le \gamma_j \le \pi$, $1 \le j \le n$. Кутом Штольца в полікрузі U^n будемо називати декартів добуток $\mathcal{S}(\theta,\gamma) = S(\theta_1,\gamma_1) \times \ldots \times S(\theta_n,\gamma_n)$, де $S(\theta_j,\gamma_j)$ — кут Штольца в одиничному крузі U^j, який має вершину $e^{i\theta_j}$ і розхил γ_j, $1 \le j \le n$. Наступне твердження узагальнює результат з [1].

Твердження. *Нехай μ — скінченний борелевий заряд на $T^n, n \in \mathbb{N}$, $\beta_j > 0$, $1 \le j \le n$, $\frac{1}{\beta^*} = \frac{1}{\beta_1} + \ldots + \frac{1}{\beta_n} > 1$. Якщо $\mu \in H^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}$, то*

$$\left|\int_{T^n} \mathcal{P}(z,w)\,d\mu(w)\right| \le O\left(\left(\prod_{j=1}^{n} |z_j - e^{i\theta_j}|^{\frac{\beta_j}{n}}\right)^{1-\frac{1}{\beta^*}}\right),$$

$$z \in \mathcal{S}(\theta,\gamma), (1-|z_j|)^{\beta_j} \asymp (1-|z_k|)^{\beta_k}, 1 \le j,k \le n.$$

1. Chyzhykov I. E., Zolota O. A. Sharp estimates of the growth of the Poisson-Stieltjes integral in the polydisc // Mat. Stud. – 2010. – **34**, № 2. – P. 193–196.

Євген Іваник, Ярослав Коляно, Оксана Сікора

Львівський національний аграрний університет
Українська академія друкарства
informatyka@drohobych.net

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ПРО ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БЕЗМЕЖНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ПРЯМОКУТНИМ ВИРІЗОМ

Тіла з розривними параметрами широко використовуються як конструкційні елементи в різних галузях сучасної техніки. У процесі постановки і розв'язування задачі термопружності, що є невід'ємною складовою задач технологічної термомеханіки, вивчення процесів зварювання, шліфування, наплавки, термічної різки, пайки, імпульсного зміцнення, шукані функції (температурне поле, компоненти тензора напружень і вектора пружних переміщень) для тіл з вирізами, отворами, пазами скінчених розмірів можуть бути продовженими на область, що включає вказану технологічну особливість, на безмежну область по одному виміру відповідно. Це дозволяє для розглянутих тіл записати інтегро-диференціальні або диференціальні рівняння теплопровідності і термопружності з розривними і сингулярними коефіцієнтами. У роботі розглянуто підхід до визначення температурного поля в безмежній пластинці з прямокутним вирізом. Цей підхід базується на використанні узагальненої функції, для визначення якої отримано диференціальне рівняння, у правій частині якого містяться імпульсні функції типу дельта-функції та її похідних. Розв'язок цього рівняння подано в інтегральному вигляді, яке містить дві функції, що є значеннями шуканої температури на краях вирізу. Невідомі функції визначаються з інтегральних рівнянь типу Вольтерра по часовій змінній і типу Фредгольма за координатами, їх розв'язок знаходиться методом послідовних наближень, обґрунтування якого сформульовано у вигляді теореми.

Катерина Іванків

Львівський національний університет імені Івана Франка
kpm@franko.lviv.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МОДЕЛЯХ „РЕАКЦІЯ (РІСТ) – КОНВЕКЦІЯ (ТАКСИС) – ДИФУЗІЯ“

Моделі просторової динаміки популяцій з таксисом описуються рівняннями „реакція (ріст) – дифузія – конвекція (таксис) – кросдифузія“.

У роботі розглядаються два типи моделей з таксисом: скалярне рівняння (1) і система двох рівнянь (2).

Модель першого типу описує динаміку щільності популяції $P(r,t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = F(P) + \frac{\partial}{\partial r}\left[H(P) + D\,\frac{\partial P}{\partial r}\right], \tag{1}$$

де t – час, r – координата одновимірного простору; функція $F(P)$ задає локальну кінетику популяції, функція $H(P)$ називається інтенсивністю таксису; D – коефіцієнт дифузії, який вважаємо постійним.

Модель другого типу пояснює виникнення таксису

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= F(P) + \frac{\partial}{\partial r}\left[D(P,S)\,\frac{\partial P}{\partial r} - \Phi(P,S)\,\frac{\partial S}{\partial r}\right], \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= T(P,S) + \left[\mu(P,S)\,\frac{\partial S}{\partial r}\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $S(r,t)$ – концентрація атрактанта, $\Phi(P,S)$ – коефіцієнт кросдифузії, функція $T(P,S)$ – описує кінетику атрактанта, $\mu(P,S)$ – коефіцієнт дифузії атрактанту.

При моделюванні динаміки щільності біологічних спільнот на безмежному фізичному просторі задаємо лише функції $P(r,0)$, $S(r,0)$ в області $-\infty < r < +\infty$.

Поставлені задачі розв'язані методом нелінійної корекції потоків. Ця різницева схема стійка у випадку виконання умови Куранта $C = |(\omega\Delta t)/\Delta r| \leq 1$ й умови $R = 2D\Delta t/\Delta r^2 < 1$, де Δt, Δr – кроки сітки по часовій і просторовій координатах відповідно, а $\omega = \mathrm{const}$ – швидкість руху середовища.

Микола Іванчов, Тетяна Савіцька

Львівський національний університет імені Івана Франка
ivanchov@franko.lviv.ua

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ, ЯКА ВИРОДЖУЄТЬСЯ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

В області $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < t^\beta h(t),\ 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для параболічного рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(t^\beta h(t),t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T], \tag{2}$$

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{t^\beta h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

де $\beta > 0$ – задане число, $(h(t),\ a(t),\ u(x,t))$, $a(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$ – невідомі.

Заміною $y = \dfrac{x}{h(t)}$, $\sigma = t^\beta$ задачу (1)-(4) зводимо до оберненої задачі для параболічного рівняння

$$v_\sigma = \frac{\sigma^{(1-\beta)/\beta}\ a(\sigma)}{\beta h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{\beta y h'(\sigma) + \sigma^{(1-\beta)/\beta}\ b(yh(\sigma),\sigma)}{\beta h(\sigma)} v_y + \\ + \frac{\sigma^{(1-\beta)/\beta}}{\beta}\big(c(yh(\sigma),\sigma)v + f(yh(\sigma),\sigma)\big), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{5}$$

яке при умові $\beta > 1/2$ слабко вироджується.

Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі (1)-(4). Доведення існування розв'язку використовує теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, а доведення єдиності – властивості інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегровними ядрами.

Степан Івасишен

Національний технічний університет України „КПІ“
ivasyshen_sd@mail.ru

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Вважатимемо, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається зі змінних $x_l := (x_{l1}, ..., x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Розглядаються рівняння, які є узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова [1] і мають такий вигляд:

$$[\partial_t - (x, B\, D_x) - A(t, x, \partial_{x_1})]\, u(t, x) = f(t, x),$$

$$(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

де B – квадратна матриця порядку n з елементами з $\mathbb{R}$, $D_x := \mathrm{col}(\partial_{x_{11}}, ..., \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, ..., \partial_{x_{2n_2}}, \partial_{x_{31}}, ..., \partial_{x_{3n_3}})$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, диференціальний вираз $\partial_t - A(t, x, \partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним у тому чи іншому сенсі за змінними t і x.

У доповіді робиться короткий огляд результатів, що стосуються побудови та вивчення властивостей фундаментальних розв'язків задачі Коші для рівняння (1), а також їх різноманітних застосувань.

1. Kolmogoroff A.N. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – S. 116–117.

Роман Івасько, Михайло Солодяк, Аніда Станік-Беслєр

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Політехніка Опольська, Польща
dept13@iapmm.lviv.ua, a.stanik-besler@po.opole.pl

ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ФЕРИТОВИХ ТІЛ ЗА ДІЇ КВАЗІУСТАЛЕНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

Вихідні співвідношення для кількісного опису параметрів теплових, механічних і електромагнітних процесів у феритових тілах за дії квазіусталеного електромагнітного поля (ЕМП) формулюємо за два етапи. На першому етапі, на основі рівнянь Максвелла для нерухомих електропровідних намагнічуваних і поляризовних середовищ і статистичної моделі електромеханічної взаємодії поля і середовища, записуємо вирази для тепловиділень і пондеромоторних сил через електромагнітні параметри. На другому етапі, використовуючи співвідношення квазістатичної або динамічної задачі термопружності (в яких джерелами тепла та об'ємними силами є тепловиділення і пондеромоторні сили), формулюємо систему рівнянь для визначення температури та параметрів механічних процесів за заданих початкових і граничних умов.

В окремих частотних діапазонах ЕМП ферити одночасно намагнічуються і поляризуються. Тому задач першого етапу вже не можна сформулювати в класичній постановці відносно напруженостей електричного чи магнітного полів. Тут виникає ряд нерозв'язаних проблем математичного характеру відносно знаходження розв'язку таких диференціальних рівнянь.

Розглянуто частковий випадок – дію на феритове тіло помірних зовнішніх квазіусталених ЕМП високої несучої частоти, коли можна лінеаризувати задачу і ввести комплексні подання векторів поля на основі відомих комплексних електромагнітних характеристик матеріалу. Як приклад, досліджено параметри фізико-механічних полів для шару з нестрикційного полікристалічного ізотропного феритового матеріалу 1000НН за такої електромагнітної дії.

Володимир Ільків

Національний університет „Львівська політехніка“
ilkivv@i.ua

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗСУВАМИ АРГУМЕНТІВ

Нехай $\mathcal{D}^p = [0,T]\times\Omega^p_{2\pi}$, причому $t \in [0,T]$, тор $\Omega^p_{2\pi}$ має розмірність $p \geq 2$ і $x = (x_1,\ldots,x_p) \in \Omega^p_{2\pi}$.

Простір $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ є поповненням множини тригонометричних многочленів $\sum_k \varphi_k e^{i(k,x)}$ за нормою $\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\| = \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q}\|\varphi_k\|^2\big)^{1/2}$, а простір $\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)$ — множини $\big\{\sum_{k,r} u_{k,r}e^{\tau(r)t+i(k,x)}\big\}$ скінченних сум за нормою $\|u;\mathbf{W}^q(\mathcal{D}^p)\| = \big(\sum_{(k,r)\in\mathbb{Z}^{p+1}}(\tilde{k}^{2l}+r^2)^q\|u_{k,r}\|^2\big)^{1/2}$, де $q \in \mathbb{R}$, $\tau(r) = (i2\pi r - \ln\mu)/T$, $\varphi_k \in \mathbb{C}^m$, $u_{k,r} \in \mathbb{C}^m$, $\tilde{k}^2 = 1 + k_1^2 + \ldots + k_p^2$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма у просторі $\mathbb{R}^m$.

Розглядаємо нелокальну задачу для системи лінійних рівнянь з частинними похідними зі зсунутими аргументами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1(D)u_{\xi_1} + \cdots + A_Q(D)u_{\xi_Q} + f, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} - \mu u|_{t=T} = \varphi, \tag{2}$$

де u_ξ позначає невідому функцію $u = u(t,x)$ зі зсувом $\xi \in \Omega^p_{2\pi}$ аргумента x, $A_1(D),\ldots,A_Q(D)$ — многочлени степеня l від змінної $D = (-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$ зі сталими комплексними коефіцієнтами, що належать деякій обмеженій області.

Встановлено розв'язність задачі (1), (2) у шкалі просторів $\{W^q(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ за умови належності функції f до шкали $\{W^q(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, а функції φ – до шкали $\{H_q(\Omega^p_{2\pi})\}_{q\in\mathbb{R}}$.

Досліджено проблеми малих знаменників [1], які виникають при побудові розв'язку задачі у вигляді ряду.

Робота підтримана ДФФД України (проект №41.1/004).

1. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

Володимир Ільків, Наталія Силюга, Ірина Волянська

Національний університет „Львівська політехніка“
Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ $z\,\partial/\partial z$

В області $\mathcal{D} = [0,T] \times S$ розглянуто двоточкову нелокальну задачу

$$\sum\nolimits_{|\hat{s}|\le n} a_{\hat{s}} B^{s_1} \partial^{s_0} u/\partial t^{s_0} = 0, \tag{1}$$

$$\mu\, \partial^m u/\partial t^m\big|_{t=0} - \partial^m u/\partial t^m\big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де $S \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\hat{s} = (s_0, s_1)$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1$, $a_{\hat{s}}, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$, $Bu = z\,\partial u/\partial z$, z – комплексна просторова змінна.

Нехай $\mathbf{H}_q(S)$ ($q \in \mathbb{R}$) – простір функцій $\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k z^k$, який отриманий поповненням множини скінченних сум вигляду $\sum_k \varphi_k z^k$ за нормою $\|\varphi\|_q = \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi_k|^2 (1+k^2)^q\big)^{1/2}$; $\mathbf{H}_q^n(D)$ ($q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}_+$) – банаховий простір функцій $u(t,z)$ таких, що похідні $\partial^r u(t,z)/\partial t^r$, $r = 0, 1, \ldots, n$, для кожного $t \in [0,T]$ належать просторам $\mathbf{H}_{q-r}(S)$ і неперервні за t у просторі $\mathbf{H}_{q-r}(S)$. Норма в просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою $\|u(t,z)\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})} = \sum\limits_{r=0}^{n} \max\limits_{[0,T]} \left\| \dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{H}_{q-r}(S)}$.

Ця задача раніше розглядалася у шкалах просторів 2π-періодичних за змінною $x = (x_1, \ldots, x_p)$ функцій $u(t,x)$ у випадку операторів диференціювання $\partial/\partial x_j$ за дійсними змінними. Було показано, що вона є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від оцінки малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків у згаданих просторах. У даній роботі задача (1), (2) вивчається у комплексній області змінної $z \in S$ і розв'язок шукається у відповідних просторах $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. Встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, доведено теорему існування та єдиності її розв'язку для функцій φ_m із шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(S)\}_{q\in\mathbb{R}}$.

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

Петро Каленюк, Ігор Когут, Зіновій Нитребич

Національний університет „Львівська політехніка“
Жешувський університет, Польща
kalenyuk@polynet.lviv.ua

ЗАДАЧА З ОДНОРІДНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Задачі з локальними та нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними є умовно коректними. Розв'язність таких задач пов'язана з існуванням їх нетривіальних ядер, що зумовлює наявність у зображенні розв'язків знаменників, які можуть перетворюватися в нуль.

В області змінних $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^s$ вивчається задача

$$\left[E_n \partial_t^2 - A\left(\partial_x\right) \partial_t - B\left(\partial_x\right)\right] U(t,x) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$U(0,x) = \mathbf{0}, \qquad U(h,x) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

де $A\left(\partial_x\right)$, $B\left(\partial_x\right)$ – оператор-матриці розміру $n \times n$ $(n \in \mathbb{N})$, елементами яких є диференціальні вирази $a_{ij}\left(\partial_x\right)$, $b_{ij}\left(\partial_x\right)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, зі сталими комплексними коефіцієнтами та цілими аналітичними символами $a_{ij}(\nu)$, $b_{ij}(\nu)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$; $\nu \in \mathbb{R}^s$, $s \in \mathbb{N}$, $U(t,x) = col\left(U_1(t,x), U_2(t,x), \ldots, U_n(t,x)\right)$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $\mathbf{0} = col(0,0,\ldots,0)$.

Для задачі (1), (2):

— встановлено умови існування лише нульового розв'язку;

— з'ясовано умови існування нетривіального розв'язку задачі;

— за допомогою диференціально-символьного методу [1] вказано конструктивний спосіб побудови нетривіальних розв'язків задачі для випадку їх існування у класі квазіполіномів. Ці розв'язки зображено як результати дій диференціальних виразів, символами яких є квазіполіноми спеціального вигляду, на розв'язки класично відокремленого вигляду системи (1).

1. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка”, 2002. – 292 с.

Марина Калугина, Денис Коледа

Минский государственный высший радиотехнический колледж
marina_kalugina@list.ru

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК ВБЛИЗИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Задачи о распределении рациональных точек в областях евклидова пространства явились естественным развитием классических задач о числе целых точек в расширяющихся областях. При этом нет необходимости в требовании расширения размеров области. Достаточно указывать верхние границы для знаменателей рациональных чисел.

Пусть $I = (a, b)$ – некоторый интервал и $f(x)$ – функция действительного аргумента, где $x \in I$. Для достаточно большого положительного Q и $0 < \mu < 1$ обозначим через $A_f(Q, I)$ число рациональных точек $\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}\right)$ с $1 \leq q \leq Q$, принадлежащих криволинейному четырехугольнику

$$\Pi = \left\{(x, y) : x \in I, |f(x) - y| < Q^{-\mu-1}\right\}.$$

При произвольном положительном значении ε М. Хаксли [1] получена оценка сверху $A_f(Q, I) < Q^{2-\mu+\epsilon}$ для числа рациональных точек вблизи гладкой кривой $y = f(x)$ при ненулевой ограниченной ее кривизне. Оценка снизу для этой величины, полученная В. И. Берни-ком и усиленная В. Бересневичем в [2], вместе с результатами по улучшению верхней оценки [3] выглядит следующим образом:

$$c_1 Q^{2-\mu} < A_f(Q, I) < c_2 Q^{2-\mu}.$$

Здесь c_1, c_2 – некоторые положительные константы.

Доказано, что нижняя оценка последнего неравенства может быть получена без оганичения на кривизну гладкой функции $y = f(x)$.

1. Huxley M. Area, lattice points and exponential sums. – Oxford, 1996.
2. Бересневич В. // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – **47**. – С. 41–43.
3. Beresnevich V., Dickinson D., Velani S. // Ann. of Math. – 2007. – **166**. – N 2. – P. 367–426.

Оксана Карабин, Ольга Меньшикова

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Oksana_Karabyn@mail.ru

ДО ПИТАННЯ БАЗИ БАРІ

За термінологією М.Крейна, база $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ в гільбертовому просторі H, квадратично близька до деякої його ортонормованої бази $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, називається базою Барі.

Розглянемо бази Барі з точки зору нестандартного аналізу.

Означення 1. Послідовність векторів (φ_i) в H називається ω - лінійно незалежною, якщо рівність $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i = 0$ можлива лише коли всі c_i одночасно рівні нулю.

Нехай $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ – ω - лінійно незалежна послідовність в H, квадратично близька до його ортонормованої бази $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ і нехай $(\widetilde{\varphi}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ – деяка послідовність векторів.

Означення 2. Послідовності (φ_i) і $(\widetilde{\varphi}_i)$ в H назвемо квадратично скінченно близькими (квадратично нескінченно близькими), якщо $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} ||\varphi_i - \widetilde{\varphi}_i||^2 \ll \infty$ $(\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} ||\varphi_i - \widetilde{\varphi}_i||^2 \approx 0)$.

Позначимо $D(\varphi_1, ..., \varphi_n) = det((\varphi_i|\varphi_j))_{i,j\le n}$ і $V_n = (D(\varphi_1, ..., \varphi_n))^{\frac{1}{2}}$. V_n можна трактувати як об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $(\varphi_i)_{i\le n}$.

Наступна теорема є доповненням результату М. Крейна.

Теорема. *Нехай (φ_i) – ω - лінійно незалежна послідовність одиничних векторів в стандартному гільбертовому просторі H, квадратично нескінченно близька до деякої його ортонормованої бази (e_i). Тоді*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad V_n \approx 1. \tag{1}$$

І навпаки, нехай $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ – повна ω - лінійно незалежна послідовність векторів в H, для якої має місце (1). Тоді (φ_i) є базою в H, квадратично нескінченно близькою до деякої його ортонормованої бази.

1. Бари Н.К. О полных системах ортогональных функций // Матем. сборник. – 1944. – **14**, №1-2. – С. 51-108.
2. Lyantse V. Nearstandardness on a finite set. – Warsaw: Instytut Mathematyczny PAN, 1997. – 63 p.

Роман Качурівський

Інститут математики НАН України
kachurivsky@gmail.com

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Для системи рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t+1) = A\dot{x}(t) + Bx(qt) + C\dot{x}(qt), \tag{1}$$

де $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, B, C — дійсні сталі $(n \times n)$-матриці, q — деяка стала $(q \neq \pm 1)$, доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови*

1) $q > 1$, $\lambda_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) $\lambda_*^q > \lambda^*$, $2\beta \dfrac{l}{\lambda_*^q - \lambda^*} \leq \Delta < 1$, *де*

$$\lambda_* = \min_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\}, \quad \lambda^* = \max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\},$$

$$\beta = \max\left\{1; \frac{1}{|\ln \lambda_*|}\right\}, \quad l = \max\left\{|B|; |C|\right\},$$

$$|B| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|, \quad |C| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|.$$

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервно-диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ *розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t, \omega(t)),$$

де $x_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, \ldots,$ — *деякі неперервно-диференційовні вектор-функції, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

Володимир Кирилич, Андрій Філімонов

Львівський національний університет імені Івана Франка
Московський державний університет шляхів сполучення
vkyrykych@ukr.net, amfilimonov@yandex.ru

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглядаємо видозмінений варіант багатоточкової задачі Ніколетті, у якому точки x_j "рухаються"з часом вздовж деяких невідомих ліній $x_j = s_j(t)$. Причому ці лінії також потрібно визначати разом з розв'язком системи.

Отже, в прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t)|0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T_0\}$, $\ell > 0$, $T_0 > 0$ – деякі сталі, розглядаємо систему

$$\sum_{k=1}^{m} g_k^i(x,t,u,v)\Big(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_k}{\partial x}\Big) = f_i(x,t,u,v), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v),\ j \in \{1,\dots,n_v\}, i \in \{1,\dots,m\}, \qquad (2)$$

$$\frac{ds_j}{dt}(t) = r_j(s(t),t,u(s_j(t),t),v(s_j(t),t)),\ j \in \{1,\dots,n\}, \qquad (3)$$

де $u = (u_1,\dots,u_m),\ v = (v_1,\dots,v_n),\ s = (s_1,\dots,s_n)$.

Початкові та крайові умови для системи (1)–(3) мають вигляд

$$u(x,0) = \alpha(x),\ 0 \le x \le \ell,\ s_j(0) = c_j,\ j \in \{1,\dots,n\},\ 0 \le c_j \le \ell, \qquad (4)$$

$$u_i(0,t) = \gamma_i^0(t,u(0,t),v(0,t)),\ i \in I_+^0 = \{i|\ \mathrm{sgn}(\lambda_i(0,0,0,0)) = 1\},$$

$$u_i(\ell,t) = \gamma_i^\ell(t,u(\ell,t),v(\ell,t)),\ i \in I_-^\ell = \{i|\ \mathrm{sgn}(\lambda_i(\ell,0,0,0)) = -1\}, \qquad (5)$$

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t),\ j \in \{1,\dots,n\}. \qquad (6)$$

Для задачі (1)–(6) встановлено локальну коректну узагальнену розв'язність без переходу до продовженої системи, який, зазвичай, використовують для гіперболічних систем загального вигляду.

Такі задачі є деяким аналогом багатоточкових задач Ніколетті та виникають в багатьох прикладних проблемах.

Іван Кирчей

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
kyrchei@lms.lviv.ua

ЯВНА ФОРМУЛА ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКОГО МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ НАД ТІЛОМ КВАТЕРНІОНІВ

Позначимо через $\mathbb{H}^{m\times n}$ множину всіх $m\times n$ матриць над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$, а через $\mathbb{H}_r^{m\times n}$ її підмножину матриць рангу r.

Розглянемо матричне рівняння

$$\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{B}, \tag{1}$$

де $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n},\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{m\times s}$ - задані матриці, $\mathbf{X}\in\mathbb{H}^{n\times s}$ - невідома матриця. Позначимо $\mathbf{A}^*\mathbf{B}=:\hat{\mathbf{B}}=(\hat{b}_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times s}$. Використовуючи визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура-Пенроуза над тілом кватерніонів [1], в наступній теоремі одержано явну формулу для нормального розв'язку рівняння (1). Якщо $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}\in\mathbb{H}_n^{n\times n}$, тоді розв'язок рівняння (1) також володіє визначниковим зображенням в рамках теорії стовпцево-рядкових визначників [2].

Теорема 1. *Якщо* $\operatorname{rank}\mathbf{A}=r\leq m<n$, *тоді для нормального розв'язку (з мінімальною Евклідовою нормою)* $\mathbf{X}_{LS}=(x_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times s}$ *рівняння (1) маємо*

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{j\}}\operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{b}}_{.j}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}}\left|\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{\beta}^{\beta}\right|}, \tag{2}$$

де $\hat{\mathbf{b}}_{.j}$ *є* j*-м стовпцем матриці* $\hat{\mathbf{B}}$ *для всіх* $j=1,...,s$, $i=1,...,n$.

1. Kyrchei I. I. Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules // Linear Multilinear Algebra. – Doi: 10.1080/03081081003586860 (Published on: 22 February 2011).
2. Kyrchei I. I. Cramer's rule for some quaternion matrix equations // Appl. Math. Comput. – 2010. – **217**. – P. 2024-2030.

Ольга Кійковська, Ярослав Чабанюк, Ігор Будз

Національний університет „Львівська політехніка“
yaroslav_chab@yahoo.com

ГРАНИЧНИЙ ГЕНЕРАТОР ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

Неперервна випадкова еволюція [1] задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon))dt + \sigma(u^\varepsilon(t))dw(t), \tag{1}$$

де $C(u,x)$, $u \in \mathbf{R}^d$, – функція регресії, що залежить від рівномірно ергодичного марковського процесу $x(t), t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі станів $(X, \mathbf{X})$, w – вінерівський процес, ε – малий параметр серій [2]. Для генератора Q марковського процесу $x(t), t \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in X$, визначений потенціал R_0 [1].

Лема. *Генератор $\boldsymbol{L}^\varepsilon$ двокомпонентного марковського процесу $u^\varepsilon(t)$, $x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon), t \geq 0$, на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x)$, $\varphi(u) \in C^3(\boldsymbol{R}^d)$, має асимтотичне зображення*

$$\boldsymbol{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = \boldsymbol{L}\varphi(u) + \varepsilon\theta\varphi(u),$$

де $\boldsymbol{L}$ – граничний генератор випадкової еволюції (1) такий, що $\boldsymbol{L}\varphi(u) = [\boldsymbol{C} + \boldsymbol{S}]\varphi(u)$, $\boldsymbol{C}\varphi(u) = C(u)\varphi'(u)$, $C(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x)$, $\boldsymbol{S}\varphi(u) = 1/2\sigma^2(u)\varphi''(u)$, $\varphi_1(u,x) = R_0\tilde{\boldsymbol{L}}\varphi(u)$, $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} - [\boldsymbol{C}(x) + \boldsymbol{S}]$, $\boldsymbol{C}(x)\varphi(u) = C(u,x)\varphi'(u)$, а залишковий член $\theta\varphi(u)$ – обмежений.

1. Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. – World Scientific Publishing. – 2005. – 330 p.
2. Чабанюк Я.М. Процедура стохастичної апроксимації в ергодичному середовищі Маркова // Математичні студії. – 2004. – **21**, №1. – С. 81–86.

Григорій Кіт, Віталій Галазюк

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львівський національний університет імені Івана Франка
hkit@iapmm.lviv.ua

ВПЛИВ ТЕПЛОІЗОЛЬОВАНОГО ДИСКОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА РОЗПОДІЛ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Розглядається осесиметрична задача стаціонарної теплопровідності в R^3 з тонким дисковим теплоізольованим включенням радіуса R. Простір R^3 віднесемо до циліндричної системи координат $R\alpha, \beta, R\gamma$ і температурне поле подаємо у вигляді суми

$$t(\alpha, \gamma) = t_0(\alpha, \gamma) + T(\alpha, \gamma), \tag{1}$$

де $t_0(\alpha, \gamma)$ – температурне поле у тілі без включення, а $T(\alpha, \gamma)$ – збурене включенням температурне поле, яке визначаємо розв'язком рівняння стаціонарної теплопровідності

$$\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial_\gamma^2 T = 2\delta'(\gamma) T_0 \int_0^\infty \eta H(\eta, p) J_0(\eta\alpha) d\eta \tag{2}$$

з пеленою теплових диполів, де $H(\eta, p)$ – твірна функція, яка задає закон розподілу диполів, $J_0(\eta\alpha)$ – функція Бесселя першого роду, $p > 0$ – параметр. Розв'язок рівняння (2) з правою частиною

$$T(\alpha, \gamma) = -T_0 sign\gamma \int_0^\infty \eta H(\eta, p) e^{-\eta|\gamma|} J_0(\eta\alpha) d\eta \tag{3}$$

має стрибок при переході площини $\gamma = 0$ по нормалі до неї і обумовлює у цій площині стрибок радіальної складової вектора теплового потоку $q_\alpha(\alpha, \pm 0)$. Оскільки диск теплоізольований, то за поданням (1) в області $0 \le \alpha \le 1$ площини $\gamma = 0$ $\partial_\gamma t = 0$ і для визначення твірної функції $H(\eta, p)$ одержимо інтегральне рівняння першого роду

$$\int_0^\infty \eta^2 H(\eta, p) J_0(\eta\alpha) d\eta = -\partial_\gamma t_0(\alpha, 0), \ 0 \le \alpha \le 1, \tag{4}$$

розв'язок якого подаємо узагальненим рядом Неймана

$$\eta^2 H(\eta, p) = \sum_{n=0}^\infty a_n \eta^{-p} J_{2n-p+1}(\eta)$$

з коефіцієнтами a_n. Параметр $p > 0$ визначаємо з умови неперервності диполів на лінії $\alpha = 1$ і умови їх замикання на нескінченності.

Irina Kmit

Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics
kmit@informatik.hu-berlin.de

SMOOTHING EFFECT FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FIRST-ORDER HYPERBOLIC SYSTEMS

We consider initial-boundary problems for general linear first-order strictly hyperbolic systems with local or nonlocal nonlinear boundary conditions. While boundary data are supposed to be smooth, initial conditions can contain distributions of any order of singularity. It is known that such problems have a unique continuous solution if the initial data are continuous and a delta wave solution if the initial data are strongly singular. In both cases, we say that a solution is smoothing if it eventually becomes k-times continuously differentiable for each k. Our main result is a criterion allowing us to determine whether or not the solution is smoothing [1]. In particular, we prove a rather general smoothingness result in the case of classical boundary conditions and periodic boundary conditions.

1. Irina Kmit, Smoothing Solutions to Initial-Boundary Problems for First-Order Hyperbolic Systems // Applicable Analysis. – 2011. – 27 pages (in print). Available at http://arxiv.org/abs/0908.2189v4.

Ольга Ковальчук, Микола Недашковський

Тернопільський національний економічний університет
olhakov@gmail.com, m_nedashkovsky@yahoo.com

АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З λ-МАТРИЦЯМИ

Розглядаються обчислювальні алгоритми для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A(\lambda)\, X(\lambda) = b(\lambda), \tag{1}$$

де $A(\lambda)$ – регулярна матриця порядку $n \times n$, елементи якої – степеневі ряди з комлексними членами $a_{p,q}(\lambda) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{p,q}^{(k)} e^{ik\lambda}$ $(p = 1, 2, ..., n;$ $q = 1, 2, ..., n+1)$, а b – вектор $\left(a_{1,n+1}(\lambda), a_{2,n+1}(\lambda), ..., a_{n,n+1}(\lambda)\right)^T$.

Розв'язок шукається у вигляді відношення рядів

$$x(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ij\lambda} X_j \Big/ \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ij\lambda} y_j,$$

де X_i $(i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ – вектори розмірності n, а y_i $(i = 0, \pm 1, ...)$ – скалярні величини. Одержано ефективні комп'ютерні алгоритми зі складністю $\mathrm{O}(3/2 n^3 m \log_2 m)$ для розв'язування «підхідних» систем рівнянь породжених згортками m-го порядку .

За подібною схемою розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з m-вимірними λ-матрицями

$$A(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)\, X(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = b(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m), \tag{2}$$

де $A(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, $b(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ – поліноміальні матриці порядку l від багатьох змінних зводиться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь спеціального вигляду з числовими блочними елементами. Одержана оцінка обчислювальної складності алгоритму.

Рівняння (1) і (2) знайшли застосування у параметричному програмуванні, у балансних моделях В.Леонтьєва, в аеродинамічних і медичних моделях кісткових тканин [1].

1. Недашковський М. О., Ковальчук О.Я. Обчислення з λ-матрицями. – Київ: Наукова думка, 2007. – 294 с.

Тереза Козакевич, Стефан Шимура

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Державна Вища Професійна Школа в Нисі
dept13@iapmm.lviv.ua

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНОГО ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ ТОНКИХ СТАЛЕВИХ ПЛАСТИН ЗА ОХОЛОДЖЕННЯ

Запропоновано основану на статистичних моделях нерівноважного фазового складу при охолодженні методику числового дослідження фазового складу і структурних залишкових напружень в тонкостінних виробах з низьколегованих сталей за монотонних режимів охолодження.

Методика містить три етапи: встановлення часу перебування розглядуваної точки тіла в діапазоні температур поліморфних перетворень; визначення відсоткового вмісту фазових складових; обчислення значень наявних залишкових напружень. При цьому розв'язок крайової задачі теплопровідності (перший етап) та алгоритм визначення залишкових структурних напружень в тілі (третій етап) побудовані з використанням методу скінченних елементів у поєднанні з методом зважених залишків.

Як приклад, поставлено і розв'язано задачу про вплив теплонепроникного покриття на фазовий склад і напружений стан пластини при нагріві єдиним джерелом. Отримано, що вплив теплоізоляції на фазовий склад матеріалу значно менший, ніж вплив локально розподілених джерел.

Встановлено, що існує деяка оптимальна ширина зони ізоляції, при якій мінімізується максимальний вміст мартенситу у зоні термічного впливу. Обговорено математичні проблеми, які виникають при узагальнені методики за використання більш загальних моделей опису термонапруженого стану.

Руслана Колісник, Вадим Мироник, Іван Тупкало

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ruskol@mail.ru

ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ m-ТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

При математичному моделюванні задач, що виникають у теорії періодичних хвилеводів, біології, фізиці ядерних реакцій, фізиці плазми, демографічних дослідженнях, при вивченні коливань різних систем виникають нелокальні крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Дослідженням таких задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи (О.О. Дезін, В.К. Романко, В.М. Борок, Б.Й. Пташник, М.І. Матійчук та ін.).

У праці [1] встановлено коректну розв'язність багатоточкової (m-точкової, $m \geq 1$) за t задачі для еволюційного рівняння з оператором Бесселя $\varphi(B_\nu)$ нескінченного порядку в класі крайових функцій, які є елементами простору розподілів Л.Шварца $S'(\mathbb{R})$, де $\varphi(B_\nu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-B_\nu)^k$, $c_{2k} = const$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, $\nu > -1/2$, $B_\nu = -d^2/dx^2 + (2\nu + 1)x^{-1}d/dx$ – оператор Бесселя. Розв'язок $u(t,x)$ такої задачі є гладкою за змінною x функцією, а відповідну крайову умову він задовольняє в сенсі узагальнених функцій, тобто в слабкому розумінні збіжності. Природно виникає запитання: якщо гранична узагальнена функція збігається на деякій відкритій множині з гладкою функцією, то чи буде тоді відбуватися локальне посилення збіжності розв'язку (локальна рівномірна або поточкова збіжність розв'язку). Тут дається позитивна відповідь на поставлене питання: виділено певний клас $X' \subset S'(\mathbb{R})$ крайових функцій такий, що розв'язок m-точкової задачі з граничною функцією $f \in X'$ володіє властивістю локального посилення збіжності.

1. Городецький В.В., Тупкало І.С. Багатоточкова задача для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 528. Математика. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – С. 26–34.

Lubov Kolyasa, Anatoly Mokhon'ko

Lviv Polytechnic National University
lubovkolyasa@gmail.com

AN ANALOGUE OF LEMMA'S OF THE LOGARITHMIC DERIVATIVE FOR MEROMORPHIC FUNCTIONS WITH A LOGARITHMIC SINGULARITY IN ∞

For any single-valued branch $w(z), z \in g_{\alpha,\beta} = \{z : z = re^{i\theta}, r_0 \le r < +\infty, \alpha \le \theta \le \beta\}$ of a meromorphic function with a logarithmic singularity in ∞ $w(z), z \in G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$ we define

$$\rho_{\alpha,\beta} = \overline{\lim} \ln^+ S_{\alpha,\beta}(r, w) / \ln r, \quad r \to +\infty,$$

where $S_{\alpha,\beta}(r, w)$ is Nevanlinna's characteristics of the function $w(z), z \in g_{\alpha,\beta}$.

The value

$$\rho = \rho[w] = \sup \rho_{\alpha,\beta}, \quad \forall \alpha, \beta, \quad -\infty < \alpha < \beta < +\infty$$

is called the order of growth of the function $w(z), z \in G$.

Theorem. *If $w(z), z \in G$ is a meromorphic function with a logarithmic singularity in ∞, which has finite order ρ, then*
1) for any $\alpha, \beta, -\infty < \alpha < \beta < +\infty$ and for single-valued branch $w(z)$, $z \in g_{\alpha,\beta}$

$$B_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{w'}{w}\right) = o(1), \quad r \to +\infty;$$

2) there exists a set Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}$, which has linear measure zero, such that $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \backslash \Omega, -\infty < \alpha < \beta < +\infty$ and for branch $w(z)$, $z \in g_{\alpha,\beta}$

$$A_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{w'}{w}\right) = O(1), \quad r \to +\infty; \quad \Rightarrow$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \backslash \Omega$

$$A_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{w'}{w}\right) + B_{\alpha,\beta}\left(r, \frac{w'}{w}\right) = O(1), \quad r \to +\infty.$$

Леся Комарницька

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
komlesya@gmail.com

ПЕРІОДИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ГРАВІТАЦІЙНО-ГІРОСКОПІЧНИХ ХВИЛЬ

В області $D = [0,T] \times \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x, y \leq \pi\}$, розглядається задача

$$D_t^2 \Delta u + \omega^2 D_x^2 u + \alpha^2 D_y^2 u = f(t,x,y), \tag{1}$$

$$u\,|_{x=0,\ x=\pi} = u\,|_{y=0,\ y=\pi} = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{\beta=0}^{1} L_{\beta,r}\left(D_t^{\beta} u\,|_{t=0} - D_t^{\beta} u\,|_{t=T}\right) = \varphi_r(x,y), \quad r = 1,2, \tag{3}$$

де $\omega, \alpha, a_{\beta,r}^s \in R_+$, Δ – оператор Лапласа, $L_{\beta,r} = \sum_{|s|\leq 1} a_{\beta,r}^s \frac{\partial^{2|s|}}{\partial x^{2s_1}\partial y^{2s_2}}$, $s = (s_1, s_2)$, $|s| = s_1 + s_2$. Позначимо: $\chi = \|k\|^{-1}\sqrt{\omega^2 k_1^2 + \alpha^2 k_2^2}$, $k \in N^2$, $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, $A(k) = \sum_{|s|\leq 1}(-1)^{|s|} k_1^{2s_1} k_2^{2s_2}(a_{0,1}^s a_{1,2}^s - a_{0,2}^s a_{1,1}^s)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *в просторі* $C^{(2,2)}(D)$ *необхідно і досить, щоб виконувались умови* $\chi T \neq 2\pi n$, $n \in Z$, $A(k) \neq 0, k \in N^2$.

Теорема 2. *Нехай існують сталі* $M_1, M_2 \in R_+$ *і* $\gamma_1, \gamma_2 \in N$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in N^2$ *виконуються нерівності*

$$|1 - \cos\chi T| \geq M_1 \,|k|^{-\gamma_1 - \varepsilon}, |A(k)| \geq M_2 \,|k|^{-\gamma_2 - \varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1/4. \tag{4}$$

Якщо функція $f(t,x,y)$ *неперервна за* t, ν *разів* ($\nu \geq 2\gamma_1 + 7$) *неперервно диференційовна за* x, y *і задовольняє умови*

$$D_x^{2r} f\,|_{x=0,\ x=\pi} = D_y^{2r} f\,|_{y=0,\ y=\pi} = 0, \quad r = 0,1,...,[(\nu-1)/2],$$

а функції $\varphi_r(x,y)$, $r = 1,2$, ξ *разів* ($\xi \geq 2\gamma_1 + \gamma_2 + 7$) *неперервно диференційовні за* x, y *і задовольняють умови*

$$D_x^{2s}\varphi_r\,|_{x=0,\ x=\pi} = D_y^{2s}\varphi_r\,|_{y=0,\ y=\pi} = 0, \quad s = 0,1,...,[(\xi-1)/2],$$

то існує розв'язок задачі (1)–(3) *з простору* $C^{(2,2)}(D)$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_r(x,y)$, $r = 1,2$, *та* $f(t,x,y)$.

Доведено метричні теореми про виконання оцінок (4).

Takao Komatsu

Hirosaki University, Japan
komatsu@cc.hirosaki-u.ac.jp

DIOPHANTINE APPROXIMATIONS OF HURWITZ AND TASOEV CONTINUED FRACTIONS

Let us denote the n-th convergent of the continued fraction by $p_n/q_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$. Let α be a Tasoev continued fraction. For instance,

$$[0; ua, ua^2, ua^3, \dots]$$

is one of the typical types of Tasoev continued fractions. In this talk we give the explicit forms of $D_n := q_n\alpha - p_n$ in several typical types of Tasoev continued fractions. Some more applications on Hurwitz continued fractions are also discussed.

1. Komatsu T. On Tasoev's continued fractions// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 2003. – **134**. – P. 1-12.
2. Komatsu T. On Hurwitzian and Tasoev's continued fractions// Acta Arith. – 2003. – **107**. – P. 161-177.
3. Komatsu T. Leaping convergents of Hurwitz continued fractions// in Diophantine Analysis and related fields. AIP Conf. Proc. 976. – P. 130-143.
4. Komatsu T. Diophantine approximations of *tanh*, *tan*, and linear forms of e in terms of integrals// Rev. Roum. Math. Pures Appl. – 2009. – **54**. – P. 223-242.
5. Tasoev B. G. Rational approximations to certain numbers// Mat. Zametki – 2000. – **67**. – P. 931-937.

Марина Конаровська

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
mmi_marina@mail.ru

ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАТОРІВ ДРОБОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ДО ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ

У шарі $\Pi^+_{-\infty} \equiv (-\infty; T) \times E^+_n$, $E^+_n = (0, +\infty) \times E_{n-2} \times (0, +\infty)$, розглянемо крайову задачу без початкових даних

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j \le 2b} A_{kj}(t) D^{2k_1}_{x_1} D^{k''}_{x''} B^j_{x_n} u(t,x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{2l} u(t,x)}{\partial x_1^{2l}}\right|_{x_1=0} = g_l(t,x'), \quad l = \overline{0, b-1}. \tag{2}$$

Через $\tilde{C}^m_p(\tilde{\Pi}^+_{-\infty})$, $\tilde{\Pi}^+_{-\infty} \equiv (-\infty; T) \times E^+_{n-1}$, позначимо клас функцій $f(t,x')$, які мають похідні по t до порядку m, для яких $|D^m_t f(t,x')| \le$ $\le C_m(1+|t|)^{-p}$, $p > 0$. Для встановлення існування розв'язку задачі (1) – (2) розглянемо оператор $\Lambda(D) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (-1)^b(\Delta_{x''} + B_{x_n})$ та оператор дробового інтегрування $J^{(\alpha)}_{x'}(f)$, що відповідає оператору $\Lambda(D)$

$$J^{(\alpha)}_{x'}(f)(t,x') = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int\limits_{E^+_{n-1}} G_0(t-\tau, x', y') f(\tau, y') y_n^{2\nu+1} dy',$$

$0 < \alpha < 1$. $J^{(\alpha)}_{x'}(f)$ визначений на гельдерових функціях $f(t,x')$, які належать класу $\tilde{C}_\varepsilon(\tilde{\Pi}^+_{-\infty})$, $\varepsilon > \alpha$. Оператор дробового диференціювання $D^{(\alpha)}_{x'}(f) = \Lambda(D) J^{(1-\alpha)}_{x'}(f)$.

Якщо система (1) B-параболічна, коефіцієнти $A_{kj}(t)$ неперервні та обмежені по t, виконується умова Лопатинського, крайові функції задовольняють умови гладкості по x' і t та спадання по t при $-\infty <$ $< t \le T$, тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)–(2), який належить класу $C^{(2b+\alpha,1)}_{x,t}(\Pi^+_{-\infty})$.

1. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.

Андрій Конограй

Інститут математики НАН України
Konogray@i.ua

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{1,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_q

В роботі досліджуються апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$ [1], періодичних функцій багатьох змінних, які є узагальненням відомих класів Бєсова. Нижче будемо вважати, що $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє так звані умови (S) і (S_l) Барі–Стєчкіна (див., наприклад, [1]).

Нехай $L_q(\pi_d)$ – простір 2π–періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі стандартною нормою. Одержано точні за порядком оцінки тригонометричних поперечників $d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$, які визначаються наступним чином:

$$d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \sup_{f\in B^{\Omega}_{1,\theta}} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^M} \Big\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} \Big\|_q,$$

де $\{k^j\}_{j=1}^M$ – набір векторів $k^j = (k^j_1, ..., k^j_d)$ з цілочисловими координатами, c_j – довільні числа.

Теорема. *Нехай* $2 \le q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1$, *а також умову* (S_l), $l \ge 2$. *Тоді для будь-яких* $M, n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$d^T_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

1. Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1997. – № 219. – P. 356–377.

Владислав Кононов

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
vt@onu.edu.ua

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

Рассматривается задача построения квадратурных формул для интегралов типа

$$I = \int\limits_a^b \rho(x) f(x) dx$$

на классе функций, удовлетворяющих условию Липшица на отрезке $[a, b]$ с константой l, $\mathcal{L}(a, b, l)$. При этом выбор квадратурной формулы осуществляется по следующему принципу. После выбора узлов $\{x_i\}_{i=1}^n$ и получения информации $\{f(x_i)\}_{i=1}^n$ определяется интерполяционный класс

$$L(f) = \{\varphi \,:\, \varphi \in \mathcal{L}(a, b, l),\, \varphi(x_i) = f(x_i)\}$$

и вычисляются

$$I_{max} = \sup_{\varphi \in L(f)} \int\limits_a^b \rho(x)\varphi(x)dx, \quad I_{min} = \inf_{\varphi \in L(f)} \int\limits_a^b \rho(x)\varphi(x)dx.$$

После чего приближенное решение и погрешность вычисляются по формулам

$$I_{прибл} = (I_{max} + I_{min})/2, \quad E(f) = (I_{max} - I_{min})/2.$$

При этом погрешность на классе определяется формулой

$$E(S) = \sup_{f \in \mathcal{L}(a,b,l)} E(f).$$

Для интегралов указанного типа были построены квадратурные формулы для некоторых весовых функций $\rho(x)$ и произвольно выбранных узлов.

Олеся Коркуна

Національний лісотехнічний університет України
olesya.korkuna@gmail.com

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ЗА ЕЙДЕЛЬМАНОМ РІВНЯННЯ

Нехай $x \in \mathbb{R}^N,\ y \in \mathbb{R}^m,\ z = (x, y) \in \mathbb{R}^n,\ k + m = n$. В області $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ розглянемо задачу Коші

$$u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha (b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u) + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) D_z^\alpha u + c(z,t,u) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha(z,t) - \sum_{|\alpha|=1} D_y^\alpha g_\alpha(z,t), \tag{1}$$

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де $D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}},\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k,\ D_y^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_m^{\alpha_m}},\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m,\ D_z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}},\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови: $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_\alpha \in L^\infty(Q_T)$; $\sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t)\xi_\alpha\xi_\beta \ge a_0 \sum\limits_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2,\ a_0 > 0$; $\sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t)\eta_\alpha\eta_\beta \ge b_0 \sum\limits_{|\alpha|=1} |\eta_\alpha|^2,\ b_0 > 0$ для всіх $(z,t) \in Q_T$, $\xi \in \mathbb{R}^{N(k)}, \eta \in \mathbb{R}^m$; функція $c(z,t,\cdot)$ є неперервною в $\mathbb{R}$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$ та $\xi \in \mathbb{R}$, $(c(z,t,\xi) - c(z,t,\tilde{\xi}))(\xi - \tilde{\xi}) \ge 0,\ c(z,t,\xi)\xi \ge c_0|\xi|^2,\ |c(z,t,\xi)| \le c_1|\xi|^{r-1},\ r \in [1,2]$.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язків задачі (1), (2) з простору $C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0,T; W_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap W_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$, де $W_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{u :\ D_y^\alpha u \in L^2(\Omega(\overline{R}, R)),\ |\alpha| \le 1\ \forall \overline{R} > 0,\ R > 0\}$, $W_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{u :\ D_x^\alpha u \in L^2(\Omega(\overline{R}, R)),\ |\alpha| \le 2\ \forall \overline{R} > 0,\ R > 0\}$, $\Omega(\overline{R}, R) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| < \overline{R}\} \times \{y \in \mathbb{R}^m : |y| < R\}$; доведено, що $\int_0^T \int\limits_{\Omega(\overline{R},R)} u^2(z,t)\,dz\,dt \le b_1 e^{a(\overline{R}^{4/3} + R^2)}$, де b_1 не залежить від $\overline{R}$ та R.

Ирина Котлярова

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
trishka@ua.fm

ОБ ИСЧЕЗАЮЩИХ РЕШЕНИЯХ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ЧАСТИЧНО РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x' = f(t) + p(t)x + g_0(t)V(t,x) + \sum_{i=1}^{2} g_i(t)W_i(t,x,x'), \qquad (1)$$

в котором функции $f, p, g_i : [a,\omega) \to \mathbb{R}$, $V : [a,\omega)\times\mathbb{R}_b \to \mathbb{R}$, $W_j : \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывны, $i = 0,1,2$, $j = 1,2$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\mathbb{R}_b = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le b\}$, $b > 0$, $\Omega = \{(t,x,y) : a \le t < \omega, |x| \le b, |y| \le b\mu(t)\}$, где $\mu : [a,\omega) \to (0,+\infty)$ некоторая непрерывная функция.

Пусть при этом существуют положительные постоянные L, M, K такие, что $|V(t,x)| \le L|x| \quad \forall (t,x) \in [a,\omega)\times\mathbb{R}_b$, $|W_1(t,x,y/\mu(t))| \le K$, $|W_2(t,x,y/\mu(t))| \le M|y|$, $\forall (t,x,y) \in \Omega$.

Введем вспомогательные функции

$$A_c(t) = |c|e^{\int_a^t p(s)ds} + \left|\int_A^t f(\tau)e^{\int_\tau^t p(s)ds}d\tau\right| + K\left|\int_{\alpha_1}^t |g_1(\tau)|e^{\int_\tau^t p(s)ds}d\tau\right|,$$

$$B_i(t) = \left|\int_{\alpha_i}^t |g_i(\tau)|e^{\int_\tau^t p(s)ds}d\tau\right|, \quad i = 0,2, \quad A, \alpha_j \in \{\omega, a\}, \quad j = 0,1,2.$$

При некоторых дополнительных условиях на функции $A_c(t)$, $B_i(t)$, $f(t)$, $p(t)$, $g_j(t)$ $(i = 0,2, j = 0,1,2)$ получены признаки существования решений $x : [t_0,\omega) \to \mathrm{R}_b$ уравнения (1) (для некоторого $t_0 \in [a,\omega)$), удовлетворяющих условию $\lim_{t\uparrow\omega}(|x(t)| + \mu(t)|x^{'}(t)|) = 0$.

Полученный результат распространяет на случай уравнения, не разрешенного относительно производной, основной результат работы [1], в которой рассмотрены системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Евтухов И.М., Самойленко А.М. Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. Мат. Ж. – 2010. – **62**, №1. – С. 52–65.

Євген Крутиголова

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
shap.ov@mail.ru

ПРО ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ РОСТОМ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ І ТИПОМ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК ЇЇ ПЕРЕТВОРЕННЯ БОРЕЛЯ

Нехай $L(\lambda)$ – ціла функція експоненціального типу, $\gamma(t) = \int_0^\infty L(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda$ – функція, асоційована з $L(\lambda)$ за Борелем. Позначимо через $\bar{D}$ найменшу опуклу замкнену область, яка містить всі особливі точки функції $\gamma(t)$. Для випадку, коли функція $\gamma(t)$ має скінченну кількість особливих точок на межі $\bar{D}$, тобто, коли $\bar{D}$ – опуклий многокутник, встановлено [1] вигляд цілої функції $L(\lambda)$ в залежності від типу особливих точок функції $\gamma(t)$.

У випадку, коли D – довільна опукла обмежена область, справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Для того, щоб асоційована функція $\gamma(t)$ мала в $\bar{D}$ своїми ізольованими особливими точками полюси порядку m і не мала жодних інших особливих точок, необхідно і достатньо, щоб функція $L(\lambda)$ задовольняла умову:*
$B\tau^{m-1}e^{h(\varphi)\tau} < \left|L(\tau e^{i\varphi}\right| < A\tau^{m-1}e^{h(\varphi)\tau}$, *$A, B = const$, $h(\varphi)$ – індикатор росту функції $L(\lambda)$, $\tau > \tau_0$, $m \in N$.*

Теорема 2. *Для того, щоб асоційована функція $\gamma(t)$ була неперервною на межі індикаторної діаграми $\bar{D}$ необхідно і достатньо, щоб функція $L(\lambda)$ задовольняла умову:*

$$\left|L(\tau e^{i\varphi})\right| < A_1\frac{e^{h(\varphi)\tau}}{\tau^\alpha}, \alpha > 1, A_1 = const, \tau > \tau_1.$$

1. Крутиголова Є.К. Про залежність між ростом цілої функції експоненціального типу і характером особливих точок її перетворення Бореля-Лапласа // Актуальні проблеми фізики, математики та інформатики. – 2009. – №1. – С. 57-60.

Антон Кузь

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
kuz.anton87@gmail.com

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В області $D^3 = \{(t,x), t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^3\}$ розглядаємо задачу

$$L(\partial/\partial t, \partial) := \sigma\partial^2/\partial t^2 u(t,x) = \mu^* \Delta u(t,x) + (\lambda^* + \mu^*)\partial\,'\partial u(t,x), \quad (1)$$

$$U_j[u] := \alpha_j u(t_1,x) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x),\ j = 1,2, \quad (2)$$

де $u = \mathrm{col}(u_1,u_2,u_3)$, $\partial = \mathrm{col}(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\partial' = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\lambda^*, \mu^*, \sigma > 0$; $t_1 = 0, t_2 = T$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$; $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $r_{jq} > r_{js}$, $q > s$, $j = 1,2$; $\Delta = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$; компоненти вектор-функцій $\varphi_j(x) = \mathrm{col}(\varphi_{j1}(x), \varphi_{j2}(x), \varphi_{j3}(x))$, $j = 1,2$, є майже періодичними за x зі заданим спектром $M := \{\mu_k, k \in \mathbb{Z}^3\}$, $\mu_{-k} = -\mu_k$, $d_2|k|^\theta \le |\mu_k| \le d_1|k|^\theta$, $d_1, d_2, \theta > 0$, $|\mu_k| = \sum_{j=1}^3 |\mu_{k_j}|$, $\|\mu_k\|^2 = \sum_{j=1}^3 \mu_{k_j}^2$.

Позначимо: $u_{jk} = h_j \exp(i\gamma_j(\mu_k)t)$, $u_{3+j,k} = h_j \exp(-i\gamma_j(\mu_k)t)$, $j = 1,2,3$, – фундаментальна система розв'язків системи $L(d/dt, \mu_k)y(t) = 0$, де $\gamma_1(\mu_k) = \gamma_2(\mu_k) = \sqrt{\mu^*/\sigma}\|\mu_k\|$, $\gamma_3(\mu_k) = \sqrt{(\lambda^* + 2\mu^*)/\sigma}\|\mu_k\|$; $h_1 = |\mu_k|^{-1}(\mu_{k_3}, 0, -\mu_{k_1})$, $h_2 = |\mu_k|^{-1}(0, \mu_{k_3}, -\mu_{k_2})$, $h_3 = |\mu_k|^{-1}(\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \mu_{k_3})$; $\Delta(\mu_k, T) = \|U_j(u_{lk})\|_{l=1,\dots,6}^{j=1,2}$, де j відповідає за рядки, l – за стовпці; $\overline{C}_B^n(\overline{D}^p)$ – простір майже періодичних за x вектор-функцій $u(t,x)$ на $\overline{D}^3$ із нормою $\|u; \overline{C}_B^n(\overline{D}^3)\| = \sum_{j=1}^3 \sum_{0\le|\hat{s}|\le n} \max_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial^{|\hat{s}|} u_j(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_3^{s_3}}\right|$; $\hat{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{Z}_+^4$, $\overline{C}_B^n(\mathbb{R}^3)$ – підпростір функцій із $\overline{C}_B^n(\overline{D}^3)$, які не залежать від t.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{C}_B^2(\overline{D}^3)$ необхідно і достатньо, щоб $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ для всіх $\mu_k \in M$.*

Теорема 2. *Нехай виконується умова теореми 1 та існує стала $\eta > 0$ така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M$ справджується нерівність $|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta}$. Якщо $\varphi_j(x) \in \overline{C}_B^{[\eta+3/\theta]+2}(\mathbb{R}^3), j = 1,2$, то розв'язок задачі (1), (2) із простору $\overline{C}_B^2(\overline{D}^p)$ існує і неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x), j = 1,2$.*

Анатолій Кузьменко, Олена Гладка, Валентина Кузьменко

Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука
anatoliypk@gmail.com

ОДИН ВАРІАНТ СИНТЕЗУ МЕТОДУ ПРЯМИХ ТА Р-ТРАНСФОРМАЦІЙ НА ОСНОВІ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ

Синтез методів декомпозиції області з чисельно-аналітичними методами розв'язування задач математичної фізики, наприклад, сумарних представлень, скінченних елементів чи ін., дозволяє розробити методику, що може бути основою науково обгрунтованих розрахунків об'єктів чи процесів для областей складної форми в неоднорідному середовищі.

В даній роботі основні етапи однієї з розроблених авторами методик синтезу методу прямих та методу сумарних представлень на основі декомпозиції розрахункової області проілюстровано на прикладі розв'язування модельної крайової задачі для параболічного рівняння із розривними коефіцієнтами.

Здійснивши дискретизацію за змінною t згідно методу прямих отримаємо проекції вихідної задачі у вигляді послідовності крайових задач для рівнянь Гельмгольца. Згідно алгоритму декомпозиції розрахункової області розв'язок отриманих крайових задач шукатимемо у вигляді ряду, для визначення членів якого формуються окремі відповідні крайові задачі в областях неперервності коефіцієнтів вихідного диференціального рівняння. Розв'язки цих задач в скінченно-різницевій постановці знаходимо з використанням методу сумарних наближень. Збіжність ряду забезпечується вибором значень відповідних релаксаційних параметрів.

Отже, вихідна задача зводиться до розв'язування послідовності різницевих крайових задач в областях неперервності коефіцієнтів вихідного диференціального рівняння. Розв'язування отриманих задач з урахуванням явного виду формул методу сумарних наближень підтримується окремими обчислювальними процесами, які з дотриманням відповідної синхронізації можна виконувати паралельно.

Ярослав Кунець, Валерій Матус,
Віктор Міщенко, Василь Пороховський

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
matus@iapmm.lviv.ua

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ РІВНЯНЬ МЕТОДУ НУЛЬОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПЛОЩИНІ

Розглянуто задачу розсіяння SH-хвиль пружним опуклим включенням неканонічної форми, що міститься у необмеженому пружному середовищі. Припускається, що між складовими композиту знаходиться тонка пружна неоднорідність низької жорсткості, яка моделюється асимптотично точними співвідношеннями, записаними на її серединній лінії [1]. Задача зводиться до розв'язання рівняння Гельмгольца в кусково-однорідній площині із ускладненими граничними умовами на межі поділу середовищ. Аналогічний випадок міжфазної тріщини розглянуто у [2].

Для отримання розв'язку задачі модифіковано метод нульового поля (МНП). Регуляризація рівнянь МНП проводиться із врахуванням асимптотичної поведінки шуканих функцій на межі поділу складових композиту з подальшим їх представленням у вигляді рядів Фур'є.

Наведений аналітико-числовий алгоритм дозволяє аналізувати спектральні залежності амплітуд розсіяння SH-хвиль при різних геометричних та механічних параметрах включень та тонких пружних міжфазних неоднорідностей.

1. Emets V.F., Kunets Ya.I., Matus V.V. Scattering of SH waves an elastic thin-walled rigidly supported inclusion // Archive of Applied Mechanics. – 2004. – **73**. – P. 769–780.
2. Kunets Y. I., Matus V. V., Mykhas'kiv V. V., Bostrom A., Zhang Ch. Scattering of SH-wave by an elastic fiber of non-classical cross-section with interface crack // Mechanics of Composite Materials. – 2008. – **44**, N 2 – P. 245–254.

Мирослав Кутнів, Андрій Кунинець

Національний університет „Львівська політехніка“
kutniv@yahoo.com, andriy.kunynets@gmail.com

ТОЧНА ТРИТОЧКОВА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО СТАЦІОНАРНОГО РІВНЯННЯ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Розглянемо крайову задачу

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rk(r)\frac{du}{dr}\right] = -f(r,u),\ r \in [0,R], \tag{1}$$

$$\lim_{r\to 0} rk(r)\frac{du}{dr} = 0,\ u(R) = \mu_2 \tag{2}$$

за умов

$$0 < c_1 \le k(r) \le c_2 \quad \forall r \in [0,R], \quad k(r) \in Q^1[0,R],$$

$$f_u(r) \equiv f(r,u) \in Q^0[0,R],\ |f(r,u)| \le K \quad \forall r \in [0,R],\ \forall u \in \Omega([0,R],\rho),$$

$$|f(r,u) - f(r,v)| \le L|u-v| \quad \forall r \in [0,R], \quad u,v \in \Omega([0,R],\rho),$$

$$q = \frac{LR^2}{4c_1}\max(1, 2c_1) < 1.$$

Тут $Q^p[0,R]$ – клас функцій з кусково - неперервними похідними до p порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду, а множина функцій $\Omega([0,R],\rho)$ має вигляд

$$\Omega([0,R],\rho) = \left\{u(r) : u(r) \in W^1_\infty[0,R], \quad u(r), rk(r)\frac{du}{dr} \in C[0,R],\right.$$

$$\left.\left\|u - u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[0,R]} \le \rho\right\},\ \rho = \frac{KR^2}{4c_1}\max(1, 2c_1),\ \|u\|_{0,\infty,[0,R]} =$$

$$= \max_{r\in[0,R]}|u(r)|,\ \|u\|^*_{1,\infty,[0,R]} = \max\left\{\|u\|_{0,\infty,[0,R]},\ \left\|rk(r)\frac{du}{dr}\right\|_{0,\infty,[0,R]}\right\}.$$

Для задачі (1), (2) на нерівномірній сітці побудовано точну триточкову різницеву схему, доведено існування та єдиність її розв'язку, збіжність ітераційного методу послідовних наближень для його знаходження.

Христина Кучмінська

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
kuchminska_khrys@hotmail.com

ВІДПОВІДНІ ДВОВИМІРНІ НЕПЕРЕРВНІ ДРОБИ

Відповідність послідовностей мероморфних функцій до формальних рядів Лорана відіграє основну роль у теорії неперервних дробів та наближень Паде. Відомо, що багато аналітичних функцй зображаються відповідними неперервними дробами, причому задана функція може бути зображена кількома різними неперервними дробами, кожен зі своєю власною поведінкою збіжності. Концепція відповідності неперервних дробів до формальних рядів Лорана, започаткована у 1813 році Ґаусом, розроблялась значно пізніше Джоунсом і Троном [1].

Для двовимірних неперервних дробів (ДНД)

$$\Phi_0(z_1,z_2)+\mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,i}z_1z_2}{1+\Phi_i(z_1,z_2)},\quad \Phi_k(z_1,z_2)=\mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{k+i,k}z_1}{1}+\mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{k,k+i}z_2}{1},$$

$$(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2, k=0,1,\ldots,$$

розглядається відповідність до формальних подвійних степеневих рядів [2] та вивчаються спеціальні властивості найважливіших, на наш погляд, типів ДНД: правильних двовимірних C- дробів, двовимірних приєднаних дробів, включаючи, зокрема, як приклади таких типів двовимірні J- та P- дроби.

1. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
2. Кучмінська Х. Й.Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.

Оксана Лабачук

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
olabachuk@gmail.com

МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ ПОЛІНОМИ НА БАНАХОВИХ АЛГЕБРАХ

Відомо, що добуток характерів довільної алгебри є мультиплікативним поліноміальним функціалом [1].

Мультиплікативний поліном, що подається у вигляді добутку харатерів, будемо називати тривіальним.

На некомутативній алгебрі існують приклади мультиплікативних поліномів, які не є добутками характерів. Тому виникає питання: чи існує нетривіальний мультиплікативний поліном у комутативній алгебрі?

Теорема. *Якщо A — комутативна напівпроста банахова алгебра без дільників нуля, в якій існує нетривіальний мультиплікативний поліном, то алгебра многочленів $P(\mathbb{C}^m)$ від m змінних містить нетривіальний мультиплікативний поліном для деякого m.*

У результаті вдалося довести, що кожен мультиплікативний поліноміальний функціонал n-го степеня на алгебрі $P(\mathbb{C}^2)$ многочленів від двох змінних є тривіальним.

Поповнимо алгебру $P(\mathbb{C}^2)$ в довільній локально опуклій метризовній топології до топологічної алгебри та позначимо її A. Кожен мультиплікативний поліном степеня n на A подається у вигляді добутку характерів.

1. A. Zagorodnyuk. Multiplicative polynomial operators on topological algebras // Contemporary Mathematics. – 1999. – **232**. – C. 357–361.

Михайло Ленюк, Олег Ленюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Lenyuk_OM@mail.ru

ОДНА СІМ'Я ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично призводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП) [1].

У цій праці запроваджено інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0; R_1) \bigcup (R_1; R_2) \bigcup (R_2; \infty)\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)d^2/dr^2 + \theta(r - R_2)B_\alpha^*, \quad (1)$$

де $\theta(x)$– одинична функція Гевісайда.

У рівності (1) беруть участь диференціальні оператори Лежандра $\Lambda_{(\mu)}$, Фур'є d^2/dr^2 та Ейлера B_α^* [2].

При цьому доведено теорему про інтегральне зображення та виведено основну тотожність інтегрального перетворення ГДО, яка лежить в основі застосування.

Логічну схему застосування запроваджених ГІП Лежандра-Фур'є-Ейлера показано на типових задачах математичної фізики неоднорідних середовищ (задачі квазістатики, динаміки).

1. Ленюк М.П, Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.
2. Ленюк М.П, Ленюк О.М. Гібридне інтегральне перетворення Лежандра, Фур'є, Ейлера на полярній осі // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2010. – Вип. 528. – С. 80–87.

Юрій Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
yustlin@gmail.com

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ОПЕРАТОРНОГО АНАЛОГА МУЛЬТИПЛІКАТИВНОГО РІВНЯННЯ КОШІ

Нехай G – довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділе-ний топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ – множину всіх лінійних неперервних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$ [1]. Для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ опишемо всі оператори T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які задовольняють співвідношення

$$\left(T\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)\right)(z) = \prod_{k=1}^{n}(Tf_k)(z) \qquad (1)$$

для довільних функцій $f_k(z)$, $k = \overline{1,n}$, з простору $\mathcal{H}(G)$.

Теорема. *Нехай G – довільна область комплексної площини. Для того, щоб ненульовий оператор T належав до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняв співвідношення* (1) *необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді*

$$(Tf)(z) = \exp\left(\frac{2\pi ki}{n-1}\right) f(\psi(z)),$$

де $\psi(z)$ – довільна функція з простору $\mathcal{H}(G)$, для якої $\psi(G) \subset G$, а k – деяке натуральне число, $k = \overline{1, n-1}$.

З теореми випливає, що множина ненульових операторів T, які задовольняють (1), збігається з множиною операторів, які є добутками спеціальних скалярних операторів та довільних операторів композиції, які лінійно та неперервно діють у $\mathcal{H}(G)$. Комутаційні властивості операторів композиції в просторах $\mathcal{H}(G)$ досліджені в [2].

1. Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – P. 30–42.
2. Лінчук Ю.С. Комутант одного класу операторів композиції в просторах аналітичних функцій // Доповіді НАН України. – 2005. – **11**. – С. 14–17.

Віра Лозинська

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
vlozynska@yahoo.com

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ В ЗГОРТКОВІЙ АЛГЕБРІ УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ

Розглядаємо простір $\mathcal{E}_*(\Omega)$ ультрадиференційовних функцій, введений у роботі [1]. Сильно спряжений простір до простору $\mathcal{E}_*(\Omega)$ позначаємо $\mathcal{E}_*(\Omega)'$.

Для ультрарозподілу $\mu \in \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)'$ та функції $f \in \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)$ визначимо згортку

$$\mu \star f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \mu \star f(x) := \langle \mu_y, f(x-y) \rangle = \langle \mu_y, T_y f(x) \rangle,$$

де μ_y позначає дію функціонала μ на функцію $f(x-y)$ по змінній y.

Теорема. *Простір $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)'$ є комутативною алгеброю відносно згортки, визначеної співвідношенням*

$$\mu * \nu : \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \langle \mu * \nu, f \rangle := \langle \nu, \check{\mu} \star f \rangle,$$

де $\langle \check{\mu}, f \rangle = \langle \mu_x \, , f(-x) \rangle$, $\mu, \nu \in \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)'$, $f \in \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^n)$.

У Фур'є–образі згорткової алгебри ультрарозподілів побудуємо функціональне числення для оператора диференціювання.

Для довільного $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathcal{E}}_*(\Omega)'$ оператор $\widehat{\mu}(D) \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{E}}_*(\Omega))$ визначаємо формулою

$$\widehat{\mu}(D)\widehat{f} := \widehat{\mu \star f}, \quad \text{де} \quad \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{E}}_*(\Omega).$$

Для функції Дірака формула функціонального числення від оператора диференціювання буде мати вигляд $\widehat{\delta}(D)\widehat{f} := \widehat{\delta \star f} = \widehat{f}$, де $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{E}}_*(\Omega)$.

1. Braun R.W., Meise R., Taylor B.A., Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results in Mathematics – 1990. – **17**. – P. 206–237.

Галина Лопушанська

Львівський національний університет імені Івана Франка
lhp@ukr.net

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею Ω_1 класу C^∞.

Встановлено існування та єдиність розв'язку нормальної крайової задачі

$$A(x,D)u = F_0(x), \quad x \in \Omega_0$$

$$B_j(x,D)u(x) = F_j(x), \ x \in \Omega_1, \quad j = \overline{1,m},$$

де A – рівномірно еліптичний за Петровським матричний диференціальний вираз, $A = \sum\limits_{|\alpha|\le 2b} a_\alpha(x) D_x^\alpha$,

$B_j(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\le r_j} b_{j\alpha}(x) D_x^\alpha$, $j = \overline{1,m}$, $m = bp$,

$a_\alpha(x,t)$ – квадратні $p \times p$ матриці з елементами $a_\alpha^{\nu\mu} \in C^\infty(\Omega_0)$,

$b_{j\alpha}(x)$ – рядки довжини p з елементами з $C^\infty(\Omega_1)$, $j = \overline{1,m}$, система $\{B_j\}_{j=1}^m$ рівномірно накриває A та є нормальною,

праві частини (F_0, F_j, $j = \overline{1,m}$) належать до вагових просторів узагальнених функцій, що як окремі випадки містять функції із сильними степеневими особливостями.

При заданих на межі області F_j, $j = \overline{1,m}$, з вагових просторів узагальнених функцій одержано достатні умови розв'язності задачі

$$A(x,D)u = F_0(x, \partial_r u), \quad x \in \Omega_0$$

$$B_j(x,D)u(x) = F_j(x), \ x \in \Omega_1, \quad j = \overline{1,m},$$

де r – ціле число, $0 \le r \le 2b-1$, $\partial_r u$ – матриця розміру $p \times M(r)$, елементами якої є вектор-функція u та її похідні до порядку r, $F_0(x,z)$ ($z = (z_{(0,\dots,0)}, z_{(1,0,\dots,0)}, \dots, z_\alpha, \dots)$) визначена на $\Omega_0 \times \mathcal{M}_{p\times M(r)}$ вектор-функція зі значеннями в $\mathbb{R}^p$, де $\mathcal{M}_{p\times s}$ – клас матриць розміру $p \times s$ із дійсними коефіцієнтами.

Андрій Лопушанський

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
alopushanskyj@gmail.com

ЗБУРЕНА АБСТРАКТНА ЗАДАЧА КОШІ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

Розв'язність абстрактної задачі Коші та її аналога для рівнянь з дробовою похідною $\alpha \in (0,1)$ за часом досліджувалась у багатьох працях. У доповіді відомі результати поширено на випадок збуреного в комплексних інтерполяційних шкалах банахової пари $\{V_0, V_1\}$ необмеженого замкненого лінійного секторіального оператора A від'ємного типу в комплексному банаховому просторі V_0 із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$ (клас таких операторів позначаємо через $\mathcal{A}$). На просторі V_1 задано будь-яку норму, еквівалентну нормі графіка оператора A, тобто простір V_1 банахів, а вкладення $V_1 \subset V_0$ неперервне.

Нехай $D_t^\alpha g(t) = f_{-\alpha}(t) * g(t)$ – похідна Рімана-Ліувілля дробового порядку $\alpha \in \mathbb{R}$, де

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \text{ та } f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \leq 0,$$

$\Theta(t)$– функція Гевісайда, $\Gamma(\lambda)$– гамма-функція.

Зафіксуємо довільний оператор $J \in \mathcal{A}$. Родина операторів $(-J)^{-\vartheta}$ володіє півгруповою властивістю:

$$(-J)^{-\vartheta}(-J)^{-\vartheta'} = (-J)^{-\vartheta-\vartheta'}, \qquad \forall\, \vartheta, \vartheta' > 0.$$

Через V_ϑ позначимо область визначення дробового степеня J^ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ із нормою графіка $\|x\|_\vartheta := \|J^\vartheta x\|_0$. Простір $V_\vartheta = \big[\cdot, \cdot\big]_\vartheta$ — проміжний для інтерполяційної пари $\big\{V_0; V_1\big\}$, породжений комплексним методом інтерполяції.

За припущення

$$A \in \mathcal{A},\ \alpha, \theta \in (0,1),\ X \in \mathcal{L}(V_\theta, V_0),\ h \in V_1,$$
$$g \in C\big([0,T]; V_1\big),\ \text{існує } f_{\alpha-1} * g \in C\big([0,T]; V_1\big)$$

доведена однозначна розв'язність задачі

$$D_t^\alpha u(t) = (A + X)u(t) + D_t^{\alpha-1} g(t) + f_{1-\alpha}(t)u(0), \quad u(0) = h \tag{1}$$

у класі $C^\alpha := \{v \in C\big([0,T]; V_1\big) : \text{існує } D^\alpha u \in C\big((0,T]; V_0\big)\}$.

Результати поширено на випадок півлінійного рівняння з дробовою похідною за часом.

Ірина Лусте

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
appl-dpt@chnu.edu.ua

НЕЛІНІЙНА СУПЕРПОЗИЦІЯ В КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто можливість застосування принципу нелінійної суперпозиції для розв'язання нелінійної крайової задачі

$$U_{xx} + CU_{tt} + a(x)U_x + b(t)U_t = 0 \quad (C = \mathrm{const}),$$

$$U_x(0,t) = \alpha(t)F(U(0,t)),$$
$$U_x(1,t) = \beta(t)F(U(1,t)),$$

де F – відома функція.

Показано, що перетворення

$$J(U) = \int \frac{dz}{F(z)}$$

трансформує задачу до рівняння

$$J_{xx} + CJ_{tt} + A(J)J_x^2 + CA(J)J_t^2 + B(x)J_x + D(t)J_t = 0. \qquad (1)$$

Досліджено можливість узагальнення рівняння (1) до найбільш загального вигляду, для якого може бути запроваджений принцип нелінійної суперпозиції.

Ростислав Луцишин

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
shap.ov@mail.ru

ПРО РОЗКЛИНЮВАННЯ ТРІЩИН В ПРУЖНІЙ ПІВПЛОЩИНІ

Розглядається задача про напружено-деформований стан пружної півплощини з крайовим розрізом $[0, a]$, перпендикулярним до межі півплощини. В тріщину запресовано зусиллям P абсолютно жорсткий клин трикутної форми. Зона контакту клина з берегами тріщини $[0, b]$ $(0 < b < a)$ залежить від P і визначається в процесі розв'язання задачі. Шукане контактне напруження між сторонами клина і берегами тріщини $p(x)$ $(x \in [0, b])$. Тертя клина з берегами тріщини вважається відсутнім.

Використовуючи комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі та метод їх аналітичного продовження на всю площину, задача зводиться до інтегрального рівняння

$$\int_0^a K(x,\xi)\, g(x)\, d(x) = \frac{\pi(\kappa+1)}{4\mu} p(\xi)\, (0 \le \xi \le a) \tag{1}$$

$$K(x,\xi) = \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{x+\xi} + \frac{2x}{(x+\xi)^2} - \frac{4x^2}{(x+\xi)^3} \tag{2}$$

$g(x)$ – переміщення країв тріщини під дією клина.

Використовуючи, запропоновану М.П. Савруком [1] апроксимацію ядра рівняння (2)

$$K(x,\xi) \approx c\xi^{\frac{c}{2}-1} \frac{\sqrt{x^c}}{x^c - \xi^c}, c = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4}, \tag{3}$$

в роботі розв'язано рівняння (1) і поставлену задачу. Наведено часткові приклади та визначено коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці тріщини.

1. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К., 1988.

Ростислав Луцишин, Володимир Жидик

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
informatyka@drohobych.net

ДО ПИТАННЯ ПРО МЕТОДИКУ РОЗРАХУНКУ ЗОНИ ДВООБЛАСТЕВОГО КОНТАКТУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ З ЕЛІПТИЧНІСТЮ КОНТУРІВ

При наявності малої еліптичності циліндричних тіл номінально кругового перерізу може виникнути двообластевий співдотик, при якому максимальні контактні тиски будуть вищими, ніж для ідеалізованих контурів. Розроблено методику встановлення точок співдотику при косому контакті тіл, використовуючи умову рівності координат в точках дотику. Отримано тригонометричне рівняння для визначення кутових координат двох точок контакту. Наводиться наближений розв'язок рівняння.

Антон Лучка

Інститут математики НАН України

ПРО ПОБУДОВУ РОЗВ'ЯЗКІВ ПЕРЕВИЗНАЧЕНИХ ЗАДАЧ

В доповіді висвітлюється новий підхід до дослідження рівнянь з обмеженнями і побудови наближених розв'язків задачі

$$x(t) = f(t) + \int\limits_0^T K(t,s)x(s)ds, \quad \int\limits_0^T S(t)x(t)dt = \beta, \tag{1}$$

в якій $\beta \in \mathbb{R}^l$ і матриця $S(t)$ має розміри $l \times 1$.

До такої задачі зводяться крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь як з обмеженнями, так і без обмежень.

Встановлення умов сумісності задачі (1) тісно пов'язане із параметричною задачею

$$y(t) = C(t)\lambda + f(t) + \int\limits_0^T K(t,s)y(s)ds, \quad \int\limits_0^T S(t)y(t)dt = \beta. \tag{2}$$

Наближені розв'язки $y_k(t)$ задачі (2) будуються за формулою

$$y_k(t) = C(t)\lambda_k + f(t) + \int\limits_0^T K(t,s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k)ds, \tag{3}$$

а невідомі параметри $\lambda_k \in \mathbb{R}^l$, $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ визначаються з умов

$$\int\limits_0^T S(t)y_k(t)dt = \beta, \quad \int\limits_0^T \Psi(t)(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k)dt = 0. \tag{4}$$

Встановлено, що при певному виборі матриць $C(t)$, $\Phi(t)$ та $\Psi(t)$ розмірів $1 \times l$, $1 \times n$ та $n \times 1$ відповідно, метод (3), (4) зводиться до ітераційного методу для рівняння

$$y(t) = g(t) + \int\limits_0^T M(t,s)y(s)ds.$$

Володимир Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vmluchko@gmail.com

ПРО ПЕРІОДИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

У шарі $\Pi \equiv \{(t,x), t > \tau_0, x \in \mathbb{R}^n\}$ розглянуто задачу про знаходження періодичного розв'язку параболічного псевдодиференціального рівняння довільного порядку за змінною t

$$\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} = Au(t,x) + f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

з імпульсними умовами

$$u_t^{(j-1)}(\tau_i+0,x) - u_t^{(j-1)}(\tau_i-0,x) = B_i^{(j-1)} u_t^{(j-1)}(\tau_i-0,x) + a_j(x), \tag{2}$$

де $Au(t,x)$ – псевдодиференціальний оператор, який визначається формулою

$$Au(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(t,\sigma)\frac{d^{k_0}V}{dt^{k_0}}\right), V = F_{x\to\sigma}u(t,x),$$

$P_{\nu k_0}(t,\sigma)$ – однорідні функції аргумента σ степеня ν, $F^{-1}_{\sigma\to x}$, $F_{x\to\sigma}$ відповідно операція оберненого та прямого перетворення Фур'є, причому $P_{\nu k_0}(t,\sigma)$ та $f(t,x)$ є відомими неперервними, ω - періодичними функціями за аргументом t, $\omega > 0$, $B_i^{(j)}$ – сталі, $j = \overline{1,m}$, $a_i(x)$ – відомі неперервні функції, моменти τ_i такі, що

$$B_{i+p}^{(j)} = B_i^{(j)}, \tau_{i+p} = \tau_i + \omega.$$

Для даної задачі доведено теореми існування та єдиності періодичного розв'язку.

1. Самойленко А. М., Перестюк М. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 258 с.

Марія Магола, Петро Філевич

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
ЛНУВМБТ ім. С.З. Гжицького
marichka_stanko@ukr.net; filevych@mail.ru

ВАЛІРОНОВІ ДЕФЕКТИ ВИПАДКОВОЇ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — трансцендентна ціла функція, ρ_f, $T_f(r)$ і $N_f(r,a)$ — її порядок, характеристика Неванлінни і усереднена лічильна функція a-точок відповідно, а

$$\Delta_f(a) = 1 - \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_f(r,a)}{T_f(r)}.$$

Згідно з класичною теоремою Валірона [1], для кожної f такої, що

$$T_f(r) = O(\ln^2 r), \quad r \to +\infty, \tag{1}$$

рівність $\Delta_f(a) = 0$ виконується для кожного $a \in \mathbb{C}$, тобто за умови (1) функція f не має валіронових виняткових значень. З іншого боку, для довільної зростаючої до $+\infty$ на $[r_0, +\infty)$ функції ψ Д. Дрейсін і Д. Шіа [2] побудували приклад цілої функції f такої, що

$$T_f(r) = O(\psi(r) \ln^2 r), \quad r \to +\infty,$$

і $\Delta_f(a) > 0$ для множини значень a потужності континуум.

Однак, для "більшості"цілих функцій умову (1), яка гарантує відсутність валіронових виняткових значень, можна істотно послабити. Розглянемо поряд з функцією f випадкову цілу функцію $f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i \omega_n(\omega)} z^n$, де $(\omega_n(\omega))$ – послідовність незалежних рівномірно розподілених на $[0,1]$ випадкових величин. Зауважимо, що $\rho_{f_\omega} = \rho_f$ для всіх $\omega \in \Omega$.

Теорема. *Якщо $\rho_f < +\infty$, то м. н. $\Delta_{f_\omega}(a) = 0$ для всіх $a \in \mathbb{C}$.*

1. Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière // Ann. fac. sci. Univ. Toulouse – 1914. – **5**. – P. 117–257.
2. Drasin D., Shea D.F. On the Valiron deficiencies of integral functions // Bull. London Math. Soc. – 1969. – **1**. – P. 174–178.

Ярослав Магола, Мирослав Шеремета

Львівський національний університет імені Івана Франка
mahola@ukr.net, m_m_sheremeta@list.ru

ПРО ОПУКЛІСТЬ І БЛИЗЬКІСТЬ ДО ОПУКЛОСТІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗАДАНОЮ РЕКУРЕНТНОЮ ФОРМУЛОЮ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ

Однолиста аналітична в $\mathbb{D}=\{z{:}|z|<1\}$ функція $f(z)=z+\sum_{s=2}^{\infty} f_s z^s$ називається опуклою в $\mathbb{D}$, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область, і називається близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція g, що $\mathrm{Re}\{f'(z)/g'(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$. Відомо, що якщо $\sum_{s=2}^{\infty} s^2|f_s| \leq 1$, то функція f опукла в $\mathbb{D}$, а якщо $\sum_{s=2}^{\infty} s|f_s| \leq 1$, то вона є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$. За умови $f_s > 0$ $(s \geq 2)$ достатньою умовою близькості до опуклості функції f є умова $1 \geq 2f_2 \geq \ldots \geq nf_n \geq \ldots > 0$.

Припустимо, що $f_s = \sum_{k=1}^{\min\{s,n\}} \xi_s^{(s-k)} f_{s-k}$ для $s \geq 2$. Правильні наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай $n \geq 3$, всі $\xi_s^{(s-k)} > 0$, $2\xi_2^{(1)} \leq 1$, $s(\xi_s^{(s-1)}\xi_{s-1}^{(s-k)}+$ $+\xi_s^{(s-k)}) \leq (s-1)\xi_{s-1}^{(s-k)}$ для всіх $s = \overline{3, n+1}$ та $k = \overline{2, s-1}$ і $s(s-1-$ $-k)\xi_s^{(s-k)} \leq (s-1)(s-k)\xi_{s-1}^{(s-1-k)}$ для всіх $s \geq n+1$ і $k = \overline{1,n}$. Тоді функція f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.*

Теорема 2. *Нехай $\xi_j^* = \max\limits_{s\geq 2}\{(s+j)|\xi_{s+j}^{(s)}|/s\}$ і $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^* < 1$. Якщо*

$$n|\xi_n^{(1)}|+(n+1)|\xi_{n+1}^{(1)}|+\sum_{k=2}^{n-1}\Big(k+n|\xi_n^{(k)}|-\sum_{j=1}^{n-k}(k+j)|\xi_{k+j}^{(k)}|\Big)|f_k| \leq 1-\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*,$$

то функція f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

Теорема 3. *Нехай $\xi_j^{**} = \max\limits_{s\geq 2}\{(s+j)^2|\xi_{s+j}^{(s)}|/s^2\}$ і $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{**} < 1$. Якщо*

$$n^2|\xi_n^{(1)}| + (n+1)^2|\xi_{n+1}^{(1)}|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1}\Big(k^2+n^2|\xi_n^{(k)}| - \sum_{j=0}^{n-k}(k+j)^2|\xi_{k+j}^{(k)}|\Big)|f_k| \leq 1-\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{**},$$

то функція f є опуклою в $\mathbb{D}$.

Володимир Макаров, Денис Драгунов, Дмитро Сембер

Інститут математики НАН України
semberdmitry@gmail.com

СУПЕРЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО ЗБІЖНИЙ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИСКРЕТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ГУРСА

У даній роботі запропоновано функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Гурса для гіперболічного диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку. Розглядається випадок квазілінійного рівняння з нелінійністю, що є аналітичною функцією в області її визначення. Наближений розв'язок задачі Гурса шукається у відповідності до схеми FD-методу розв'язування операторних рівнянь в банаховому просторі, наведеної в [1], яка є поєднанням FD-методу та методу розкладу Адомяна. Запропонований метод забезпечує суперекспоненціальну швидкість збіжності. Представлені чисельні приклади підтверджують теоретичні результати.

Таким чином, розглядається наступна задача Гурса в прямокутнику $\Omega = \{(x,y) \mid x \in (0,X), y \in (0,Y), X,Y > 0\}$:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + N(x,y,u(x,y))u(x,y) = f(x,y), \;\; x \in (0,X)\,, y \in (0,Y)\,,$$

$$u(x,0) = \psi(x), \;\; u(0,y) = \varphi(y), \;\; \psi(0) = \varphi(0), \tag{1}$$

де $N(x,y,u) \in C^{(0,0,\infty)}\left([0,X] \times [0,Y] \times \mathbb{R}^1\right), \psi(x) \in C^1[0,X], \varphi(y) \in C^1[0,Y], f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$ — задані функції. Наближення розв'язку задачі (1) шукаємо у вигляді частинної суми $\overset{p}{u}(x,y) = \sum_{k=0}^{p} u^{(j)}(x,y)$, яку будемо називати наближенням p - рангу. Запропонований алгоритм забезпечує суперекспоненціальну швидкість збіжності.

1. Lazurchak I.I., Makarov V.L., Sytnyk D. Two-sided Aproximations for Nonlinear Operator Equations // Computation Metods in Applied Mathematics. – 2008 – **8**, N 4. – P. 386–392.

Volodymyr Makarov, Nataliya Rossokhata, Denys Dragunov

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
dragunovdenis@gmail.com

EXPONENTIALLY CONVERGENT PARALLEL ALGORITHM FOR EIGENVALUE PROBLEM WITH DISCONTINUOUS AND GENERALIZED POTENTIALS

Based on the functional-discrete technique (FD-method), an algorithm for eigenvalue problems with discontinuous and generalized potentials is developed. The case of the potential involving Delta function and function in L_1 is investigated for both linear and nonlinear eigenvalue problems. For the nonlinear problem the FD-technique is combined with the Adomian decomposition method for the nonlinear part of the differential equation. For both linear and nonlinear problems, the proposed approach provides a super exponential convergence rate with the base inversely proportional to the index of a trial eigenvalue. Numerical examples are presented to support the theory. Based on the numerical examples and the convergence results, conclusion about applicability of the analytical theory for nonlinear eigenvalue problems is made.

We consider the following Sturm-Liouville problem

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) - [\beta\delta(x-\alpha) + q(x)]\,u(x) + \lambda u(x) - N(u(x)) = 0, \qquad (1)$$
$$u(0) = u(1) = 0; \quad u'(0) = 1,$$

where $\delta(x)$ denotes Delta-function, $\beta \in \mathbb{R}$, $q(x) \in L_1([0,1])$ and $N(u)$ is an analytical function in $\mathbb{R}$. Such problems are of great interest in [1]. We are looking for the approximations of the eigenfunctions and eigenvalues of the problem (1) in the form of the following truncated series $\overset{m}{\lambda}_n = \sum_{j=0}^{m}\lambda_n^{(j)}, \overset{m}{u}_n(x) = \sum_{j=0}^{m}u_n^{(j)}(x)$, which are called the approximations of rank m. The proposed algorithm for computing $\lambda_n^{(j)}$, $u_n^{(j)}(x)$ provides the superexponential convergence rate.

1. Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., Holden, H. Solvable models in quantum mechanics. – AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p.

Петро Малачівський, Ярополк Пізюр

ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Національний університет „Львівська політехніка“
psmal@cmm.lviv.ua, pizyur@yahoo.com

АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОХІДНОЇ ГЛАДКИМ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМ СПЛАЙНОМ

Гладкі інтерполяційні сплайни використовуються при побудові неперервного й гладкого чебишовського сплайн-наближення зі заданою похибкою, а також при наближенні розв'язків диференціальних рівнянь. Гладкий інтерполяційний сплайн – це локальний сплайн, у якому наближення на кожній із ланок визначається з умов ітерполювання функції у внутрішніх точках і ермітового інтерполювання на межах ланки. Виразами в ланках сплайна можуть бути многочлени $P_m(x)$, а також нелінійні за параметрами вирази $F_m(a;x) = F_m(a_0, a_1, ..., a_m; x)$, наприклад експонента від многочлена, сума многочлена і експоненти, сума многочлена і степеневого виразу тощо.

Нехай функція $f(x)$ і $F_m(a;x) \in C^1[\alpha, \beta]$ і на відрізку $[\alpha, \beta]$ задано значення функції та її похідної в точках $x_i \in [\alpha, \beta]$, $i = \overline{0, s}$. Гладким інтерполяційним сплайн-наближенням функції $f(x)$ на множині точок $x_i, i = \overline{0, s}$ виразом $F_m(a;x)$ називатимемо сплайн

$$S(x) = F_m(a^{(j)}; x), \quad t_j \le x \le t_{j+1}, \quad j = \overline{0, q}, \quad q \le s, \tag{1}$$

параметри $a^{(j)}$ j-ї ланки в якому визначаються із системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x_{k_j+i}) - F_m(x^{(j)}; x_{k_j+i}) & = & 0, \quad i = \overline{0, m-2}, \\ f'(x_j) - F'_m(x^{(j)}; x_{k_j}) & = & 0, \\ f'(x_{k_j+m-2} - F_m(x^{(j)}; x_{k_j+m-2})) & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

У цьому сплайні q – кількість ланок, а відрізок $[x_{k_j}, x_{k_j+m-2}]$ відповідає j-й ланці сплайна, де $k_j = (m-2)(j-1)$, $t_j = x_{k_j}$. У точках дотику ланок сплайну t_j, $j = \overline{2, q}$ значення функції та її похідної збігається зі значенням сплайну та його похідної. Отримано аналітичні вирази для параметрів ланки сплайна, оцінки похибки $\mu_{m,0}$ наближення функції сплайном, а також похибки наближення похідної фунції похідною сплайну $\mu_{m,1}$ для $m = 3, 4, 5$.

Анатолий Марковский

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
markowski@yandex.ru

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ПЛАСТОВЫХ ДАВЛЕНИЙ ДВУХ ГАЗОНОСНЫХ ПЛАСТОВ, ВСКРЫТЫХ ОДНОЙ СКВАЖИНОЙ, ПО УСТЬЕВЫМ ЗАМЕРАМ ДАВЛЕНИЯ И ДЕБИТА

Рассматривается математическая модель стационарного течения газа в газодинамической системе, состоящей из вертикальной скважины и двух горизонтальных газонасыщенных пористых пластов с фильтрационными коэффициентами a_1, b_1, a_2, b_2 и пластовыми давлениями X, Y, соответственно. Прямая задача состоит в вычислении суммарного дебита Q скважины и дебитов q_1, q_2 пластов как функций от давления на устье скважины, при известных a_1, b_1, a_2, b_2, X, Y. Эта задача решается в [1,2]. Обратная задача (идентификации) состоит в определении параметров a_1, b_1, a_2, b_2, X, Y по замерам на устье скважины значений суммарного дебита $Q(p_j)$ при соответствующих значениях устьевого давления p_j $(j = 1, \ldots, 6)$. Используются основные уравнения прямой задачи ([1,2]), при этом получается довольно сложная система нелинейных уравнений. Она редуцируется к системе трех нелинейных уравнений, полиномиальных по одной из неизвестных. Это позволяет построить эффективный численный метод ее решения. Важную роль играют так называемые точки поворота.

1. Марковский А. И. Стационарный дебит скважины, дренирующей два газоносных пласта // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2007. – № 4. – С. 184–191.
2. Марковский А. И. Стационарный дебит скважины, вскрывающей два газоносных пласта // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – **XIII**, № 3. – С. 101–112.

Михайло Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ З ФРАКТАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Для рівняння з оператором дробового диференціювання

$$Lu \equiv D^{\alpha}_{\Lambda} u - \frac{u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} - \sum_{|k| \leq [2b\alpha]} a_k(t,x) D^k_x u = f(t,x), \qquad (1)$$

в області $Q = (0,T) \times S$, S – межа $\Omega \in E_n$ розглядається задачі Коші з умовою $u|_{t=0} = \varphi(x)$, а для рівнянь $Lu + \beta pu = f$ двоточкова крайова задача $u|_{t=0} = \varphi(x), u|_{t=T} = \psi(x)$. У рівнянні (1) $D^{\alpha}_{\Lambda} = \Lambda(D)\mathfrak{I}^{1-\alpha}_{\Lambda}$, $\Lambda(D) = \frac{\partial}{\partial t} + (-1)^b \Delta^b_x$, Δ_x – оператор Бельтрамі-Лапласа на $S \in C^{(2b,\omega)}$, $\mathfrak{I}^{\alpha}_{\Lambda}$ – оператор дробового диференціювання для $\Lambda(D)$

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{\Lambda} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{((t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_S G_{\Lambda}(t-\tau, x, \xi) u(\tau,\xi) dS_{\xi}, \;\; \alpha \in (0,1),$$

$G_{\Lambda}(t,x,\xi)$ – фундаментальний розв'язок $\Lambda(D)u = 0$.

Крім того, для загального одномірного рівняння фрактальної дифузії

$$D^{\alpha}_t u = a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + C(t,x)u$$

будується функція Гріна (G_1, G_2) задачі Коші методом Е. Хопфа для коефіцієнтів із класу Діні.

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Koshubei A.N. Analitic methods in theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type. – Basel: Birdhouses, 2004. – 390 p.
2. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні: монографія. – Чернівці, 2010. – 248 с.

Yuriy Maturin

Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych
yuriy_maturin@hotmail.com

LATTICES OF RADICAL FILTERS IN MODULES

Let R be an associative ring with unit $1 \neq 0$. All modules are left unitary. Let $Rf(M)$ $[Pf(M)]$ be the set of all radical [preradical] filters of the module M. Let us consider the poset $(Rf(M), \subseteq)$ $[(Pf(M), \subseteq)]$ (see [1-5]).

Theorem 1. *If M is an R-module, then the poset $(Rf(M), \subseteq)$ $[(Pf(M), \subseteq)]$ is a complete lattice.*

Theorem 2. *Let M be a semisimple module, then the following conditions are equivalent:*

(i) *the lattice $(Rf(M), \subseteq)$ $[= (Pf(M), \subseteq)]$ is a chain;*

(ii) *M has no non-trivial fully invariant submodules;*

(iii) *M has no non-isomorphic minimal submodules.*

Theorem 3. *If M is a left R-module with $J(M) \neq M$, then $Card(Pf(M)) = 2$ if and only if M is a finitely generated semisimple module and all minimal submodules of M are isomorphic.*

1. F.W. Anderson, K.R. Fuller, Rings and categories of modules. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1973. – 340 p.
2. L. Bican, T. Kepka, P. Nemec, Rings, modules, and preradicals // Lect. Notes Appl. Math. 75. – New York, Marcell Dekker, 1982. – 241 p.
3. A.I. Kashu, Radicals and torsions in modules. – Chisinau: Stiintsa, 1983. – 154 p.
4. Yu. Maturin, Preradicals and submodules // Algebra and discrete mathematics. – 2010. – **10**, N 1. – P. 88–96.
5. Yu. Maturin, On filters in modules over associative rings // Proc. of the conference "XIII International Scientific Kravchuk Conference" (Kiev, Ukraine, May 2010). – P. 25.

Олександр Махней

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
makhney1@yahoo.com

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ СИСТЕМИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З РОЗПОДІЛАМИ НА ПІВОСІ

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_3(x)y^{(n-3)} + \ldots + p_n(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

де $p_i = q_i'$, q_i – неперервні справа функції обмеженої на $[0, \infty)$ варіації, тобто p_i – міри. Нехай $\lambda = -\rho^n$ – комплексний параметр. Розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2n$ секторів S_q, $q = 0, \ldots, 2n-1$, які задамо нерівностями $\frac{q\pi}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{(q+1)\pi}{n}$.

Теорема. *За накладених вище умов рівняння (1) має n лінійно незалежних розв'язків $y_k(x, \rho)$ таких, що при $x \geqslant a > 0$*

$$y_k^{(\nu)}(x, \rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_{k\nu}(x, \rho), \quad k = 1, \ldots, n, \quad \nu = 0, \ldots, n-1,$$

де функції $z_{k\nu}(x, \rho)$ обмежені для $\rho \in S_q$, $|\rho| \geqslant r > 0$; ω_k – всі різні корені n-го степеня з -1. Функції $y_k^{(\nu)}(x, \rho)$ неперервні за сукупністю змінних x, ρ і однозначні аналітичні функції змінної ρ для кожного фіксованого значення x. Коли $\rho \in S_q$, тоді функції мають асимптотичні зображення $y_k^{(\nu)}(x, \rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x}[\omega_k^\nu + O(1/\rho)]$, $\rho \to \infty$, які є рівномірними стосовно $x \in [0, \infty)$.

Отримані формули узагальнюють окремі результати робіт [1, 2] і дозволяють вивчити спектр відповідного диференціального оператора.

1. Наймарк М. А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси // Труды Московского математического общества. – 1954. – **3**. – С. 181–270.
2. Фунтаков В. Н. О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора произвольного четного порядка на полуоси $[0, \infty)$ // Изв. АН Аз. ССР. – 1960. – № 6. – С. 3–21.

Роман Мацюк

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
matsyuk@lms.lviv.ua

ВАРІЯЦІЙНА ПРИРОДА ТРЕМТІННЯ І САМОДІЇ В РЕЛЯТИВІЗМІ

Рівняння четвертого порядку для світової лінії релятивіської частки в пласко́му просторі-часі СТВ,

$$\pi'_\alpha = 0, \tag{*}$$

з узагальненим моментом кількости руху

$$\pi = 6\frac{u'\cdot u}{\|u\|^5} + \left(2\frac{u''\cdot u}{\|u\|^5} - 5\frac{(u'\cdot u)^2}{\|u\|^7} - \frac{u'\cdot u'}{\|u\|^5}\right)u - 2\frac{u''}{\|u\|^3} + \frac{A}{\|u\|}\,u$$

можна пов'язати як із тремтінням простої частки, так із наближеним ефектом самодії випромінюючого електрона. Узагальненню рівняння (*) у викривленому просторі-часі ЗТВ,

$$\pi'_\alpha = -R_{\alpha\beta\rho}{}^{\nu}u^\rho u^\beta \pi^{(1)}{}_\nu\,,$$

приписуємо гамільтонівське походження з функцією Гамільтона

$$\mathfrak{H} = \pi.u + \frac{\|u\|^3}{4}\pi^{(1)}\cdot\pi^{(1)} - A\,\|u\|\,.$$

Для цього коваріянтним чином переписуємо канонічний формалізм:

Ствердження. *Нехай функція Гамільтона* $\mathfrak{H}$ *залежить від змінних* x, u, π, $\pi^{(1)}$ *не інакше, як тільки за посередництвом незмінників* $\gamma = u\cdot u$, $\psi = \pi.u$, $\eta = \pi^{(1)}\cdot\pi^{(1)}$. *В цьому випадку система рівняннь Гамільтона з неозначеним множником* μ *є такою:*

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= u \\
u' &= 2\pi^{(1)}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\psi}\right)^{-1}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\eta} + \mu u \\
\pi'_\alpha &= -R_{\alpha\beta\rho}{}^{\nu}u^\rho u^\beta \pi^{(1)}{}_\nu \\
\pi^{(1)\prime} &= -2\,u\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\psi}\right)^{-1}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\gamma} - \pi - \mu\pi^{(1)}\,.
\end{aligned}$$

Ігор Мединський

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
dpm.mip@polynet.lviv.ua

ЛОКАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ КВАЗІЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу Коші

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\Big(\sum_{l=2}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} x_{(l-1)j}\partial_{x_{lj}} - \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t)\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t)\partial_{x_{1j}}\Big) - a_0(t)\Big)u(t,x) = f(t,x,D^1_{x_1}u(t,x)),\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\quad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=+0} = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де n_1 , n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $1\leq n_3\leq n_2\leq n_1$, $n := n_1+n_2+n_3$, $x := (x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^n$, якщо $x_l := (x_{l1},\ldots,x_{ln_l})\in\mathbb{R}^{n_l}$, $l\in\{1,2,3\}$; $D^1_{x_1}u := \{\partial^k_x u\,|\,|k|\leq 1\}$, L – кількість елементів множини $D^1_{x_1}u$; $G := \{y\in\mathbb{R}^L\,|\,|y_j|\leq R, j\in\{1,...,L\}\}$, де R – додатна стала, $Q_H := \{(t,x,y)\,|\,(t,x)\in\Pi_H, y\in G\}$, якщо $H\subset\mathbb{R}$; α і β — неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t)>0$, $\beta(t)>0$ при $t\in(0,T]$, $\alpha(0)\beta(0)=0$ і β монотонно неспадна. Нехай виконуються умови : **a**) $\exists\,\delta_0>0\ \forall t\in[0,T]\ \forall\,\sigma\in\mathbb{R}^{n_1}$: $\mathrm{Re}\sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t)\sigma_k\sigma_j \geq \delta_0|\sigma|^2$; **b**) коефіцієнти a_{kj}, a_j, $\{k,j\}\subset\{1,...,n_1\}$, і a_0 в $[0,T]$ є неперервними функціями. За допомогою результатів з [1,2] встановлено умови на функцію $f : Q_{[0,T]}\to\mathbb{C}$ за яких задача Коші (1),(2) має єдиний розв'язок в шарі $\Pi_{[0,T_0]}$, де $T_0\leq T$.

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
2. Івасишен С.Д., Мединський І.П. Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 110–114.

Володимир Мельничук

Київський національний університет будівництва і архітектури
vmelnychuk@gmail.com

ПРО АПРОКСИМАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається задача вигляду

$$y(t) = f(t) + C(t)\lambda + \int\limits_a^b K(t,s)y(s)ds + \varepsilon \int\limits_a^b H(t,s)F(s,y(s))ds,$$

$$\int\limits_a^b S(t)y(t)dt = \alpha + \varepsilon \int\limits_a^b E(t,y(t))dt, \quad t \in [a,b].$$

Тут функція $y(t)$ із класу $L_2([a,b])$ та вектор $\lambda \in \mathbb{R}^l$ невідомі.

Вибираються вектор-функції $P(t)$ та $Q(s)$ таким чином, щоб норма ядра $B(t,s) = K(t,s) - P(t)Q(s)$ була малою. Для цього вибору можна використати різні існуючі апроксимаційні методи, зокрема проекційні та інтерполяційні.

Наближені розв'язки розглядуваної задачі пропонується шукати апроксимаційно-ітеративним методом, суть якого полягає в тому, що послідовні наближення $y_k(t)$, λ_k визначаються із задачі

$$y_k(t) = \lambda_k + \int\limits_a^b P(t)Q(s)y_k(s)ds + z_k(t) +$$

$$+ f(t) + \int\limits_a^b B(t,s)y_{k-1}(s)ds + \varepsilon \int\limits_a^b H(t,s)F(s,y_{k-1}(s))ds,$$

$$\int\limits_a^b S(t)y_k(t)dt = \alpha + \varepsilon \int\limits_a^b E(t,y_{k-1}(t))dt,$$

де $y_0(t)$ – початкове наближення, $k \in \mathbb{N}$.

Встановлено умови збіжності та оцінки похибки даного методу.

Юлія Мисло

Ужгородський національний університет
julia.pah@gmail.com

ПЕРМАНЕНТНІСТЬ ТА ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ В МОДЕЛІ З ВІКОВОЮ СТРУКТУРОЮ, ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Розглядається наступна система

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(t)x_m(t) - \delta(t)x_i(t) - \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\delta(s)ds}x_m(t-h), \qquad (1)$$

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t-h)e^{-\int_{t-h}^{t}\delta(s)ds}x_m(t-h) - \beta(t)x_m(t) - \gamma(t)x_m^2(t), \qquad (2)$$

при $t \neq t_k$ та з імпульсною дією

$$x_m(t_k+0) \;=\; (1+d_k)x_m(t_k),\; m=1,2 \qquad (3)$$

у моменти часу $t_k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Система рівнянь(1)–(3) описує математичну модель еволюції біологічного виду з віковою структурою. Тут $x_i(t)$ – щільність незрілих особин біологічної популяції, $x_m(t)$ – щільність зрілих особин біологічної популяції в момент часу t. Функції $\alpha(t)$ та $\delta(t)$ задають коефіцієнти народжуваності та смертності незрілих особин, вираз $-\beta(t)x_m(t) - \gamma(t)x_m^2(t)$ задає смертність зрілих особин, h – час дозрівання. Вираз $\alpha(t-h)\exp\left(-\int_{t-h}^{t}\delta(s)ds\right)\cdot x_m(t-h)$ визначає число особин, які народилися в момент часу $(t-h)$, вижили і в момент часу t стали дорослими. Формули (3) моделюють короткотривалі зовнішні впливи на біологічну систему.

Встановлено умови перманентності системи (1)–(3). При виконанні додаткових обмежень, отримано умови існування та єдиності T-періодичного розв'язку.

1. Мисло Ю.М., Ткаченко В.І. Про перманентність періодичних систем хижак – жертва з віковою структурою та імпульсною дією // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 4. – С. 527–542.
2. Мисло Ю.М., Ткаченко В.І. Перманентність та періодичні розв'язки в моделях із віковою структурою, запізненням та імпульсною дією // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 4. – С. 546–555.

Анастасия Михайленко, Александр Витюк

Одесский государственный экономический университет
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
8012@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Пусть $P = [0,a] \times [0,b]$, $0 < a,b,\alpha,\beta < \infty$, $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, $\beta = [\beta] + \{\beta\}$, $r = (\alpha;\beta)$, $\theta = (0;0)$. Частный интеграл и частная производная Римана–Лиувилля по переменной x порядка α определяются, соответственно, следующим образом

$$I_{0,x}^{\alpha} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,y)dt,$$

$$D_{0,x}^{\alpha} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{1+[\alpha]} \int\limits_0^x (x-t)^{-\{\alpha\}} f(t,y)dt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера.

Смешанный интеграл и смешанная производная Римана–Лиувилля порядка r функции $f(x,y)$ определяются, соответственно, так:

$$f_r(x,y) \equiv I_\theta^r f(x,y) = I_{0,x}^{\alpha} I_{0,y}^{\beta}, \quad D_\theta^r f(x,y) = D_{0,x}^{\alpha} D_{0,y}^{\beta} f(x,y).$$

Полагаем, что

$$0 < \alpha \le 1,\ 0 < \beta \le 1,\ p = (1+\alpha;1+\beta),\ q = (1-\alpha;1-\beta),$$

$$D_\theta^p f(x,y) = D_{0,x}^{1+\alpha} D_{0,y}^{1+\beta} f(x,y) = D_{xy}^2 u_q(x,y), \quad D_\theta^r f(x,y) = D_{xy} u_q(x,y),$$
$$\left(D_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_{xy}^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\right).$$

Получены условия разрешимости краевой задачи

$$D_\theta^p u(x,y) = F(x,y,u(x,y),D_\theta^r u(x,y)),$$

$$u_q(x,0) = u_q(x,b) = u_q(0,y) = u_q(a,y) = 0,\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b.$$

Зоряна Можировська

Львівська комерційна академія
nzoriana@yandex.ru

ГІПЕРЦИКЛІЧНІСТЬ ОПЕРАТОРА КОМПОЗИЦІЇ НА ТЕНЗОРНОМУ ДОБУТКУ ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРІВ

Нехай E — гільбертів простір. Позначимо через $\otimes_s^n E$ симетричний алгебраїчний тензорний степінь простору E. Нехай $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$ — гільбертів простір аналітичних функцій на просторі E з гільбертовою топологією τ_h, тобто

$$\mathcal{H}_{\eta_E}(E) = \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n : \quad P_n \in \otimes_{s,h}^n E^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Оператор $T : E \to E$ називається гіперциклічним, якщо існує вектор $x \in E$, для якого орбіта $\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ — щільна множина в E. Кожен такий вектор x називається гіперциклічним для оператора T.

Нехай $T : E \to E$ лінійний оператор на гільбертовому просторі E. Введемо оператор композиції $C_T(f) := f \circ T$.

Теорема. *Нехай E — гільбертів простір, E^* — сепарабельний спряжений простір і оператор $T : E \to E$ такий, що $T^* : E^* \to E^*$ задовольняє критерій гіперциклічності [1]. Тоді, якщо оператор композиції*

$$C_T : (\mathcal{H}_{\eta_E}(E), \tau_h) \to (\mathcal{H}_{\eta_E}(E), \tau_h), \quad f \mapsto f \circ T$$

є неперервним на $\mathcal{H}_{\eta_E}(E)$, то він є там гіперциклічним.

1. Martìnez-Gimènez F., Peris A. Universality and chaos for tensor products of operators // Journ. Approx. Theory. – 2003. – **124**. – P. 7–24.

Gianluca Mola

Università degli Studi di Milano
gianluca.mola@unimi.it

IDENTIFICATION OF THE DIFFUSION COEFFICIENT IN LINEAR EVOLUTION EQUATIONS IN HILBERT SPACES

Let H be a real separable Hilbert space and $A : \mathcal{D}(A) \to H$ be a positive and self-adjoint (unbounded) operator. We consider the identification problem consisting in searching of a function $u : [0, T] \to H$ and a positive constant ν that fulfill the initial-value problem

$$u' + \nu A u = 0, \quad t \in (0, T), \quad u(0) = u_0,$$

and the additional condition $\|u(T)\|^2 = \rho$, where $u_0 \in H$ and $\rho > 0$ are given. If the initial datum u_0 fulfills the restriction $\|u_0\|^2 > \rho$, applying a technique developed in a recent paper [1], we construct a unique solution (u, ν) of suitable regularity on the whole interval $[0, T]$, and exhibit an explicit continuous dependence estimate of Lipschitz-type with respect to the data u_0 and ρ. Also, we provide specific applications to second and fourth-order parabolic initial-boundary value problems.

1. A. Lorenzi, G. Mola, Identification of a real constant in linear evolution equations in Hilbert spaces // Inverse Problems and Imaging. – 2011. – submitted.

Володимир Молибога

Інститут математики НАН України
molyboga@imath.kiev.ua

ЛАКУНИ В СПЕКТРІ ОПЕРАТОРІВ ХІЛЛА–ШРЕДІНГЕРА

В гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R})$ розглядаються оператори Хілла–Шредінгера $S(q)$ з дійсними, періодичними потенціалами q:

$$S(q)u = -u'' + q(x)u, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$q(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{q}(k) e^{i\,k2\pi x} \in L^2(\mathbb{T}), \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \text{і} \quad \widehat{q}(k) = \overline{\widehat{q}(-k)}, k \in \mathbb{Z}.$$

$S(q)$ є обмеженими знизу самоспряженими операторами з абсолютно неперервним спектром, який має зонну структуру: спектральні зони чергуються зі спектральними лакунами.

Позначимо через $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ послідовність довжин спектральних лакун операторів $S(q)$. Тоді згідно з результатами Гарнетта та Трубовіца (Comm. Math. Helv. 1984) відображення

$$\gamma : L^2(\mathbb{T},\mathbb{R}) \ni q \mapsto \{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2_+, \;\; l^2_+ = \{\{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in l^2 | a(k) \geq 0\},$$

є сюр'єктивним. Наступна теорема узагальнює цей результат.

Теорема. *Нехай вага* $\omega = \{\omega(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *задовольняє умову*:

$$k^s \ll \omega(k) \ll k^{s+1}, \qquad s \in [0, \infty).$$

Тоді $\quad (i)\ \gamma(H^\omega) = h^\omega_+; \quad (ii)\ \gamma^{-1}(h^\omega_+) = H^\omega.$

Тут $H^\omega \equiv H^\omega(\mathbb{T},\mathbb{R})$, $\omega(0) = 1$, $\omega(-k) = \omega(k)$, $\omega(k) \geq 0$, і

$$H^\omega = \left\{ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\,k2\pi x} \in L^2(\mathbb{T}) \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \omega^2(k) |\widehat{f}(k)|^2 < \infty, \mathrm{Im} f = 0 \right\},$$

$$h^\omega = \left\{ a = \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega^2(k) |a(k)|^2 < \infty \right\},$$

$$h^\omega_+ = \{a = \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} h^\omega \,|a(k) \geq 0\}.$$

Всі результати отримано спільно з проф. В. А. Михайлецем.

1. Mikhailets V.A., Molyboga V.M. Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps. – arXiv: 1003.5000 [math.SP]. – 8 p.

Леся Мочурад, Борис Остудін

Львівський національний університет імені Івана Франка
kom@franko.lviv.ua

ЕФЕКТИВНЕ ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ, ЩО МАЮТЬ АБЕЛЕВУ ГРУПУ СИМЕТРІЇ

Багато конструктивних елементів сучасних електронних приладів, які використовують у різних областях техніки, володіють геометричною симетрією. При цьому математичне моделювання фізичних явищ у таких приладах має певні труднощі, пов'язані зі складністю форми відповідних граничних поверхонь-електродів. Моделювання можна значно спростити, якщо дослідити й урахувати властивість геометричної симетрії останніх шляхом використання апарату теорії груп [1]. Ефективним виявилось використання апарату теорії груп при дослідженні як просторових, так і плоских задач електростатики [2], що дозволило створити передумови для розпаралелення процедури чисельного розв'язування задач в цілому. Так, вибираючи різну кількість процесорів, можна досягти або максимальної ефективності їх завантаження, або ж прискорити швидкість обчислень. При розгляді так званого плоского електростатичного поля основну увагу зосереджено на еквівалентності проблеми певному інтегральному рівнянню та задачі знаходження адитивної сталої, яка присутня в поданні цього поля. Показано, що таку константу легко обчислити за наявності конгруентних складових граничної поверхні.

1. Захаров Е.В., Сафронов С.И., Тарасов Р.П. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1992. – **32**, № 1. – С. 40–58.
2. Мочурад Л.І., Остудін Б.А. Дослідження наближених розв'язків однієї граничної задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку // Праці міжнародного симпозіуму „Проблеми оптимізації обчислень", (24-29 вересня 2009, Кацивелі). – Київ. – 2009. – С. 117–122.

Юрій Музичук

Львівський національний університет імені Івана Франка
yuriy.muzychuk@gmail.com

ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННИХ ТРИКУТНИХ СИСТЕМ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглядаються внутрішні крайові задачі Діріхле, Неймана і Робіна для нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь [1] в області з Ліпшицевою межею. В кожному k-му рівнянні ($k = 0, 1, ...$) диференційний вираз $Pu_k(x) := -\sum_{i,j=1}^{3} a_{ji} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u_k(x) + a_0 u_k(x)$ стосується лише компонент u_k, а функції u_0, u_1, ..., u_{k-1} входять лінійно. Для цих задач наведено варіаційні формулювання і доведено існування та єдиність розв'язку.

Шляхом введення q-згортки (спеціальної операції над нескінченними послідовностями [1]), отримано аналоги першої та другої формул Гріна, а також інтегральне зображення розв'язку нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь. За аналогією до теорії еліптичних рівнянь розв'язок системи подано через суму об'ємного потенціалу та потенціалів простого і подвійного шару.

Запропоноване зображення розв'язку системи дало змогу отримати співвідношення прямого методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) для її чисельного розв'язування. В результаті для кожної з крайових задач отримано еквівалентну послідовність ГІР спеціального вигляду для покрокового знаходження компонент густин відповідних потенціалів. У кожному з випадків усі ГІР мають один і той же оператор лівої частини, а в праву частину входять сліди і нормальні похідні на межі області лише тих компонент розв'язку системи, які знайдені на попередніх кроках.

1. Літинський С., Музичук Ю, Музичук А. Про слабкі розв'язки крайових задач для нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2009. – Вип.15. – С. 52–70.

Mikhailo Narolskyi

National Taras Shevchenko University of Kyiv
jaw4uk@ukr.net

ANALYSIS OF STRESS STATE OF FLEXIBLE ANNULUR PLATE OF VARIABLE THICKNESS IN TWO DIRECTIONS

The elastic plate in geometrically – nonlinear statement, made of material with finite conductivity and in the external magnetic field with given vector intensity $\vec{H}_0$ under normal load $P_\gamma(r,\theta)$ is considered. In addition, a guide plate is evenly distributed outside of the current density $\vec{J}_{CT}$. The middle plane, which belongs to the polar coordinate system r,θ is chosen as the coordinate plane. Coordinate γ is counted along the normal to the middle plane. Plate thickness varies in two directions: $h = h\,(r,\theta)$.

Given that the plate curvature is zero, the overall equations for shells [1,2] we obtain the solvable system of nonlinear differential equations in partial derivatives with variable coefficients [3].

In vector form, the system will look like:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial r} = \vec{F}\left(r,\theta,t,\frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta},\frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial \theta^2},\frac{\partial^3 \vec{N}}{\partial \theta^3},\frac{\partial^4 \vec{N}}{\partial \theta^4},\frac{\partial \vec{N}}{\partial t},\frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2}\right).$$

We are adding to the system of differential equations the initial conditions $\vec{N} = 0$, $\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0$, at $t = 0$ and the boundary conditions $B_1\vec{N}\,(r_0,t) = \vec{b}_1$, $B_2\vec{N}\,(r_N,t) = \vec{b}_2$ for obtaining the land problem of flexible isotropic circular plates of variable stiffness in a magnetic field.

Further solution of the problem is based on the consistent application of Newmark scheme, the direct method, method of quasilinearization and method of discrete orthogonalization.

1. Green A.E., Naghdi P.M. On electromagnetic effects in the theory of shells and plates // Phil. Trans. Ryo. Soc. London. – 1983. – **A 309**. – P. 559–610.
2. Moon F.C. Magneto-solid mechanics. – N.-Y.:Wiley,1984. – 437 p.
3. Molchenko L.V., Dikii P.V. Two-dimensional magnetoelastic solutions for an circular plate // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, № 11. – P. 1328–1334.

Алексей Николаев, Константин Барахов

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
kpbarakhov@mail.ru

ТРЕЩИНА В ВИДЕ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА В УПРУГОМ КРУГОВОМ КОНУСЕ

Рассматривается действие осесимметричной нормальной нагрузки на трещину в форме сферического сегмента, соосно расположенную в упругом конусе. Граница конуса закреплена.

Обобщенный метод Фурье эффективен при решении краевых задач математической физики, в которых продолжения границ до полных канонических поверхностей не пересекаются. В случае пересечения продолжений границ до полных канонических поверхностей обобщенный метод Фурье не работает. Исследовано развитие обобщенного метода Фурье на класс задач для многосвязных областей, в которых продолжения границ до полных канонических поверхностей пересекаются.

Решение задачи о трещине в упругом круговом конусе строится в виде суперпозиции фундаментального решения уравнения Ламе и решения для конуса.

Граничные условия удовлетворяются с использованием теорем сложения для фундаментальных решений, которые преобразуют фундаментальные решения через конические.

Задача сведена к системе интегральных уравнений второго рода с фредгольмовым оператором при условии не пересечения граничных поверхностей.

Приведен численный анализ результатов в зависимости от геометрических параметров системы (радиус сегмента, угол раствора сегмента, угол раствора конуса).

Алексей Николаев, Егор Орлов

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
orlov_em@mail.ru

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С УПРУГИМ СФЕРОИДАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В работе [1] построены общие решения основных краевых задач термоупругости для трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью, в которых частные решения термоупругого уравнения, отвечающие стационарным температурным полям общего вида, имеют нерегулярность на оси симметрии при $z < 0$. Таким образом, этими решениями нельзя пользоваться при исследовании указанных выше задач.

В настоящей работе при помощи обобщенного метода Фурье построено общее решение первой осесимметричной стационарной краевой задачи термоупругости для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальным упругим включением и температурным полем $\mathbf{T}$. Решение в перемещениях ищется в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{2} \left[\int_0^\infty A_j(\lambda) \mathbf{V}_j^-(\rho, z_j, \lambda) d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(j)} \mathbf{U}_{j,n}^+(\xi_j, \eta_j)}{Q_n^{(1)}(q_{j0})} \right] + \tilde{\nabla}_1 \varphi + \tilde{\nabla}_2 \psi,$$

где в правой части сумма по j отвечает за общее однородное решение, а второе и третье слагаемые отвечают за частное неоднородное решение уравнения равновесия. При помощи теорем сложения, которые в данной работе развиты на термоупругую часть, можно выписать решения отдельно в цилиндрических и сфероидальных координатах. Переходя к напряжениям на граничных поверхностях и удовлетворяя граничным условиям, получаем разрешающую систему уравнений относительно неизвестных $a_n^{(j)}$ и $A_j(\lambda)$.

1. Подильчук Ю. Н. Термоупругая деформация трансверсально-изотропного вытянутого сфероида // Прикл. мех. – 1987. – **23**, № 12. – С. 25–34.

Олексій Ніколаєв, Євген Танчік

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
eug.tanchik@yandex.ru

ПЕРІОДИЧНА МОДЕЛЬ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ

Дана робота є продовженням дослідження [1], де на основі розв'язку задачі для ізотропного простору з рядом сфероїдальних включень, що розташовані уздовж осі z, узагальненим методом Фур'є (УМФ) було запропоновано модель композиційного матеріалу, армованого короткими волокнами. Тут ми узагальнюємо задачу на несиметричний випадок, що потребує використання відповідних теорем сумування (ТС). У пружному просторі розглянемо кубічну гратку зі стороною a, у вузлах якої розташовано однакові сфероїдальні включення. Важатимемо, що на нескінченності до пружного простору прикладено одно- або двовісний розтяг. Згідно УМФ шукатимемо загальний розв'язок задачі у вигляді

$$\mathbf{U} = \sum_{g,i,j=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{snm}^{gij} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi,\eta,\varphi)_{gij} + \mathbf{U}_0 \quad \text{у} \quad \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{snm}^{gij} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi,\eta,\varphi)_{gij} \quad \text{у} \quad \Omega_{gij}. \quad (2)$$

Переміщення $\mathbf{U}_0$ відповідає розтягу суцільного простору. Розв'язок задачі зведено до нескінченної СЛАР. Має місце наступна ТС:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi,\eta,\varphi)_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{t=1}^{3} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{snm\alpha\beta\gamma}^{tklgij} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi,\eta,\varphi)_{gij}, \quad (3)$$

де $T_{snm\alpha\beta\gamma}^{tklgij} = \delta_{st} - \delta_{t1}\delta_{s2}\left[q^2\left(2c\dfrac{\partial}{\partial c} - n - k - 1\right) + z_{12}\dfrac{\partial}{\partial z_{12}}\right] f_{1,n,m}^{+(55)k,l}$,

$$f_{1,n,m}^{+(55)k,l} = \sqrt{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{pk}(k+1/2)(c/2)^p}{\Gamma((p-k)/2+1)\Gamma((p+k+3)/2)} \frac{\partial^p}{\partial z_{12}^p} u_{n,m-1}^{+(5)}(\xi,\eta,\varphi).$$

1. Николаев А. Г., Танчик Е. А. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала // Вестник Харьк. нац. ун-та, сер. „Математика, прикладная математика и механика". – 2010. – **922**. – С. 4–19.

Ігор Овчар, Олег Скасків

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
Львівський національний університет імені Івана Франка
iovchar@hotmail.com, matstud@franko.lviv.ua

ЗРОСТАННЯ У СМУГАХ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З НЕМОНОТОННИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Нехай S^∞ клас цілих рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $z \in \mathbb{C}$, показники яких задовольняють умову $\sup\{\lambda_j \colon j \geq 0\} = +\infty$. Для $F \in S^\infty$ та $x < +\infty$ позначимо $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| \colon y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} \colon n \geq 0\}$, а через φ та φ_1 позначаємо, відповідно, обернені функції до функцій $\Phi(x) \stackrel{def}{=} \ln\mu(x,F)$, $\Phi_1(x) \stackrel{def}{=} \Phi(x)/x$. Через L позначимо клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ функцій, а через L_1 його підклас, до якого входять функції $\Phi_1(t)$ такі, що $\int_{x_0}^{x} \frac{\Phi_1(t)}{t} dt = O(\Phi_1(x))$ $(x \to +\infty)$.

Теорема 1 ([1]). *Нехай $v \in L$ така, що $\int_0^{+\infty} v(t)dt < +\infty$, а функція $F \in S^\infty$, така що $\Phi_1 \in L_1$. Якщо $\ln n = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$, то $(\exists\, c_1(t) \nearrow +\infty,\ t \to +\infty)$ така, що $(\forall\, n \geq 0)$ $(\forall\, x > 0, x \notin E, \int_E d\ln t < +\infty)$:* $$|a_n|e^{x\lambda_n} \leq \mu(x,F)\exp\left\{-x\int_{\mu_\nu}^{\mu_n} (\mu_n - t)\frac{c_1(t)}{\varphi(t)} v(4t)dt\right\}.$$
де $\mu_n = -\ln|a_n|$, а $\nu = \nu(x,F) = \max\{n \colon |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x,F)\}$.

Для $0 < a_1 \leq a_2$ і $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ позначимо $S_j = S_j(t_j, a_j) = \{z = x+iy :$ $|y - t_j| \leq a_j, x \in \mathbb{R}\}$, $M(x,F,S_j) = \sup\{|F(x+iy)| : \ |y-t_j| \leq a_j\}$.

За допомогою теореми 1 і відомої леми Турана отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Якщо для функції $F \in S^\infty$ виконуються умови $\Phi_1 \in L_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_n < +\infty$, то співвідношення $\ln M(x,F,S_2) \geq \ln M(x,F,S_1) \geq \ln(M(x,F,S_2) + o(\mu(x,F))) + o(\ln\mu(x,F))$ справджується при $x \to +\infty$ $(x \notin E, \int_E d\ln t < +\infty)$ зовні деякої множини E_2 скінченної логарифмічної міри на $[0,+\infty)$, як тільки $S_1 \subset S_2$.*

У випадку цілих рядів Діріхле з послідовністю показників $\lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \uparrow +\infty)$ подібні теореми раніше отримав О.Б.Скасків.

1. Овчар І., Скасків О. Теорема типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками // Вісник Львів ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С.232–242.

Олександр Остапов, Георгій Шинкаренко

Львівський національний університет імені Івана Франка
Політехніка Опольська, Польща
oleksandr.ostapov@gmail.com, h.shynkarenko@po.opole.pl

АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНЮВАЧІ ПОХИБОК ТА h-АДАПТИВНИЙ МСЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ ЗАДАЧ

На прикладі крайової задачі

$$-\nabla.(\mu\nabla u) + \beta.\nabla u + \sigma u = f \text{ в } \Omega \subset \mathbb{R}^2, u = 0 \text{ на } \Gamma := \partial\Omega, \qquad (1)$$

розглядаються h-адаптивні схеми [1], які здатні на тріангуляціях $T_h = \{K\}$ області Ω генерувати апроксимації МСЕ з гарантованою точністю. Апостеріорний оцінювач похибки (АОП) e_h апроксимації $u_h \in V_h \subset V := H_0^1(\Omega)$ знаходиться із задачі

$$\begin{cases} \textit{задано базис } \{\phi_K\}_{K\in T_h} \textit{ простору } E_h := V \backslash V_h; \\ \textit{знайти } e_h(x) = \sum\limits_{K\in T_h} \lambda_K \phi_K(x) \textit{ такий, що} \\ \displaystyle\int_\Omega (\mu\nabla e_h.\nabla w + w\beta.\nabla e_h + \sigma e_h w)dx = \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega (fw - \mu\nabla u_h.\nabla w - w\beta.\nabla u_h - \sigma u_h w)dx \qquad \forall w \in E_h. \end{cases} \qquad (2)$$

Якщо базисні функції ϕ_K такі, що supp $\phi_K = K$, то

$$\lambda_K = \frac{\int_K (f\phi_K - \mu\nabla u_h.\nabla\phi_K - \phi_K\beta.\nabla u_h - \sigma u_h\phi_K)dx}{\int_K (\mu|\nabla\phi_K|^2 + \phi_K\beta.\nabla\phi_K + \sigma\phi_K^2)dx} \quad \forall K \in T_h. \quad (3)$$

Аналізуються випадки побудови АОП для кусково поліноміальних апроксимацій $u_h|_K \in P_m(K), m = 1, 2, 3$, і результати обчислювальних експериментів з h-адаптуванням тріангуляції, коли умовою зупинки є досягнення рівномірного розподілу похибки заданого рівня.

Особливу увагу приділено задачам з $\beta = 0$ та $\sigma < 0$.

1. Ainsworth M. and Oden J.T. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. – Wiley, 2000.

Оксана Паздрій

Національний університет „Львівська політехніка“
oksana.pazdriy@gmail.com

ТОЧНА ТРИТОЧКОВА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ПІВОСІ

В [1] побудована точна триточкова різницева схема (ТТРС) з точною нелінійною крайовою умовою на правому кінці для задачі

$$\frac{d^2u}{dx^2} - m^2 u = -f(x,u), \quad x \in (0,\infty), \ \ u(0) = \mu_1, \ \ \lim_{x\to\infty} u(x) = 0.$$

У цій роботі розглядається узагальнення скалярного випадку — крайова задача для системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} - \mathcal{A}\mathbf{u} = -\mathbf{f}(x,\mathbf{u}), \quad x \in (0,\infty),$$

$$\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\mu}_1, \ \ \lim_{x\to\infty} \mathbf{u}(x) = 0, \ \ \mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}_1 \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathcal{A} = [\boldsymbol{a}_{i,s}]_{i,s=1}^n .$$

Для чисельного розв'язування задачі на скінченній нерівномірній сітці $\hat{\bar{\omega}}_N = \{x_j \in [0,\infty), \ j = 0,1,...,N, \ x_0 = 0, \ h_j = x_j - x_{j-1} > 0, \ h_1 + \ldots + h_N = x_N\}$ побудовано та обґрунтовано ТТРС з точною нелінійною крайовою умовою на правому граничному кінці сітки x_N

$$\hbar_j^{-1}(B_{j+1}\mathbf{u}_{x,j} - A_j \mathbf{u}_{\bar{x},j}) = -\hat{T}^{x_j}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))), \ \ j = 1,\ldots,N-1,$$

$$\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\mu}_1, \quad -A_N \mathbf{u}_{\bar{x},N} = \mathcal{A}\mathbf{u}_N - \hat{\bar{T}}^{x_N}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))),$$

$$A(x_j) = h_j \mathcal{A}\left(e^{\mathcal{A}h_j} - I\right)^{-1}, \ B(x_j) = h_j \mathcal{A}\left(I - e^{-\mathcal{A}h_j}\right)^{-1}, \ \ j = 1,\ldots,N,$$

$$\hat{T}^{x_j}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))) = \hbar_j^{-1}\left(e^{\mathcal{A}h_j} - I\right)^{-1}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left(e^{\mathcal{A}(\xi - x_{j-1})} - I\right)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi +$$

$$+\,\hbar_j^{-1}\left(I - e^{-\mathcal{A}h_{j+1}}\right)^{-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(I - e^{\mathcal{A}(\xi - x_{j+1})}\right)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi, \ j=1,\ldots,N-1,$$

$$\hat{T}^{x_N}(\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))) = \left(e^{\mathcal{A}h_N} - I\right)^{-1}\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}\left(e^{\mathcal{A}(\xi - x_{N-1})} - I\right)\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi + \int\limits_{x_N}^{\infty}\mathbf{f}(\xi,\mathbf{u}(\xi))d\xi.$$

1. Кутнів М.В., Паздрій О.І. Точна триточкова різницева схема для нелінійної крайової задачі на півосі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 75-86.

Oksana Panat, Oleh Buhrii, Mykola Bokalo, Rabil Mashiyev

Ivan Franko National University, Lviv
Dicle University, Diyarbakir, Turkey
panat_ot@i.ua, ol_buhrii@i.ua,
mm.bokalo@gmail.com, mrabil@dicle.edu.tr

MIXED PROBLEM FOR KIRCHHOFF TYPE EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with the boundary $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, where $T > 0$. Let $q \in L^\infty(\Omega)$ satisfies the estimate $1 < q_0 \leq q(x) \leq q^0 < +\infty$ for a. e. $x \in \Omega$. We denote by $L^{q(x)}(Q_T)$ the class of measurable functions $v : Q_T \to \mathbb{R}^1$ such that $\int\limits_{Q_T} |v|^{q(x)} dxdt < +\infty$. It is proved [1] that $L^{q(x)}(Q_T)$ is a Banach space with the norm

$$||v; L^{q(x)}(Q_T)|| = \inf\left\{\lambda > 0 \ \ : \ \int\limits_{Q_T} |v(x,t)/\lambda|^{q(x)}\, dxdt \leq 1\right\}.$$

Consider the following problem in the domain Q_T :

$$u_{tt} - M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u(y,t)|^2\, dy\right)\Delta u - \Delta u_t + h|u_t|^{q(x)-2}u_t = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{3}$$

where $M \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $h \in L^\infty(Q_T)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q_T)$, $M(\xi) \geq m_0 > 0$ for every $\xi \in \mathbb{R}_+$,

$$h(x,t) \geq h_0 > 0 \ \text{ for a. e. } \ (x,t) \in Q_T,$$

By *generalized solution* of the problem (1)-(3) we define the function $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_T)$ that satisfies (1) in a sense of distribution and (3) in a sense of the space $L^2(\Omega)$.

When other conditions are held, we have established the conditions of unique solvability of the problem (1)-(3).

1. Kováčik O., Rákosnik J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – **41**. – P. 592–618.

Галина Пасічник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
pasichnyk@mail.ru

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ГРУПИ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ

Нехай m, n – задані натуральні числа такі, що $m \leq n$; $N := m+n$; $X := (x, y)$, якщо $x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $y := (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$. Розглядаються рівняння вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \beta\sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_j} - \sum_{j=1}^{m} x_j\partial_{y_j}\right)u(t, X) = 0,$$

$$t > 0, \quad X \in \mathbb{R}^N, \quad \text{і} \tag{1}$$

$$\left(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \beta\sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_j}\right)u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де a_{jl} і β – дійсні сталі, причому $a_{jl} = a_{lj}$, $\{j, l\} \subset \{1, ..., n\}$, і виконується умова параболічності $\exists\,\delta > 0\ \forall\,\xi \in \mathbb{R}^n :\ \sum\limits_{j,l=1}^{n} a_{jl}\xi_j\xi_l \geq \delta|\xi|^2$. Ці рівняння є рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова відповідно невиродженого нормального та виродженого дифузійного процесів.

У доповіді робиться огляд результатів, які стосуються побудови, вивчення властивостей і деяких застосувань фундаментальних розв'язків задачі Коші для рівнянь (1) і (2). Ці результати отримані спільно з С.Д. Івасишеним та опубліковані в [1, 2].

1. Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Задача Коші для рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 15–22.
2. Бабич О.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2011. – **1**, № 1–2. – С. 13–24.

Богдан Пахолок

Національний університет „Львівська політехніка“
BogdanBP@net.ua

ПРО СТІЙКІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МІРАМИ

Нехай $I = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$; $C^k(I)$ – простір k разів неперервно диференційованих та $AC(I)$ – простір абсолютно неперервних на I функцій; $BV^+_{loc}(I)$ – простір неперервних справа функцій локально обмеженої на I варіації; функція $f(t)$ є на I функцією локально обмеженої варіації, якщо $f(t)$ має обмежену варіацію на кожному компакті $[t_0, T] \subset I$ і повні варіації $\overset{T}{\underset{t_0}{V}} f(t)$ обмежені в сукупності, тобто $\overset{\infty}{\underset{t_0}{V}} f(t) = \sup\limits_{T \geq t_0} \overset{T}{\underset{t_0}{V}} f(t)$; $R^{n\times m}$ – простір $(n \times m)$ матриць-функцій $A(t)$; $L_2(I)$ – простір сумовних з квадратом на I функцій; D' – простір розподілів Л.Шварца.

Розглянемо в просторі D' задачу

$$X'(t) = A'(t)X(t) + F'(t), \;\; X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

де $X(t)$, $A(t)$, $F(t) \in R^{n\times n}$; $A(t), F(t) \in BV^+_{loc}(I)$.

Розв'язком рівняння (1) називається функція $X(t) \in BV^+_{loc}(I)$, яка задовольняє його в сенсі теорії розподілів.

Рівняння (1) охоплює частинні випадки: 1) якщо в (1) $A(t), F(t) \in C^1(I)$, то розв'язок $X(t) \in C^1(I)$, рівняння (1) задовольняється в кожній точці $t \in I$; 2) якщо в (1) $A(t), F(t) \in AC(I)$, то розв'язок $X(t) \in AC(I)$, рівняння (1) задовольняється майже скрізь на I; 3) якщо в (1) $A(t), F(t) \in BV^+_{loc}(I)$, то розв'язок $X(t) \in BV^+_{loc}(I)$, рівняння (1) задовольняється в сенсі простору D'.

Незважаючи на свою універсальність, стійкість за Ляпуновим не є актуальною для лінійних рівнянь з мірами через те, що розв'язки рівняння (1) є функціями обмеженої варіації, а отже, є обмеженими. Повідомляються результати стосовно інших понять стійкості: експоненційної та варіаційної стійкості, стійкості за постійно діючих збурень. Розглядається також нелінійне рівняння з мірами.

Олексій Пацюк

Інститут математики НАН України
patsuk86@inbox.ru

ПРО ОДНОВИМІРНІ ОПЕРАТОРИ ШРЕДІНГЕРА З $\mathcal{PT}$-СИМЕТРИЧНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ

Значна увага приділяється розгляду квантовомеханічних систем, які описуються за допомогою $\mathcal{PT}$-симетричних операторів [1–3].

Ми розглядаємо диференціальний вираз $-\frac{d^2}{dx^2}+V$, де потенціал $V=a\langle\delta,\cdot\rangle\delta(x)+b\langle\delta',\cdot\rangle\delta(x)+c\langle\delta,\cdot\rangle\delta'(x)+d\langle\delta',\cdot\rangle\delta'(x), a,b,c,d\in\mathbb{C}$. Ми можемо визначити операторні реалізації $A_{\mathbf{T}}$ цього виразу в просторі $L_2(\mathbb{R})$, які є розширеннями деякого симетричного оператора S.

Ми проводимо опис $\mathcal{PT}$-симетричних розширень $A_{\mathbf{T}}$ за допомогою J_α-самоспряжених. Оператор A називається $\mathcal{PT}$-симетричним, якщо $\mathcal{PT}A=A\mathcal{PT}$, де $\mathcal{P}f(x)=f(-x), \mathcal{T}f(x)=\overline{f(x)}$; J_α-самоспряженим, якщо $J_\alpha A^*=AJ_\alpha$, де J_α — нетривіальна фундаментальна симетрія в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ (тобто $J_\alpha=J_\alpha^*, J_\alpha^2=I$ і $J_\alpha\neq\pm I$).

Якщо в $\mathfrak{H}$ знайдуться такі фундаментальні симетрії J і R, що $JR=-RJ$, то існує алгебра Кліфорда $\mathcal{C}l_2(J,R):=\operatorname{span}\{I,J,R,iJR\}$ і $J_\alpha=\alpha_1J+\alpha_2R+\alpha_3iJR$, де $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}, \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$ [4]. Ми розглядаємо алгебру Кліфорда $\mathcal{C}l_2(\mathcal{P},\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}f(x)=\operatorname{sign}(x)f(x)$.

Ми показуємо, що область $\mathcal{PT}$-симетрії можна описати за допомогою однопараметричної сім'ї J_α-самоспряжених розширень, і проводимо спектральний аналіз J_α-самоспряжених розширень.

1. Albeverio S., Fei S.-M., Kurasov P. Point interactions: $\mathcal{PT}$-Hermiticity and reality of the spectrum // Lett. in Math. Phys. – 2002. – **59**. - P. 227–242.
2. Albeverio S., Kuzhel S. One-dimensional Schrödinger operators with $\mathcal{P}$-symmetric zero-range potentials // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2005. – **38**. – P. 4975–4988.
3. Günther U., Kuzhel S. $\mathcal{PT}$-symmetry, Cartan decompositions, Lie triple systems and Krein space related Clifford algebras // J. Phys. A: Math. and Theor. – 2010. – **43**. – P. 392002–392011.
4. Kuzhel S., Trunk C. On a class of J-self-adjoint-operators with empty resolvent set // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – **379**. – P. 272–289.

Ярослав Пелех, Петро Сохан

Національний університет „Львівська політехніка“
Pelekh_Ya_M@ukr.net

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо на відрізку $I_L : [x_0, x_0 + L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\Big[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g\left[x, s, u(s)ds\right]\Big], \tag{1}$$

$$u(x_0) = u_0,\ x \in [x_0, x_0 + L]. \tag{2}$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю. На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів та теорію побудови методів Рунге-Кутта, наближений розв'язок задачі (1)-(2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді неперервного дробу

$$u_1^{[k,l]} = \frac{c_0}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1+\frac{d_{k,1}}{1+\ddots+d_{k,l}}}}. \tag{3}$$

Наведемо, як приклад, вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k + l = 2$ ($k = 1, 2;\ l = 0, 1$)

$$c_0 = u_0, d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0}, d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0}, d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2}, \tag{4}$$

$$\delta_i = h\left(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2\right), i = 1, 2; k_1 = F\left[x_0 + \alpha_1 h, u_0, 0\right],$$

$$k_2 = F\left[x_0{+}\alpha_2 h, u_0{+}\beta_{21}hk_1, \gamma_{21}K_1\right], K_1 = hg\left[x_0{+}\alpha h, x_0{+}\beta h, u_0{+}\gamma hk_1\right].$$

Знайдено значення параметрів a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, α, α_1, α_2, β, β_{21}, γ, γ_{21} – при яких має місце оцінка

$$\left|u(x_1) - u_1^{[k,l]}\right| = O\left(h^p\right), p = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Для знаходження наближень у наступних точках $x_n (n \geq 2)$ використовуємо спосіб рухомого початку та формули (3),(4).

Роман Пелещак, Микола Дорошенко, Ігор Бачинський,
Юрій Галь, Галина Коваль

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
informatyka@drohobych.net

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ПУАССОНА–ФЕРМІ–ДІРАКА

Розглядаємо крайову задачу для нелінійного рівняння Пуассона-Фермі-Дірака для випадку аксіальної та сферичної симетрій

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{L}{z}\frac{d\psi}{dz} = 1 - \frac{\delta}{e^{\psi+\psi_0}+1}, \tag{1}$$

$$\psi(z)|_{z=a} = \psi_0, \quad -\left.\frac{d\psi(z)}{dz}\right|_{z=a} = E_0, \tag{2}$$

де $L = 1, 2$ – відповідно для аксіальної та сферичної симетрій; $z \in [0, \infty)$, $0 < \delta \leq 1$.

Розв'язок нелінійного рівняння Пуассона-Фермі-Дірака (1) знаходимо у вигляді логарифма степеневого ряду $\psi = Z \ln \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) - \psi_0$, де Z – деяке ціле число, відмінне від нуля.

Доведено, що розв'язок нелінійного рівняння Пуассона-Фермі-Дірака (1) з крайовими умовами (2) можна зобразити у вигляді

$$\psi(z) = Z \ln \left(b_0 + b_1 \left(1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{p}} \right) + b_2 \left(1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{p}} \right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + b_n \left(1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{p}} \right)^n + \ldots \right) - \psi_0,$$

де p – додатне ціле або напівціле число. Знайдено радіус збіжності цього ряду:

$$\left(1 - \frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^p < \frac{z}{a} < \left(1 + \frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^p.$$

Роман Пелещак, Микола Дорошенко,
Леся Берегуляк, Любов Лазурчак

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
informatyka@drohobych.net

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ПУАССОНА З НЕОДНОРІДНІСТЮ У ВИГЛЯДІ РЯДУ З УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Розв'язок даної задачі є актуальним для моделювання сучасних нанооптоелектронних приладів. У роботі розглядається двовимірне рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2}=-1+p\delta(x-1)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(y-nh) \qquad (1)$$

з такими умовами Діріхле:

$$\varphi(0,y)=\varphi_1, \quad \varphi(L_x,y)=0$$
$$\varphi(x,0)=\varphi_1-ax^2, \quad \varphi(x,L_y)=\varphi_1-ax^2$$

де $0\le x\le L_x,\ 0\le y\le L_y,\ p>0,\ h$ – крок між δ - піками на осі Y.

Згідно з формулою Пуассона ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(y-nh)$ набуде вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(y-nh\right)=\frac{1}{|h|}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2\pi k\frac{y}{h}\right). \qquad (2)$$

Розв'язок рівняння (1) із врахуванням (2) та (3) знаходився методом сіток. Для апроксимації оператора Лапласа застосовувалась п'ятиточкова різнецева схема, а для знаходження потенціалу у вузлах сітки – ітераційний метод послідовної релаксації.

Ітераційний метод послідовної релаксації реалізований в прикладній системі Matlab.

Роман Пелещак, Микола Дорошенко,
Людмила Остапчук, Олена Стара

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
informatyka@drohobych.net

ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ ОПЕРАТОРА ШРЕДІНГЕРА З САМОУЗГОДЖЕНИМ ЕЛЕКТРОН-ДЕФОРМАЦІЙНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ НАНОГЕТЕРОСИСТЕМИ З КВАНТОВОЮ ТОЧКОЮ

У даній роботі розв'язується рівняння Шредінгера з самоузгодженим електрон-деформаційним потенціалом у напруженій наногетеросистемі з квантовими точками методом стрільби

$$\hat{H}_r^{(i)} U_i(r) = \lambda U_i(r), \quad i = 1, 2, \quad 0 \le r \le R_0, \quad R_0 \le r \le R_1 \tag{1}$$

відповідно з такими крайовими умовами

$$\begin{gathered} U_{n_r l}^{(1)}(0) = 0, \quad U_{n_r l}^{(2)}(R_1) = 0, \quad U_{n_r l}^{(1)}(R_0) = U_{n_r l}^{(2)}(R_0), \\ \frac{1}{m_1^*} \left. \frac{dU^{(1)}}{dr} \right|_{r=R_0} = \frac{1}{m_2^*} \left. \frac{dU^{(2)}}{dr} \right|_{r=R_0} \end{gathered} \tag{2}$$

та умовою нормування

$$\int\limits_0^{R_0} \left| U^{(1)} \right|^2 dr + \int\limits_{R_0}^{R_1} \left| U^{(2)} \right|^2 dr = 1, \tag{3}$$

де

$$\hat{H}_r = -\frac{\hbar^2}{2m_i^*} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + V_i(r), \tag{4}$$

$$V_i(r) = \begin{cases} V_{01} - e\varphi_1(r), & i = 1, \\ V_{02} - e\varphi_2(r), & i = 2, \end{cases} \tag{5}$$

$\varphi_i(r)$ – розв'язки рівняння Пуассона для наногетеросистеми з квантовою точкою

$$\frac{d^2\varphi_i}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi_i}{dr} = \frac{e}{\varepsilon^i \varepsilon_0} \triangle n_i(r), \tag{6}$$

де $\triangle n_i(r)$ – розподіл електронної густини в наногетеросистемі з квантовою точкою.

Володимир Пелих, Юрій Тайстра

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
pelykh@lms.lviv.ua

СПІНОРНИЙ ПІДХІД ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО РОЗЩЕПЛЕННЯ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА У РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

З переходом від плоского до викривленого простору система рівнянь Максвелла для вектор-потенціалу A^a

$$\nabla_b(\nabla^b A^a) - R^a_c A^c = 0,$$

де R^a_c — тензор Річчі, стає сильно зв'язаною. Запропоновані до цього часу методи отримання її розв'язків застосовні лише в окремих алгебрично-спеціальних просторах.

Ми вивчаємо можливість послідовного розщеплення цієї системи у просторах інших типів шляхом подання системи рівнянь для вектор-потенціалу в ізотропній тетраді Ньюмена-Пенроуза у спінорному формалізмі другого порядку.

Систему рівнянь отримано у вигляді

$$D\Delta A \begin{pmatrix} D\Delta A_0 \\ D\Delta A_1 \\ D\Delta A_2 \\ D\Delta A_3 \end{pmatrix} + \delta\bar{\delta} A \begin{pmatrix} \delta\bar{\delta} A_0 \\ \delta\bar{\delta} A_1 \\ \delta\bar{\delta} A_2 \\ \delta\bar{\delta} A_3 \end{pmatrix} + DA \begin{pmatrix} DA_0 \\ DA_1 \\ DA_2 \\ DA_3 \end{pmatrix} + \Delta A \begin{pmatrix} \Delta A_0 \\ \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \\ \Delta A_3 \end{pmatrix} +$$

$$+\delta A \begin{pmatrix} \delta A_0 \\ \delta A_1 \\ \delta A_2 \\ \delta A_3 \end{pmatrix} + \bar{\delta} A \begin{pmatrix} \bar{\delta} A_0 \\ \bar{\delta} A_1 \\ \bar{\delta} A_2 \\ \bar{\delta} A_3 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $D\Delta A$, $\delta\bar{\delta}A$, DA, ΔA, δA, $\bar{\delta}A$, A — матриці коефіцієнтів при відповідних похідних.

Отримано умови її послідовного розщеплення. Частина їх може бути виконана за рахунок унімодулярних перетворень спінорної бази, частина обмежує геометрію простору, але не зводиться до умов виділення плоского простору чи простору типу $\mathcal{D}$.

Ольга Пелюшкевич

Львівський національний університет імені Івана Франка
olpelushkevych@ukr.net

ЗАДАЧА З ГОРИЗОНТАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В криволінійному секторі $V_T = \{\ (x,t)\ \in \mathbb{R}^2:\ 0 \le t \le T, \quad a_1(t) < x < a_2(t),\ \ a_1(0) = a_2(0) = 0\}$ розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u,v),\ i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{1}$$
$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v), j \in \{1,\ldots,n\},\ u = (u_1,...,u_m),\ v = (v_1,...,v_n).$$

Визначимо множини індексів: $I_1 = \{i \in \{1,...,m\} : \lambda_i(0,0) < a_1'(0)\},\ I_2 = \{i \in \{1,...,m\} : \lambda_i(0,0) > a_2'(0)\}, I_3 = \{i \in \{1,...,m\} : a_1'(0) < \lambda_i(0,0) < a_2'(0)\}$.

Тоді початкові та крайові умови при $0 \le t \le T$ задамо так:

$$u_i(0,0) = u^0, i \in \{1,\ldots,m\},\ v_j(0,0) = v^0,\ j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{2}$$
$$u_i(a_k(t),t) = h_i^k\big(t, \big(u_s(a_1(t),t)\big)_{s\in I_k}\big), \quad i \in I_{3-k} \cup I_3,\ k \in \{1,2\},$$
$$v_j(a_1(t),t) = \psi_i\big(t, \big(u_s(a_1(t),t)\big)_{s\in I_1}\big), \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{3}$$

Припустимо, що виконуються умови погодження в точці $(0,0)$, а функції $f_i,\ q_j,\ h_i^1,\ h_i^2,\ \psi_j$ – неперервні за всіма аргументами і задовольняють глобальну умову Ліпшиця за змінними u і v, функції $\lambda_i(x,t)$ – задовольняють умову Ліпшиця за x.

За допомогою методів характеристик і стискуючих відображень встановлено існування і єдиність глобального узагальненого неперервного розв'язку мішаної задачі (1)-(3). Глобальна коректна розв'язність задачі одержана завдяки вибору спеціальних норм з вагою для шуканих функцій у відповідному банаховому просторі. При доведенні основної теореми використано підхід запропонований у роботі [1].

1. Мауленов О., Мышкис А. Д. О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке // Изв. АН КазССР. Сер. физ.- мат. – 1981. – №5. – С. 25–29.

Галина Перун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Нехай (Ω, F, P) – імовірнісний простір з неспадним потоком σ-алгебр F_t, $t \in [0, T]$, а саме $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ при $t_1 < t_2$. Випадкова функція $u(t, x, \omega)$ визначена в $\Pi_T \times \Omega = [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega$. Вона є F_t-узгодженою, якщо при фіксованих (t, x) випадкова величина $u(t, x, \omega)$ є F_t-вимірною при всіх $(t, x) \in \Pi_T$. З імовірністю 1 є розв'язком задачі Коші для псевдодиференціального стохастичного рівняння

$$d_t u = F^{-1}_{\sigma \to x}(a(\sigma)v) + F^{-1}_{\sigma \to x}(b(\sigma)v)dw(t, \omega), \tag{1}$$

$$u(0, x, \omega) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega. \tag{2}$$

Тут $a(\sigma) - \frac{1}{2}b^2(\sigma) \equiv A(\sigma)$ визначена на $\mathbb{R}$ парна функція, яка є однорідною за аргументом σ з показником $\gamma > 1$, тобто $A(\lambda\sigma) = \lambda^\gamma A(\sigma)$, $\lambda > 0$, при $\sigma \neq 0$ диференційовна за σ, причому $D^k_\sigma A(\sigma) \leq -C_k|\sigma|^{\gamma-k}$, $k = 0, 1, ...$; $w(t, \omega)$ стандартний скалярний вінерівський процес, $\varphi(x)$ імовірністю 1 допускає перетворення Фур'є.

До задачі (1), (2) застосовуємо перетворення Фур'є. В результаті отримаємо задачу Коші для стохастичного псевдодиферецiального рівняння, розв'язок якої виписується за формулою

$$v(t, \sigma, \omega) = \tilde{\varphi}(\sigma) exp\{A(\sigma)t + b(\sigma)w(t)\}. \tag{3}$$

Встановлюється існування функції Гріна задачі Коші, яка допускає оцінку $M|D^k G(t, x)| \leq c_k \; t\big((t^{\frac{1}{[\gamma]+1}} + |x|)^{2+[\gamma]+k}\big)^{-1}$, тут M – операція математичного сподівання.

За допомогою функції Гріна отримується зображення розв'язку задачі (1), (2).

1. Дрінь Р.Я., Ейдельман С.Д. Єдиність розв'яку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком // Матеріали Міжнародної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 78-88.

Василь Петричкович, Наталія Джалюк

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
vas_petrych@yahoo.com, nataliya.dzhalyuk@gmail.com

МАТРИЧНІ ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

Нехай R – комутативна область головних ідеалів. Розглядається матричне діофантове рівнянння

$$AX + BY = C, \tag{1}$$

де A, B, C – відомі, X, Y – невідомі $n \times n$-матриці над R.

Відомо [1], що пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари (D^A, T^B), тобто $D^A = UAV_A = \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$– канонічна діагональна форма матриці A, де $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, і $T^B = UBV_B = \mathrm{triang}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$– нижня трикутна матриця з головною діагоналлю $D^B = \Psi = \mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, де U, V_A, $V_B \in GL(n, R)$. Тоді з рівняння (1) отримуємо таке матричне рівняння:

$$D^A \widetilde{X} + T^B \widetilde{Y} = \widetilde{C}, \tag{2}$$

де $\widetilde{X} = V_A^{-1} X$, $\widetilde{Y} = V_B^{-1} Y$, $\widetilde{C} = UC$.

Теорема. *Рівняння* (2) *має єдиний розв'язок* $\widetilde{X}_0 = \|\widetilde{x}_{ij}^{(0)}\|_1^n$, $\widetilde{Y}_0 = \|\widetilde{y}_{ij}^{(0)}\|_1^n$ *такий, що* $\widetilde{x}_{ij}^{(0)} \in R_{\psi_i}$, $i=1, \ldots, n$, *де* R_{ψ_i}– *повна множина лишків за модулем* ψ_i, *тоді і тільки тоді, коли* $(\det \Phi, \det \Psi) = 1$.

Розв'язок $\widetilde{X}_0$, $\widetilde{Y}_0$ рівняння (2) будується за розв'язками відповідних конгруенцій та записується загальний розв'язок $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ цього рівняння. Тоді загальним розв'язком рівняння (1) є $X = V_A \widetilde{X}$, $Y = V_B \widetilde{Y}$.

Зауважимо, що критерій однозначності розв'язку матричного різнобічного діофантового рівняння $AX+YB=C$ над областю головних ідеалів встановлено в [2]. Відомі також результати про однозначність розв'язків таких матричних рівнянь над кільцями поліномів.

1. Petrychkovych V. Generalized eguivalence of pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, N 2. – P. 179–188.
2. Джалюк Н.С. Однозначність клітково-трикутних факторизацій матриць над кільцями головних ідеалів // Доп. НАН України. – № 1. – 2010. – С. 7–12.

Роман Петришин

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
r.petryshyn@chnu.edu.ua

УСЕРЕДНЕННЯ ОДНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНОЇ СИСТЕМИ З НЕФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

Нехай задана багаточастотна система з нефіксованими моментами $t_j = \theta_j(x)$ імпульсної дії вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\, \varphi,\, \tau), \;\; \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\, \varphi,\, \tau), \;\; \tau \neq \varepsilon\theta_j(x),$$

$$\Delta x\big|_{\tau=\varepsilon\theta_j(x)} = \varepsilon f(x,\, \varphi), \;\; \Delta\varphi\big|_{\tau=\varepsilon\theta_j(x)} = \varepsilon g(x,\, \varphi), \tag{1}$$

в якій ε – малий додатний параметр, $\tau = \varepsilon t \in [0,\, L]$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\theta_j(x) < \theta_{j+1}(x)$, дійсні функції $a,\, b,\, \omega,\, f,\, g,\, \theta_j$ належить певним класам гладких і майже періодичних за кожною координатою вектора φ функцій. Задамо для (1) крайову умову

$$F\left(x\big|_{\tau=\tau^{(1)}},\, \ldots,\, x\big|_{\tau=\tau^{(r)}}\right) = 0, \;\; \varphi\big|_{\tau=0} = \varphi^0, \tag{2}$$

де F – n-вимірна вектор-функція, φ^0 – сталий вектор.

В даному повідомленні для розв'язання задачі (1), (2) використано метод усереднення за всіма швидкими зміннии φ. Важливо, що на відміну від системи (1) з імпульсною дією усереднена система будується гладкою і не підлягає імпульсному збуренню. При цьому істотними є нерівності

$$\frac{\partial\theta_j(x)}{\partial x} f(x,\, \varphi) \leq \alpha = const < 0, \;\; x \in D,\, \varphi \in \mathbb{R}^m,\, j \geq 1,$$

$$\det\left(\frac{d^l\omega_\nu(\tau)}{d\tau^l}\right)_{\nu,\, l=1}^m \neq 0, \;\; \tau \in [0,\, L],\, \omega = (\omega_1, \ldots,\, \omega_m),$$

які виключають биття розв'язку об поверхню $t = \theta_j(x)$ і забезпечують швидке проходження системи (1) через резонансні зони.

1. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наук. думка, 2004. – 474 с.

Лариса Піддубна, Ігор Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
i.cherevko@chnu.edu.ua

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Розглядається початкова задача для системи диференціально-різницевих рівнянь

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_p), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_p)), \quad (1)$$

$$y'(t) = g(t, x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_p), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_p)), t \in [0, T],$$

$$x(t) = \varphi_1(t), \quad y(t) = \varphi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де $0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau$; f, g – неперервні функції при $t \in [0, T]$; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – задані неперервні функції при $t \in [-\tau, 0]$.

Визначимо функції $z_j(t)$, $j = \overline{0, m}$, $w_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} z_0'(t) = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \dots, z_{l_p}(t), w_{l_1}(t), \dots, w_{l_p}(t)), \\ z_j'(t) = \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \\ w_1'(t) = \mu[g(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \dots, z_{l_p}(t), w_{l_1}(t), \dots, w_{l_p}(t)) - w_1(t)], \\ w_j'(t) = \mu(w_{j-1}(t) - w_j(t)), \quad j = \overline{2, m}, \end{gathered} \quad (3)$$

$$z_j(0) = \varphi_1\Big(-\frac{j\tau}{m}\Big), \quad j = \overline{0, m}, \quad w_j(0) = \varphi_2\Big(-\frac{j\tau}{m}\Big), \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\mu = \dfrac{m}{\tau}$, $l_j = \Big[\dfrac{\tau_j m}{\tau}\Big]$.

Встановлено умови, при виконанні яких розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (3)–(4) апроксимують розв'язки початкової задачі (1)–(2) і для всіх $t \in [0, T]$ справджуються співвідношення

$$\Big|x\Big(t - \frac{\tau_j}{m}\Big) - z_j(t)\Big| \to 0, \quad \Big|y\Big(t - \frac{\tau_j}{m}\Big) - w_j(t)\Big| \to 0, \quad m \to \infty.$$

1. Піддубна Л.А., Черевко І.М. Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, №1. – С. 42–50.

Роман Пляцко, Микола Феник, Олександр Стефанишин

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
plyatsko@lms.lviv.ua

ТОЧНІ РІВНЯННЯ МАТІСОНА-ПАПАПЕТРУ В МЕТРИЦІ КЕРРА

Поведінка класичної (неквантової) частинки зі спіном у гравітаційному полі в рамках загальної теорії відносності описується диференціальними рівняннями Матісона-Папапетру (МП) із відповідною доповняльною умовою. За умови $S^{\lambda\nu}u_\nu = 0$ ($S^{\lambda\nu}$ – тензор спіну, u_ν – 4-швидкість частинки) ця система містить треті похідні від координат за власним часом частинки. У випадку аксіально-симетричної метрики Керра, яка описує гравітаційне поле чорних дір, завдяки існуванню векторів Кілінґа рівняння МП мають два інтеграли руху – енергії та кутового моменту. Метою нашого дослідження є застосування цих інтегралів для отримання нового зображення рівнянь МП, яке міститиме похідні від координат порядку не вище другого, з подальшим їх комп'ютерним інтегруванням. Виявляється, що для отримання такого зображення необхідно врахувати ще одне диференціальне співвідношення, яке випливає з вихідних рівнянь МП і має вигляд

$$mS_i\frac{Du^i}{ds} = -\frac{1}{2}u^\pi S^{\rho\sigma}S_j R^j{}_{\pi\rho\sigma}, \tag{1}$$

де m – маса частинки, S_i – 3-вектор спіну, D/ds – коваріантна похідна, $R^j{}_{\pi\rho\sigma}$ – ріманів тензор кривини.

Інтегрування точної системи рівнянь МП без обмежень на швидкість частинки відносно джерела гравітаційного поля та на величину й орієнтацію спіну дало змогу узагальнити висновки щодо проявів ефектів значного гравітаційного відштовхування, зроблені раніше в лінійному за спіном наближенні [1].

1. Plyatsko R., Stefanyshyn O. Fenyk M. Highly relativistic spinning particle starting near $r_{ph}^{(-)}$ in a Kerr field // Phys. Rev. D. – 2010. – **82**. – id. 044015.

Anton Podkopaev

Lomonosov State University, Moscow
tony-meshok@yandex.ru

RECURSIVE WAVELET LEAST-SQUARES METHOD FOR LINEAR PARABOLIC EQUATIONS

Consider the following linear parabolic initial-boundary value problem in a cylinder $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$ ($\Omega \in \mathbb{R}^d$ is a bounded domain; $\partial\Omega \in C^2$):

$$f = Lu := u_t - \sum_{1\le i,j\le d} a_{i,j} u_{x_i,x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i u_{x_i} + cu, u|_{t=0} = u|_{x\in\partial\Omega\times[0,T]} = 0$$

($a_{i,j} \in W^1_\infty(\Omega_T)$; $\nu|\xi|^2 \le \sum_{1\le i,j\le d} a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2$ for some $\mu \ge \nu > 0$ and all $(x,t) \in \Omega_T$ and $\xi \in \mathbb{R}^d$; $b_i, c \in L_\infty(\Omega_T)$; $f \in L_2(\Omega_T)$; $u \in W^{2,1}_2(\Omega_T)$). $L : \{v \in W^{2,1}_2(\Omega_T) : v|_{t=0} = v|_{x\in\partial\Omega\times[0,T]} = 0\} \to L_2(\Omega_T)$ is known to be continuously invertible, which allows for using *least-squares methods*, i.e., approximation of f by its orthogonal projections $P_j f$ on $LV_j := \{Lv : v \in V_j\}$ ($\{V_j\}$ are complete, usually nested, families of subspaces of $W^{2,1}_2(\Omega_S)$ ($S \ge T$)). Clearly, u is approximated by $L^{-1}P_j f$.

The *recursive expansion* strategy adds some flexibility to the above scheme and enables, e.g., using mixes of multiresolution analyses, as well as perturbed projectors $\tilde{P}_j := P_j + E_j P_j$ ($E_j : LV_j \to LV_j$) with $\|E_j\| \le E < 1$, which is desirable as the arising linear equation systems are solved by iterative methods. The recursive expansion of $f \in L_2(\Omega_T)$ by $\{\tilde{P}_j\}$ is defined as $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_j R_{j-1} f$, where $R_0 = \mathrm{Id}$, $R_j = Q_j Q_{j-1} \ldots Q_1$, $Q_j = \mathrm{Id} - \tilde{P}_j$ ($j \in \mathbb{N}$). The subspace sequences of interest are as follows: $V_j = \overline{\mathrm{span}\{\varphi^{(l_j)}_{m_j,k} : k \in \mathbb{Z}^{d+1}, \operatorname{supp}\varphi^{(l_j)}_{m_j,k} \in \Omega_S\}}$, where $\varphi^{(l_j)}_{m_j,k}(x,t) = \varphi^{(l_j)}(2^{m_j}((x,t) - k)) \in W^{2\alpha,\alpha}_2(\mathbb{R}^{d+1})$ ($\alpha > 1$) are compactly supported, $l_j \in \{1,\ldots,l\}$, for all $q \in \{1,\ldots,l\}$ $\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi^{(q)}(x,t)\, dxdt \ne 0$, $\{m_j\}$ is nondecreasing and $\#\{j : m_j = m\} < M$ for some M and all m.

Theorem. *Under the above assumptions on $\{V_j\}$ and $\{\tilde{P}_j\}$ the recursive expansion of any $f \in L_2(\Omega_T)$ by $\{\tilde{P}_j\}$ converges to f in $L_2(\Omega_T)$.*

This research has been financially supported by Russian Foundation for Basic Research (project 11-01-00321) and the program "Leading scientific schools of Russia" (project NSh-3252.2010.1).

Богдан Подлевський

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
podlev@iapmm.lviv.ua

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРАЇЧНОЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

У доповіді запропоновано чисельний метод розв'язування оберненої алгебраїчної спектральної задачі, яка виникає у багатьох прикладних математичних моделях. Тобто, потрібно розв'язати наступну обернену задачу на власні значення.

Нехай $A_i = \left\{a^i_{j,k}\right\}^n_{j,k=1}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ – сталі матриці і $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in R^n$. Задача полягає у знаходженні такого векторного параметра $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T \in R^n$, при якому матриця $A(\mathbf{p}) = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i A_i$ має задані власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Оскільки, розв'язок $\mathbf{p}$ вихідної задачі є також розв'язком еквівалентної задачі

$$F(\mathbf{p}) \equiv \begin{pmatrix} \det(A(\mathbf{p}) - \lambda_1 I) \\ \vdots \\ \det(A(\mathbf{p}) - \lambda_n I) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0, \qquad (1)$$

то запропоновано ітераційний процес, який дозволяє для обчислення $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T$ системи (1) застосувати метод Ньютона

$$\mathbf{p}^{(m+1)} = \mathbf{p}^{(m)} - \left[G(\mathbf{p}^{(m)})\right]^{-1} F(\mathbf{p}^{(m)}), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

де $G(\mathbf{p}) = \{g_{ij}\}^n_{i,j=1}$, $g_{ij} = \frac{\partial F_i(\mathbf{p})}{\partial p_j}$, не розкриваючи детермінантів у (1). Це означає, що пропонується алгоритм знаходження значень функцій $F_i(\mathbf{p})$ та їх частинних похідних g_{ij} при фіксованому значенні параметрів p_i, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, використовуючи для цього LU-розклад матриць $F_i(\mathbf{p})$ та чисельну процедуру обчислення похідних детермінанта матриці [1]. Наведено числові приклади.

1. Подлевский Б.М. О применении метода Ньютона к нахождению собственных значений некоторых двухпараметрических (многопараметрических) спектральных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – **48**, № 12. – С. 2107–2112.

Nataliya Pronska

Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics
nataliya_p@email.ua

SPECTRAL PROPERTIES OF STURM–LIOUVILLE OPERATORS WITH ENERGY-DEPENDENT POTENTIALS

The aim of the talk is to discuss spectral properties of the quadratic operator pencil

$$T(\lambda) := \lambda^2 - \lambda B - A \tag{1}$$

in the Hilbert space $L_2(0,1)$, where A denotes an operator acting by $Ay := -y'' + q(x)y$ subject to the Dirichlet boundary conditions and B is the operator of multiplication by $2p$. Here p and q are real-valued functions from $L_2(0,1)$.

The spectrum $\sigma(T)$ of the operator pencil T is the set of all such $\lambda \in \mathbb{C}$ for which $T^{-1}(\lambda)$ does not exist, i.e., $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \in \sigma(T(\lambda))\}$.

Theorem. *Let κ be the number of negative eigenvalues of the operator A. Then*

(i) the spectrum of the operator pencil T is discrete;

(ii) there are at most κ non-simple real eigenvalues, and their algebraic multiplicities do not exceed $2\kappa + 1$;

(iii) the non-real spectrum of the pencil T is symmetric with respect to the real axis and consists of at most κ pairs of eigenvalues λ and $\bar{\lambda}$ of finite algebraic multiplicity, moreover, the root subspaces corresponding to λ and $\bar{\lambda}$ are isomorphic.

If the operator A is positive, then the spectrum of the operator pencil T is real and simple.

To prove this theorem we use linearization of the operator pencil T and its properties in the corresponding Pontryagin space [1, 2].

1. Bognar, J. Indefinite inner product spaces. — New York: Springer-Verlag, 1974. — 223 p.
2. Langer H., Najman B., Tretter Ch. Spectral theory of the Klein-Gordon equation in Pontryagin spaces // Comm. Math. Phys. – 2006. – **267**, N 1. – P. 159–180.

Наталія Процах, Ольга Сеник

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львівський технікум залізничного транспорту
protsakh@ukr.net

ПРО МІШАНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ та $D \subset \mathbb{R}^l$ – обмежені області з межами $\partial\Omega \in C^1$ та $\partial D \in C^1$ відповідно, $T \in (0,\infty)$ – фіксоване число, $G = \Omega \times D$.

В області $Q_T = G \times (0,T)$ розглянемо мішану задачу

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} +$$
$$+c(x,y,t)u(x,y,t-h) + g(x,y,t,u) = f(x,y,t), \tag{1}$$
$$u|_{S_T^1} = 0, \quad u|_{\Sigma_T} = 0, \tag{2}$$
$$u(x,y,t) = u_0(x,y), \quad t \in [-h,0],\ (x,y) \in G. \tag{3}$$

Тут $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T \equiv \Omega \times \partial D \times (0,T) : \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i) < 0\}$, ν – зовнішня нормаль до S_T.

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови: $a_i, c \in L^\infty(Q_T)$, $a_i(x,y,t) \ge a_0 > 0$, $c(x,y,t) \ge c_0$ д. м. в. $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i = 1,\dots,n$; $q \in (1,\infty)$, $p \in (1,2)$; функція $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за (x,y,t) в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$, неперервна за ξ д. м. в. $(x,y,t) \in Q_T$; $|g(x,y,t,\xi)| \le g^0|\xi|^{q-1}$, $(g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta))(\xi-\eta) \ge$ $\ge g_0|\xi-\eta|^q$ д. м. в. $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$, де $g_0 > 0$, $g^0 > 0$, $\lambda_i \in C(Q_T)$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(Q_T)$ д. м. в. $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i = 1,\dots,l$; $f \in L^2(Q_T)$; $u_0 \in L^2(G)$.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язків задачі (1)–(3) з простору $V(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, де $V(Q_T) = \{v : v \in L^q(Q_T) \cap L^2(Q_T),\ v_{x_i} \in L^p(Q_T),\ v_{y_j} \in L^2(Q_T),\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,l,\ v|_{S_T^1} = 0,\ v\big|_{\Sigma_T} = 0\}$.

Олена Процюк

Львівський національний університет імені Івана Франка
olena.protsyuk@gmail.com

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ПІВПРОСТОРІ З ШАРОМ І ПОРОЖНИНОЮ

Розглядаються граничні задачі стаціонарної теплопровідності для рівняння Лапласа в тривимірній області, утвореній шаром і півпростором з порожниною, яка обмежена гладкою замкненою поверхнею. Шукана функція задовольняє умову Неймана на зовнішній поверхні шару, умову Діріхле, Неймана або Робіна на поверхні порожнини і умови ідеального контакту на межі поділу середовищ.

Для розв'язування цих задач використовуються два підходи. Перший передбачає застосування прямого методу граничних інтегральних рівнянь. За допомогою побудованої матриці функцій Гріна [1] для відповідної суцільної шаруватої області кожна задача зводиться до інтегрального рівняння з невідомою функцією лише на поверхні порожнини.

Другий підхід передбачає зведення граничних задач до інтегральних рівнянь по поверхні порожнини, використовуючи модифіковані потенціали з функціями Гріна. Розв'язок подається у вигляді суми потенціалів простого шару та гармонічних функцій, які задовольняють умови Неймана на зовнішній поверхні шару та умови спряження. Враховуючи класичні результати про стрибки потенціалів при переході через границю порожнини, для розв'язування також отримуємо інтегральні рівняння.

Чисельне розв'язування інтегральних рівнянь здійснюється з використанням sinc-квадратур, квадратурних формул Гаусса-Лежандра та проекційного методу зі сферичними базисними функціями, який має супералгебраїчний порядок збіжності. При цьому клас розглядуваних поверхонь обмежено поверхнями гомеоморфними сфері. Приведено результати чисельних експериментів.

1. Процюк О.Б., Хапко Р.С. Чисельне розв'язування просторової задачі стаціонарної теплопровідності у півпросторі з шаром за допомогою функцій Гріна // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 12 с. (в друці).

Богдан Пташник

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
ptashnyk@lms.lviv.ua

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕКЛАСИЧНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

В області $D = \{(t,x) : 0 < t < T,\ 0 < x < a\}$ розглянемо задачу

$$P_2 P_1 u(t,x) = 0, \quad u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad l^s u\big|_{x=0} = l^s u\big|_{x=a} = 0, \qquad (1)$$

де $j \in \{1,\dots,2n+1\}$, $s \in \{0,1,\dots,n\}$, $0 \le t_1 < \dots < t_{2n+1} \le T$, $P_1 := P_1\big(\partial/\partial t, l\big) = \sum_{r=0}^{n} A_r \big(\partial/\partial t\big)^{2n-2r} l^r$ та $P_2 := P_2\big(\partial/\partial t, l\big) = \partial/\partial t - b(t)l$ – строго гіперболічний та рівномірно параболічний за Петровським диференціальні вирази з достатньо гладкими коефіцієнтами, $A_r \in \mathbb{R}$, $A_0 = 1$, $l = d/dx(p(x)d/dx) - q(x)$, $p(x) \ge p_0 > 0, q(x) \ge 0$.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ та $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ – множини власних значень та власних функцій задачі $lX = -\lambda X$, $X(0) = X(a) = 0$, μ_m – корені рівняння $P_1(\mu, 1) = 0$, $y_m(\lambda_k, t) = \exp(i\mu_m\sqrt{\lambda_k}t)$, $m \in \{1,\dots,2n\}$, $y_{2n+1}(\lambda_k, t) = \int\limits_0^T g(\lambda_k, t, \tau) \exp\left(-\lambda_k \int\limits_0^\tau b(\tau_1) d\tau_1\right) d\tau$, $g(\lambda_k, t, \tau)$ – фундаментальний розв'язок рівняння $P_1(\frac{d}{dt}, -\lambda_k)v(t) = 0$, $\overline{t}(t_1,\dots,t_{2n+1})$, $\Delta(\lambda_k, \overline{t}) = \det \parallel y_s(\lambda_k, t_j) \parallel_{j,s=1}^{2n+1}$.

Теорема 1. *Для єдиності класичного розв'язку задачі (1) необхідно і досить, щоб $\Delta(\lambda_k, \overline{t}) \neq 0$ для кожного $\lambda_k \in \Lambda$.*

Існування розв'язку задачі (1) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід. Встановлено, що класичний розв'язок задачі (1) існує для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n+1}$) векторів $\overline{t} \in [0,T]^{2n+1}$, якщо $\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk} X_k(x)$ і $|\varphi_{jk}|$ експоненційно спадають при $k \to \infty$, $j \in \{1,\dots,2n+1\}$. Результати поширено на випадок багатьох просторових змінних, коли $D = (0,T) \times Q \subset \mathbb{R}^{p+1}, p > 1$, Q – обмежена однозв'язна область із гладкою межею, а l – еліптичний в $\overline{Q}$ диференціальний вираз другого порядку.

Робота підтримана ДФФД України (проект № 41.1/004).

Mariya Ptashnyk

Department of Mathematics I, RWTH Aachen University, Germany
ptashnyk@math1.rwth-aachen.de

CORRECTOR ESTIMATES FOR A REACTION-DIFFUSION SYSTEM MODELING SULFATE CORROSION

A semi-linear partially-dissipative reaction-diffusion system modeling concrete corrosion in sewer pipes is considered. Concrete is a mixture of cement, gel and mobile water. Thus, considered microstructure contains three non-overlapping regions: the solid matrix, the pore water clinging on solid fabrics Ω_1^ε and the air-filled part of pores Ω_2^ε:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nabla \cdot (D_u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = -f(u^\varepsilon, v^\varepsilon) & \text{in } (0,T) \times \Omega_1^\varepsilon, \\ \partial_t v^\varepsilon - \nabla \cdot (D_v^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) = f(u^\varepsilon, v^\varepsilon) & \text{in } (0,T) \times \Omega_1^\varepsilon, \\ \partial_t w^\varepsilon - \nabla \cdot (D_w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon) = 0 & \text{in } (0,T) \times \Omega_2^\varepsilon. \end{cases}$$

Two interface-reaction mechanisms, the Henry's law on the water-air interface Γ_2^ε and a nonlinear chemical reaction on the boundary of pore walls Γ_1^ε, are defined via boundary conditions

$$\begin{cases} D_u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nu = -\varepsilon \eta(u^\varepsilon, r^\varepsilon) & \text{on } (0,T) \times \Gamma_1^\varepsilon, \\ \partial_t r^\varepsilon = \eta(u^\varepsilon, r^\varepsilon) & \text{on } (0,T) \times \Gamma_1^\varepsilon, \\ D_v^\varepsilon \nabla v^\varepsilon \cdot \nu = \varepsilon(a^\varepsilon(x) w^\varepsilon - b^\varepsilon(x) v^\varepsilon) & \text{on } (0,T) \times \Gamma_2^\varepsilon, \\ D_w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \cdot \nu = -\varepsilon(a^\varepsilon(x) w^\varepsilon - b^\varepsilon(x) v^\varepsilon) & \text{on } (0,T) \times \Gamma_2^\varepsilon. \end{cases}$$

The derivation of error estimates and construction of correctors provide the important information on how good a solution of the microscopic model is approximate by solutions of the macroscopic averaged equations. We construct first order correctors and derive error estimates using the unfolding method, which enables the proof of error estimates without additional regularity of the correctors.

1. Griso G. Error estimate and unfolding for periodic homogenization // Asymptotic Analysis. – 2004. – **40**. – P. 269–286.
2. Tasnim F., Muntean A., Ptashnyk M. Homogenization and corrector estimates for a system describing concrete corrosion via unfolding method // 2011, in preparation.

Іван Пукальський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
appl-dpt@chnu.edu.ua

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ОСОБЛИВОСТЯМИ

Нехай D – область півпростору R^n, $x_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, обмежена поверхнями S і $x_i = 0$, t_0, t_1, $\ldots$, t_N, T – довільні фіксовані додатні числа, $t_j \leq T$. В обмеженій області $Q = [0, T) \times D$ розглянуто задачу знаходження функцій $(u; p; q)$, на яких функціонал

$$I(p, q) = \int_0^T dt \int_D F_1(t, x; u(t, x; p, q), p(x))dx +$$
$$+ \int_D F_2(x, u(t_1, x; p, q), \ldots, u(t_N, x; p, q), q(x))dx$$

досягає мінімуму на класі функцій (u, p, q), із яких $(p, q) \in V = \{p \in C^\alpha(D), p_1 \leq p \leq p_2, q \in C^{2+\alpha}(D), q_1 \leq q \leq q_2\}$, а $u(t, x; p, q)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0(t, x)u = f(t)\Psi(x, p(x)),$$

що задовольняє нелокальну умову

$$u(0, x; p, q) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x) u(t_j, x; p, q) = \varphi(x, q(x)),$$

а на бічній поверхні $\Gamma = [0, T) \times \partial D$, ∂D – межа області D, крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D} \Big[\sum_{k=1}^{n} b_k(t, x) \partial_{x_k} u + b_0(t, x)u - F(t, x) \Big] = 0.$$

Задачу досліджено за таких обмежень на ріст коефіцієнтів при $t \to t_0$, $x_i \to 0$: $a_{ij} = O(|t - t_0|^{k_i + k_j} x_i^{\beta_i} x_j^{\beta_j})$, $a_j = O(|t - t_0|^{\delta_j} x_j^{\mu_j})$, $a_0 \leq K < \infty$, $b_i = O(|t - t_0|^{k_i} x_i^{\beta_i})$, $k_i \in (-\infty, \infty)$, $\beta_i \in (-\infty, \infty)$, $\delta_j \leq 0$, $\mu_j \leq 0$, $j = \{0, 1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |d_j(x)| e^{-\lambda t_j} \leq A_0 < 1$, $\lambda + K < 0$.

Петро Пукач

Національний університет „Львівська політехніка“
ppukach@i.ua

ПРО ЗМІШАНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Нехай Ω – область в $\mathbf{R}^n$ (обмежена або необмежена) з регулярною межею $\partial\Omega$, $Q_T = (0,T)\times\Omega$, $0 < T < +\infty$, $S_T = (0,T)\times\partial\Omega$ – бічна поверхня області Q_T. Досліджуємо в області Q_T змішану задачу для системи рівнянь

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2}(-1)^{|\alpha|}(D^\beta\left(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t\right) + D^\beta\left(b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u\right)) +$$

$$+\sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_{\alpha,1}(x,t)D^\alpha u + \sum_{|\alpha|\le 1} c_{\alpha,2}(x,t)D^\alpha v + \gamma_1(x,t)|u_t|^{p-2}u_t = f_1(x,t), \tag{1}$$

$$v_t - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x,t)v_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n (c_i(x,t)u_t)_{x_i} + \sum_{i=1}^n d_i(x,t)u_{x_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^n e_i(x,t)v_{x_i} + \beta_0(x,t)u + \beta_1(x,t)v + \gamma_2(x,t)|v|^{q-2}v = f_2(x,t) \tag{2}$$

з крайовими умовами

$$u(x,t) = 0, \quad v(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S_T \tag{3}$$

та початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad v(x,0) = v_0(x) \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{4}$$

В припущенні, що $p, q \in (2, +\infty)$ отримано результати існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(4). У випадку необмеженої за просторовими змінними області Q_T класи існування та єдиності розв'язку є просторами Соболєва локально інтегровних функцій з довільною (незалежною від початкових даних та правих частин системи) поведінкою на нескінченності або вагові простори Соболєва функцій.

Віктор Ревенко

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
victorrev@ukr.net

ЗАСТОСУВАННЯ НЕОРТОГОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Використання комп'ютерної техніки та розроблена методика розкладу функцій за системою неортогональних функцій дають можливість створити нові ефективні алгоритми апроксимації та розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь. Розглянута неортогональна на проміжку $[l_1, l_2]$ система функцій $\varphi_0(x) \equiv 1$; $\varphi_k(x) = \cos(k\omega x)$, $\varphi_{k+M}(x) = \sin(k\omega x)$, $k = \overline{1,\ M}$, де $\omega = 2\pi/(B - A)$; $[l_1, l_2] \subset [A, B]$, $[l_1, l_2] \neq [A, B]$. Проміжок $[A, B]$ є більше чим в два рази більший від $[l_1, l_2]$. Вибрана система функцій $\{\varphi_k(x)\}$ на проміжку $[l_1,\ l_2]$ буде повною, але не ортогональною. Для порівняння з нею розглянуто відомий набір ортогональних на проміжку $[l_1,\ l_2]$ синусів і косинусів.

Показано, що неперіодичні на проміжку $[l_1, l_2]$ функції апроксимуються функціями $\varphi_k(x)$ більше чим в тисячу раз точніше, чим такою же кількістю ортогональних функцій. З'ясовано, що на відміну від ортогональних функцій скінченною кількістю неортогональних функцій можна з заданою точністю апроксимувати неперіодичну неперервну функцію одночасно разом з її похідними.

Основні ідеї запропонованого підходу продемонстровано на прикладі розв'язання двоточкової задачі для диференціального рівняння M-ого порядку заданого на проміжку $[l_1,\ \ l_2]$. Розв'язок поставленої задачі зведено до мінімізації введеної узагальненої квадратичної форми. Доведено теорему, яка встановлює числові критерії збіжності побудованого наближеного розв'язку. Показано, що корінь квадратний із мінімуму узагальненої квадратичної форми служить числовою оцінкою відхилення наближеного розв'язку від точного розв'язку крайової задачі. Чисельно розв'язано приклади і показано, що вже малою кількістю неортогональних функцій можна з високою точністю апроксимувати розв'язок диференціального рівняння.

Ольга Рыкова, Наталья Сакович

БГАТУ, МГПУ им. А. Кулешова
oly8521@yandex.ru

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДИСКРИМИНАНТОВ И РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАМИ БЛИЗКИХ КОРНЕЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ

Пусть многочлен от действительной переменной x имеет вид

$$P(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]. \qquad (1)$$

Обозначим через $H(P) = \max |a_i|$ высоту многочлена (1), а через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $D(P)$ — его корни и дискриминант,

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Нетрудно доказать [1], что $D(P)$ — целое число и выполняется оценка $|D(P)| < (2n-1)!H(P)^{2n-2}$. Поэтому при $D(P) \neq 0$ имеем

$$1 \le |D(P)| < c(n)H^{2n-2},$$

где $c(n)$ зависит только от n и не зависит от H. Во многих областях алгебры и теории чисел [1, 2] важно знать, какие значения принимает дискриминант $D(P)$ и насколько часто его значения попадают внутрь некоторого интервала из промежутка $[-c(n)H^{2n-2}, c(n)H^{2n-2}]$.

Теорема. *Пусть Q — достаточно большое натуральное число. При $0 \le v \le \frac{n+1}{3}$ существует по крайней мере $c_1(n)Q^{n+1-2v}$ многочленов из класса $P_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \le n, H(P) \le Q\}$, таких что $1 \le |D(P)| < Q^{2n-2-2v}$, где $c_1(n)$ — постоянная, зависящая только от n.*

Теорема доказывается с помощью связи между значениями производной $P'(x)$ в корнях многочлена $P(x)$.

1. B.L.Van Der Warden. Algebra. – Berlin, Heilderberg: Springer-Verlag, 1971.
2. Bernik V.I., Goetze F., Kukso O.S. Lower bounds for the number of integer polynomials with given order of discriminants // Acta Arithm. – 2008. – **133**, N 4. – P. 375–396.

Андрій Романів

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
romaniv_a@ukr.net

ПРО УНІТАЛЬНІ ДІЛЬНИКИ ОСОБЛИВИХ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

Нехай F – поле, $A(x)$ – особлива $n \times n$ матриця над $F[x]$. Для неї існують такі оборотні матриці $P(x), Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x) = \Psi(x) = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_m(x), 0, \ldots, 0\right), \varepsilon_m(x) \neq 0,$$

$\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, i = 1, \ldots, m-1, 1 \leq m \leq n-1$, де $\Psi(x)$ канонічна діагональна форма (к.д.ф.) матриці $A(x)$. Запишемо матрицю $\Psi(x)$ у вигляді добутку $\Psi(x) = \Phi(x)\Delta(x)$, де $\Phi(x) = \operatorname{diag}\left(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right), \varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1, \deg\det\Phi(x) = nr$.

П.С.Казімірський встановив необхідні та достатні умови виділення регулярного множника із матричного многочлена $A(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x)$ над полем комплескних чисел. Основними інструментами досліджень були введені ним поняття визначальної матриці та значення матриці на системі коренів многочлена [1]. У пропонованій роботі ця задача розв'язана для особливих матриць над нескінченним полем.

Нехай $V(\Phi)$ матриця із [2]. Позначимо через $F(k)[x]$ – трансцедентне розширення поля F, одержане приєднанням до F всіх k_{ijl}, що фігурують у матриці $V(\Phi)$.

Теорема. *Нехай F – нескінченне поле. Для того, щоб із особливого матричного многочлена $A(x) = P^{-1}(x)\Psi(x)Q^{-1}(x)$, $\Psi(x) = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_m(x), 0, \ldots, 0\right)$, $\varepsilon_m(x) \neq 0$, $\varepsilon_i(x) | \varepsilon_{i+1}(x), i = 1, \ldots, m-1, 1 \leq m \leq n-1$, можна було виділити лівий унітальний дільник з к.д.ф. $\Phi(x) = \operatorname{diag}\left(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right), \varphi_i | \varphi_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1, \deg\det\Phi(x) = nr$, необхідно та достатньо, щоб матриця $(V(\Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ регуляризувалася справа над $F(k)[x]$.*

1. Казимирский П.С. Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, №4. – С. 483-498.
2. Зеліско В.Р., Щедрик В.П. Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, №4. – С. 20-29.

Петро Савенко

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
spo@ippmm.lviv.ua

НЕЛІНІЙНІ ДВОПАРАМЕТРИЧНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ В ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У доповіді запропоновано чисельний метод розв'язування нелінійних двопараметричних задач, які виникають при дослідженні неєдиності та галуження розв'язків нелінійних двовимірних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, залежних від двох параметрів $(\lambda_1,\, \lambda_2) \in \Lambda$,

$$f\left(s_1, s_2\right) = \iint\limits_{\Omega} \mathbf{K}\left(s_1, s_2, s_1', s_2', \lambda_1, \lambda_2\right) \exp\left(i \arg f\left(s_1', s_2'\right)\right) ds_1', ds_2', \quad (1)$$

де Ω – обмежена замкнена область в R^2, $\quad \Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ – область у комплексному просторі C^2. Вважаємо, що ядро рівняння є голоморфною функцією стосовно $\lambda_1,\, \lambda_2$.

Знаходження множини точок можливого галуження розв'язків рівняння (1) зводиться до розв'язування нелінійної двопараметричної задачі на власні значення

$$u\left(s_1, s_2\right) = T\left(\lambda_1, \lambda_2\right) u \equiv \iint\limits_{\Omega} \mathbf{K}\left(s_1, s_2, s_1', s_2', \lambda_1, \lambda_2\right) u\left(s_1', s_2'\right) ds_1' ds_2',$$

яку одержуємо з (1) відповідною лінеаризацією. Доведено теорему про існування зв'язних компонент спектра оператор-функції $A\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = I - T\left(\lambda_1, \lambda_2\right)$.

Із застосуванням збіжних кубатурних процесів побудовано й обґрунтовано чисельні алгоритми для наближеного знаходження зв'язних компонент спектра оператор-функції $A\left(\lambda_1, \lambda_2\right)$ в області Λ. Наведено числові приклади.

Запропонований метод поширено на двоточкові крайові задачі для диференціального рівняння n-го порядку з нелінійним входженням двовимірного спектрального параметра у коефіцієнти рівняння й крайові умови. Обґрунтовано збіжність наближених розв'язків дискретизованих задач до точних розв'язків вихідної задачі.

Іван Савка

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
s-i@ukr.net

ЗАДАЧА З ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

В області $\mathcal{D} = [0, T] \times \Omega_p$ змінних (t, x) розглядаємо задачу

$$\partial_t^2 u(t, x) = A(\partial_x) u(t, x), \tag{1}$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \mu_1 \, \partial_t u(t, x)|_{t=0} + \mu_2 \, \partial_t u(t, x)|_{t=T} = \varphi_2(x), \tag{2}$$

де $T > 0$, Ω_p – p-вимірний тор, $A(\xi) \equiv A(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ – поліном степеня n з комплексними коефіцієнтами, $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – задані функції, $u(t, x)$ – шуканий розв'язок.

Задача (1), (2) належить до класу некоректних за Адамаром задач. Її розв'язність нестійка відносно як завгодно малих змін коефіцієнтів задачі та пов'язана з проблемою малих знаменників [1, 2].

У припущенні незалежних коефіцієнтів μ_1 і μ_2 для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^2$) векторів μ встановлено однозначну розв'язність задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва 2π-періодичних за змінною x функцій, а також за допомогою метричного підходу доведено теорему про оцінку знизу малих знаменників задачі. Цю оцінку використано для встановлення гладкості знайденого розв'язку.

Отримані результати поширені на випадок залежних коефіцієнтів μ_1 і μ_2, тобто, коли вектор $\mu = (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ описує плоску гладку криву, де $\tau \in [0, 1]$.

Робота підтримана ДФФД України (проект №41.1/004).

1. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
2. Ільків В.С., Пташник Б.Й. Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.

Євгенія Савюк, Анна Теребус

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівненський державний гуманітарний університет
esavyuk@ukr.net, anna.terebus@gmail.com

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ МАЛОПРОСТОРОВОЇ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ТЕЧІЇ

Розглядається задача моделювання квазіідеальної фільтраційної течії в деякому змінної малої товщини із заданою провідністю κ пласті – області G_τ, обмеженій чотирма непроникними "стінками"(рівняння двох з яких – підошви та крівлі у деяких ортогональних криволінійних координатах (ξ, η, ς) мають вигляд $\varsigma = \varsigma_*$ та $\varsigma = \varsigma^*$) і двома еквіпотенціальними поверхнями. Шляхом здійснення переходу від просторової області G_τ до відповідної плоскої області $G_z = ABCD$ змінних (ξ, η) та на основі міркувань, закладених у [2], закон руху Дарсі та рівняння нерозривності подано у такому вигляді: $\overrightarrow{v} = \kappa\left(H_1^{-1}\varphi_\xi, H_2^{-1}\varphi_\eta\right)$, $(t_1(\xi,\eta)\varphi_\xi)_\xi + (t_2(\xi,\eta)\varphi_\eta)_\eta = 0$, де $H_i = H_i(\xi,\eta,\varsigma)$, $i = \overline{1,3}$ – відповідні коефіцієнти Ламе переходу від фізичних координат до криволінійних (ξ,η,ς), $t_1(\xi,\eta) = \int\limits_{\varsigma_*}^{\varsigma^*} \kappa H_2 H_3 H_1^{-1} d\varsigma$, $t_2(\xi,\eta) = \int\limits_{\varsigma_*}^{\varsigma^*} \kappa H_1 \cdot \cdot H_3 H_2^{-1} d\varsigma$, $\varphi = \varphi(\xi,\eta)$ – потенціал швидкості $\overrightarrow{\nu}$ ($\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = = \varphi^*$, $\varphi'_n|_{AC\cup BD} = 0$). Розв'язок задачі шукаємо на основі введення деякої функції усередненої течії $\psi = \psi(\xi,\eta)$ квазікомплексно спряженої до $\varphi = \varphi(\xi,\eta)$ та використання методу квазіконформних відображень [1].

Розроблена методика застосовна до моделювання різних природних явищ: фільтрації, тепло та електропровідності, зокрема, поширена на випадки моделювання руху рідин у водоймах.

1. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ : Наукова думка, 2007. – 292 с.
2. Толпаев В. А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. – Ставрополь, 2004. – 38 с.

Галина Самкова

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
jimis@ua.fm

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЯВНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БРИО И БУКЕ

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, вида

$$t\dot{y} = Py + f(t, y, \dot{y}), \tag{1}$$

где $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, функция $f : (-\Delta, \Delta)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (\Delta > 0)$ голоморфна в точке $(0, 0, 0)$, причем ее разложение в окрестности этой точки не содержит свободного и линейного членов. Такая задача в предположении, что функция f не зависит от $\dot{y}$, изучена в [1].

Исследуются решения системы (1), удовлетворяющие условиям

$$y(t) \to 0, \quad \dot{y}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad (\text{или} \quad t \to +0). \tag{2}$$

Построены формальные решения задачи (1)-(2), представимые в виде рядов по степеням t [2]; t и $\ln t$; t^λ; t^λ и $\ln t$; t^λ и $\ln^\mu t$, где $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\mu, \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. При этом определяющую роль играют матрица P и специальные матрицы, элементами которых являются некоторые линейные комбинации коэффициентов при вторых степенях, содержащих производные неизвестных функций, указанного выше разложения функции f.

При некоторых дополнительных предположениях найдены достаточные условия существования решений задачи (1)-(2), асимптотически равных при $t \to 0 \quad$ (или $\quad t \to +0$) отрезкам построенных формальных рядов. Исследован вопрос о числе таких решений.

1. Еругин Н.П. Проблема Римана. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.
2. Самкова Г.Е. О разрешимости и асимптотическом поведении решений некоторых полуявных дифференциальных систем // Reports of enlarged session of seminar of L.N. Vekua Institute of Applied Mathematics. – 1992. – **7**, №3. – P. 85–88.

Галина Самкова, Наталія Шарай

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова
jimis@ua.fm, rusnat@i.ua

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СИНГУЛЯРНИМ ЗМІННИМ ЖМУТКОМ МАТРИЦЬ

Розглядаємо задачу Коші

$$\begin{cases} A(z)Y' = B(z)Y + F(z,Y), & (1) \\ Y(z) \longrightarrow 0, z \longrightarrow 0, & (2) \end{cases}$$

де однозначні матриці $A, B : D \longrightarrow G_1 \times G_2$ розміру $m \times n$, $m \neq n$, аналітичні в області $D \subseteq \mathbb{C}, 0 \in D$ або $0 \in \partial D, G_1 \times G_2 \subset \mathbb{C}^{m\times n}, (0,0) \in G_1 \times G_2$ або $(0,0) \in \partial(G_1 \times G_2)$, однозначна вектор-функція $F : D \times G_2 \longrightarrow G_1$ аналітична в $D \times G_2$. Припустимо, що $r = \operatorname{rang} A(0), 0 < r < \min(m,n)$, тобто жмуток матриць $A(z)\lambda - B(z)$ є сингулярним.

Задачу (1)–(2) вивчаємо у випадках, коли частина компонент невідомої вектор-функції $Y(z)$ належить класу аналітичних в заданій області функцій, що мають у точці $z = 0$ одну з ізольованих особливостей та задовольняють деяку оцінку.

Отримано достатні умови існування аналітичних розв'язків $Y(z)$ задачі Коші (1)–(2) таких що $Y'(z) \longrightarrow 0$ при $z \longrightarrow 0$, в деякому околі точки $z = 0$ або в однозв'язній області з точкою $z = 0$ на межі. В кожному з випадків одержано асимптотику розв'язків при $z \longrightarrow 0$ та досліджено питання про їхню кількість.

1. Самойленко А.М., Шкіль Н.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. Самкова Г.Є., Шарай Н.В. Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, №2. – С. 224–236.
3. Самкова Г.Є., Шарай Н.В. Деякі властивості розв'язків напів'явних диференціальних систем // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2008. – **13**, Вип. 17. – С. 63–72.

Валерій Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
vsam@univ.kiev.ua

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається задача про асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T], \tag{1}$$

де $n \in \mathbb{N}$, функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ записуються у вигляді асимптотичних рядів

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x,t), \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x,t),$$

$a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R} \times [0;T])$, $k \geq 0$; $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Запропоновано алгоритм побудови асимптотичних однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння (1), досліджено його структуру в залежності від порядку сингулярності n, дано метод побудови асимптотичних розв'язків задачі Коші для рівняння (1).

1. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, №1. – С. 111–124.
2. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №1. – С. 122–132.
3. Самойленко Ю.І. Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами (загальний випадок) // Математичний вісник НТШ. – 2010. – **7**. – С. 227–242.

Юлія Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
vsam@univ.kiev.ua

ДВОФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Як відомо, рівняння Кортевега-де Фріза зі сталими коефіцієнтами має низку цікавих властивостей. Зокрема, для цього рівняння притаманне існування так званих однофазових і багатофазових солітонних розв'язків. У випадку рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і малим параметром природно виникає питання про асимптотичні розв'язки цього рівняння, що аналогічні в певному сенсі згаданим вище розв'язкам солітонного типу.

Для рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0;T],$$

де функції $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ подаються у вигляді асимптотичних рядів

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x), \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x),$$

$a_k(x), b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $k \geq 0$; $\varepsilon > 0$ – малий параметр, запропоновано алгоритм побудови його асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку і знайдено умови його існування.

1. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №3. – С. 378–387.
2. Samoylenko V.Hr., Samoylenko Yu.I. Asymptotic two phase soliton type solutions to singularly perturbbed Korteweg-de Vries equation // Collection of papers "Computer Algebra Systems in Teaching and Research". – 2009. – P. 156–164.

Петро Самусенко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
psamusenko@ukr.net

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ З ВИРОДЖЕННЯМ

У роботі розглядається перша крайова задача

$$\varepsilon^2 B(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon C(x,t,\varepsilon)u + f(x,t,\varepsilon), \tag{1}$$

$t \in (0;T)$, $x \in (0;L)$,

$$u(x,0,\varepsilon) = \varphi(x),\ \frac{\partial u(x,0,\varepsilon)}{\partial t} = \psi(x),\ x \in [0;L], \tag{2}$$

$$u(0,t,\varepsilon) = u(L,t,\varepsilon) = 0,\ t \in [0;T], \tag{3}$$

де $u = u(x,t,\varepsilon)$ – шукана 3-вимірна вектор-функція, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(x,t,\varepsilon)$ – квадратні матриці 3-го порядку, $f(x,t,\varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – 3-вимірні вектор-функції з дійсними або комплекснозначними компонентами, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, – малий параметр. При цьому припускається, що $det\, B(t,0) \equiv 0$, $t \in [0;T]$.

Розв'язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} z_s(t,\varepsilon) v_s(x), \tag{4}$$

де $z_s(t,\varepsilon)$, $s \in N$, – шукані 3-вимірні вектор-функції, а $v_s(x)$, $s \in N$, – власні функції задачі Штурма-Ліувілля.

Доведено абсолютну і рівномірну збіжність ряду (4) у прямокутнику $\overline{D}$,

$$\overline{D} = \{(x,t) : 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T\}.$$

При цьому можливе почленне диференціювання ряду (4) за змінними t та x до двох разів включно; отримані таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно в $\overline{D}$.

Юрій Сидоренко, Олександр Чвартацький

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПОБУДОВА ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ (2+1)-ВИМІРНИХ УЗАГАЛЬНЕНЬ РІВНЯНЬ ЯДЖИМИ-ОЙКАВИ ТА МЕЛЬНИКОВА

Ми досліджуємо відомі нелінійні інтегровні (2+1)-вимірні узагальнення [1] моделей Яджими-Ойкави

$$i\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}, \quad u_t = u_y + |\mathbf{q}|_x^2, \tag{1}$$

та Мельникова [2, 3] на предмет побудови їх точних розв'язків у явній формі. Не досліджуючи відповідних прямих спектральних задач і рівнянь оберненої задачі розсіяння (рівнянь Марченка-Гельфанда-Левітана) для асоційованих зображень Лакса, отримані сім'ї регулярних та сингулярних n-солітонних розв'язків. Наш підхід базується на використанні „нестандартних", а саме, інтегродиференціальних зображень Лакса [3, 4]. Зокрема, система (1) еквівалентна операторному зображенню Лакса $[\tilde{L}_2, \tilde{M}_2] = 0$, де

$$\tilde{L}_2 = i\partial_y - \mathcal{D}^2 - 2u - i\mathbf{q}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*, \;\; \tilde{M}_2 = i\partial_t - \mathcal{D}^2 - 2u. \tag{2}$$

Для побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь використовуються оператори бінарних перетворень типу Дарбу-Матвєєва-Салля для лінійних еволюційних інтегро-диференціальних операторів [4].

1. Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Простороводвовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. – 1999. – №9. – С. 19–23.
2. Yajima N., Oikawa M. Formation and interaction of sonic-Langmur solitons: inverse scattering method // Progress Theoret. Phys. – 1976. – **56**, №6. – P. 1719–1739.
3. Sidorenko Yu., Strampp W. Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – **34**, №4. – P. 1429–1446.
4. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса // Вісн. Київ. націон. ун-ту ім.Т. Шевченка. Математика. Механіка. - 2009. – Вип. 22. С. 32–35

Михайло Симотюк

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
quaternion@ukr.net

ЗАДАЧА З ПРОСТИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Розглядаємо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)\vec{u}(t,x) \equiv \frac{\partial^n \vec{u}}{\partial t^j} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(D)\frac{\partial^j \vec{u}}{\partial t^j} = \vec{0}, \quad (t,x) \in Q_p^T, \qquad (1)$$

$$\vec{u}(t_j, x) = \vec{\varphi}_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in \Omega_p, \qquad (2)$$

де $D = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_p)$, $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$, $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $A_j(\xi) = \|a^j_{q,r}(\xi)\|^m_{q,r=1}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, — квадратні матриці розміру $m \times m$, елементи $a^j_{q,r}(\xi)$ яких є многочленами від $\xi_1, \dots, \xi_p$ степеня не вищого, ніж N, $N \in \mathbb{N}$, з комплексними коефіцієнтами.

У працях [1, 2] встановлено умови розв'язності багатоточкової задачі (2) для систем рівнянь (1), які справджують певні діофантові властивості; при цьому в [1, 2] показано, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n) \in [0,T]^n$, а множина систем рівнянь (1), які володіють згаданими діофантовими властивостями, є множиною повної міри Лебега у просторі, напнутому на коефіцієнти системи (1).

У доповіді буде показано, що для кожної системи рівнянь (1) задача з умовами (2) є однозначно розв'язною для майже всіх векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$.

Дослідження підтримані ДФФД України (проект № Ф41.1/004).

1. Симотюк М.М. Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002.– **45**, № 4.– С. 107–118.

2. Симотюк М.М. Задача з багатоточковими умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Наук. Вісн. Ужгород. нац. ун-ту. – 2003. – Вип. 8. – С. 105–121.

Dmytro Sytnyk

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
sytnik@imath.kiev.ua

IMPROVED NUMERICAL METHOD FOR THE NONLOCAL ABSTRACT CAUCHY PROBLEM WITH TIME DEPENDENT OPERATOR COEFFICIENT

Two points non-local Cauchy problem for the first order differential equation in a Banach space X is considered in the scope of the work.

$$\begin{aligned} &\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \\ &u(-1) + \alpha u(1) = \varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

where $A(t)$ is a densely defined closed (unbounded) operator in a Banach space X with the domain $D(A)$ independent of t, φ and $f(t)$ are the given vector and vector-valued function, $\alpha \in \mathbb{R}$. We suppose that the operator $A(t)$ is strongly positive and the following assumptions are fulfilled:

$$f(t) \in C([0,1];X), \quad \|[A(t) - A(s)]\| \le L|t-s| \quad \forall t,\ s.$$

Instead of studying the problem (1) in the present form we consider its modification obtained via spectral shift transformation $u(t) = e^{\lambda(t+1)}v(t)$. Such approach allows us to construct an discretization of (1) based on in-time collocation technique, which is free of redundant resolvent evaluations. The resulting system of linear equations is solved by a fixed-point iteration in conjunction with a sinc-based approximation of involving operator functions. The following theorem is valid.

Theorem *Under the given assumptions there exists a positive constant c such that for $\lambda \sim \ln(n) - \omega$ the error $|||\tilde{z}|||$ of our method satisfies the following estimate*

$$|||\tilde{z}||| \le cn^2 \ln n E_n(Bv),$$

where v is the solution of (1), $B(t) = A(0) - A(t)$ and $E_n(u)$ stands for an error of the best polynomial approximation of u

$$E_n(u) = \mathop{inf}_{p \in \Pi_n} \max_{t \in [-1,1]} \|u(t) - p(t)\|.$$

Олег Скасків, Людмила Шаповаловська

Львівський національний університет імені Івана Франка
matstud@franko.lviv.ua

ПРО РАДІУС ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ ЛАКУНАРНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Нехай $(a_k(\omega))$ послідовність комплекснозначних випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауза $([0,1],\mathcal{A},P)$, F_k – функція розподілу випадкової величини $|a_k(\omega)|$ $(k \geq 1)$. Позначимо $\Delta_k = \sup\{|F_k(x) - F(x)|\colon x \in \mathbb{R}\}$, де $F(x)$ – деяка функція розподілу. Через $R(\omega,(m_k))$ позначимо радіус збіжності випадкового степеневого ряду $f(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\omega) z^{m_k}$, де (m_k) – строго зростаюча послідовність цілих невід'ємних чисел. За законом нуля і одиниці $(\exists\ R \in [0,+\infty])$ таке, що $R(\omega,(m_k)) = R$ майже напевно (м.н.).

Теорема 1. *Нехай $(|a_k(\omega)|)$ – послідовність незалежних випадкових величин.*
a) Якщо $\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - F_k((1+\varepsilon))^{m_k}) < +\infty$ для деякого $\varepsilon > 0$, то м.н. $R(\omega,(m_k)) \geq 1$.
b) Якщо м.н. $R(\omega,(m_k)) = 1$, то $\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - F_k((1+\varepsilon))^{m_k}) < +\infty$ для кожного $\varepsilon > 0$.
c) Якщо $\lim_{k\to+\infty} \Delta_k = 0$ і для функції розподілу $F(x)$ виконується умова $F(+0) < 1$, то м.н. $R(\omega,(m_k)) \leq 1$.

Наступне твердження є безпосереднім наслідком з Теореми 1.

Теорема 2. *Якщо $(|a_k(\omega)|)$ – послідовність незалежних випадкових величин і виконується умова $\sum_{k=1}^{+\infty} \Delta_k < +\infty$ з деякою функцією розподілу F, $F(+0) < 1$, то:*
a) $R(\omega,(m_k)) = 1$ м.н. тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon\ \sum_{k=1}^{+\infty}(1 - F((1+\varepsilon)^{m_k})) < +\infty;$$

b) $R(\omega,(m_k)) = 0$ м.н. тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon\ \sum_{k=1}^{+\infty}(1 - F((1+\varepsilon)^{m_k})) = +\infty.$$

У випадку $F_k \equiv F$, тобто $(|a_k(\omega)|)$ – однаково розподілені, Теорема 2 збігається з наведеним в [1] твердженням.

1. Arnold L. Konvergenzprobleme bei zufälligen Potenzreihen mit Lücken // Math. Zeitschr. – 1966. – **92**. – S. 356–365.

Галина Снітко
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

snitkog@ukr.net

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ невідома функція, розглянуто обернену задачу визначення молодшого коефіцієнта, який має вигляд квадратичної функції за просторовою змінною з трьома невідомими параметрами $b_1(t), b_2(t), b_3(t)$, у параболічному рівнянні

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + (b_1(t)x^2 + b_2(t)x + b_3(t))u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_3(t), \quad \int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t),$$

$$\int\limits_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_5(t), \quad \int\limits_0^{h(t)} x^2u(x,t)dx = \mu_6(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Заміною змінних $y = \dfrac{x}{h(t)}$ задачу (1)–(4) зведено до оберненої задачі з невідомими $(h(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), v(y,t))$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області з фіксованою межею $Q_T = \{(y,t) :\ 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$. Знайдено умови локального існування та єдиності розв'язку задачі.

Andriy Solomko

Vasyl Stephanyk Precarpathian National University
ansolvas@rambler.ru

OPERATOR CALCULUS ON CONVOLUTION ALGEBRA OF GEVREY ULTRADISTRIBUTIONS

Let $\langle G'(\mathbb{R}^n_+), G(\mathbb{R}^n_+)\rangle$ be a duality, where $G(\mathbb{R}^n_+)$ is the space of ultradifferentiable Gevrey functions with supports in the cone $\mathbb{R}^n_+$ and $G'(\mathbb{R}^n_+)$ is its dual space of Gevrey ultradistributions. In the present talk we consider the construction of a continuous homomorphism of convolution algebra $G'(\mathbb{R}^n_+)$ of Gevrey ultradistributions onto a subalgebra in the algebra $L[\widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X)]$ of all linear continuous operators on the space $\widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X)$.

Let X be a Banach space. By $\{U_s : s \in \mathbb{R}^n_+\}$ we denote the n-parametric (C_o)-semigroup of operators on X with the set of generators $A := (A_1, \ldots, A_n)$. We define the space $\widehat{G}_\nu([0,b], X) := \big\{\widehat{x} = \int_0^b (U_s \otimes I_X) x(s) ds\big\}$, where $x(s) \in G_\nu([0,b], X)$ and

$$G_\nu([0,b], X) := \Big\{x : \operatorname{supp} x \subset [0,b], \|x\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}^n_+} \sup_{s\in[0,b]} \frac{\|\partial^k x(s)\|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty\Big\}$$

for fixed number $\aleph > 1$ and vectors $\nu, b \in \mathbb{R}^n_+, \nu \succ 1$. Further we set $G(\mathbb{R}^n_+, X) := \liminf_{|\nu|,|b|\to\infty} G_\nu([0,b], X)$ and $\widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X) := \liminf_{|\nu|,|b|\to\infty} \widehat{G}_\nu([0,b], X)$ endowed with the topology of inductive limit. The subspace $\widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X)$ is dense in X.

Let $L[\widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X)]$ be an algebra of linear continuous operators on $\widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X)$ with the strong operator topology.

Theorem. *The mapping* $\Phi : G'(\mathbb{R}^n_+) \ni f \longrightarrow \widehat{f}(A) \in L[\widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X)]$, *where the linear operator* $\widehat{f}(A)$ *is defined by the relation*

$$\widehat{f}(A) : \widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X) \ni \widehat{x} \longrightarrow \widehat{f}(A)\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n_+} (U_s \otimes T_f) x(s) ds$$

is a continuous homomorphism of the convolution algebra of Gevrey ultradistributions onto the commutant $[\widehat{U}_\sigma]^c$ *of the* (C_o)*-semigroup of operators* $\{\widehat{U}_\sigma := \mathcal{F}_A \circ (I_X \otimes U_\sigma) \circ \mathcal{F}_A^{-1} : \sigma \in \mathbb{R}^n_+\}$ *in the algebra* $L[\widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X)]$, *where* $\mathcal{F}_A : G(\mathbb{R}^n_+, X) \longrightarrow \widehat{G}(\mathbb{R}^n_+, X)$, $(T_f\varphi)(\tau) := \langle f(\sigma), U_\sigma \varphi(\tau)\rangle$, $\varphi \in G(\mathbb{R}^n_+)$ *and* $\{U_\sigma : \sigma \in \mathbb{R}^n_+\}$ *is* n*-parametric* (C_0)*-semigroup of shift operators on* $\mathbb{R}^n_+$.

Тетяна Соляр

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
tanya@iapmm.lviv.ua

КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ОСОБЛИВИХ ІНТЕГРАЛІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Під час розв'язування динамічних та температурних задач теорії пружності методом інтегральних рівнянь виникають інтеграли, що містять логарифмічні або Бесселя функції другого роду та їх похідні

$$(B(x,\, y), D(x,\, y)) = \int_L f(t)\left(Q(r), \frac{\partial Q(r)}{\partial n_M}\right) ds,$$

де L – гладкий контур, r – відстань між заданою точкою $M(x,\, y) \in L$ та точкою $(\xi,\, \eta) \in L$, за якою проводиться інтегрування, n_M – зовнішня нормаль до контуру L в точці M, $Q(r)$ – функція, яка може бути подана у вигляді $Q(r) = U(r) + \ln r V(r)$, $U(r)$ і $V(r)$ – гладкі і диференційовані функції на кривій інтегрування. Тут інтеграл D розглядається в сенсі головного значення за Коші.

Запишемо рівняння контуру L у параметричному вигляді $t = g(\theta)$, де $t = \xi + i\eta$. Квадратурні формули записано у вигляді

$$(B(x_\nu, y_\nu), D(x_\nu, y_\nu)) = h\sum\nolimits_{n=1}^{N} s'_n\,(b_{\nu n}, d_{\nu n})\, f_n + O(N^{-5}),$$

де $b_{\nu n} = Q(r_{\nu n})$, $n \neq \nu \pm 1, \nu$; $b_{\nu n} = Q(r_{\nu n}) + \delta V_0/(4\pi^2)$, $n = \nu \pm 1$;
$b_{nn} = U_0 + V_0\left[\ln\left(\left|s'_n\right|/N\right) - \delta/(2\pi^2)\right] - 2\delta(s'_n)^2 V_2/(N^2)$,
$d_{\nu n} = Q'(r)\;\partial r/\partial n_M|_{(x=x_\nu,\, y=y_\nu,\, \xi=\xi_n, \eta=\eta_n)}$, при $\nu \neq n$;
$d_{nn} = V_0 c_{nn} + V_2\beta_{nn}$, $f_n = f(x_n, y_n)$, $x_n + iy_n = g(\theta_n)$,
$r_{\nu n} = \sqrt{(x_\nu - x_n)^2 + (y_\nu - y_n)^2}$, $h = 2\pi/N$, $\theta_n = nh$, $s'(\theta) = |g'(\theta)|$, $U_0 = U(0)$. Тут прийнято, що розклад в ряд Тейлора для функції V в околі точки $r = 0$ має вигляд $V(r) = V_0 + V_2 r^2 + \cdots$.

Виконано дослідження квазістатичних температурних, в тому числі в'язкопружних, напружень у багатозв'язних пластинках з тепловіддачею, які нагріваються шляхом конвективного теплообміну середовищем змінної температури. Для розв'язування задачі використано перетворення Лапласа, модифікована формула його числового обернення та метод інтегральних рівнянь.

Тетяна Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
sopronyuk@gmail.com

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНУ МАТРИЦЮ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Розглядаємо систему зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{d\tau} = (a(\tau) + A(\varphi, \tau))x,\ \tau \neq \tau_j, \quad \Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon(b_j + B(\varphi, \tau_j))x, \qquad (1)$$

в якій $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$, τ_j – моменти імпульсної дії, $j \in \mathbb{Z}$, $\tau_{j+1} = \tau_j + \varepsilon\theta(\tau_j)$, $\theta(\tau)$ – гладка функція, $\theta_1 \leq \theta(\tau) \leq \theta_2$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ – малий параметр, матриці b_j – сталі.

Поряд з системою (1) розглядаємо задачу Коші

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + f(\varphi, \tau),\ \tau \neq \tau_j, \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon F(\varphi, \tau_j), \quad \varphi|_{\tau=t_0} = \psi,\ (2)$$

де $\psi \in \mathbb{R}^m, t_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Припустимо, що функції, які визначають праві частини (1) і (2), є l раз диференційовані за τ в області $(\varphi, \tau) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, обмежені деякою сталою σ_1, 2π-періодичні за кожною з координат φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, вектора φ і задовольняють певним обмеженням на коефіцієнти Фур'є.

Поставимо у відповідність системі (1) систему без імпульсної дії $\dfrac{dx}{d\tau} = A(\tau)x$, для матриціанта U_t^τ якої справджується оцінка

$$\|U_t^\tau\| \leq Ke^{-\gamma_0(\tau - t)}, \quad K \geq 1, \quad \gamma_0 > K\sigma_1/\theta_1, \quad \tau \geq t.$$

При певних обмеженнях на функцію $\theta(\tau)\omega(\tau)$ доведено існування таких додатних сталих $\gamma_{l+1} < \gamma_l < ... < \gamma_1 < \gamma_0 - \sigma_1 K/\theta_1$, $\mu < \dfrac{\gamma_1}{2l}$, досить малого $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma_1, ..., \gamma_{l+1})$ і досить великих $\underline{K}_2, ..., \underline{K}_{l+1}$, що для всіх $\tau \geq t \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $1 \leq r \leq l$ виконуються оцінки

$$\|\Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1(\tau - t)},$$

$$\left\| \frac{\partial^r}{\partial\varepsilon^r} \Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon) \right\| \leq \underline{K}_{r+1} \varepsilon^{\alpha - 2r} e^{-\gamma_{r+1}(\tau - t) + \mu r|t - t_0|}.$$

Тут $\Omega_t^\tau(\psi, t_0, \varepsilon)$ – матриціант лінійної системи (1), в якій $\varphi = \varphi_{t_0}^\tau(\psi, \varepsilon)$ є розв'язком задачі Коші (2), а α– додатна стала.

Олена Стара

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
olena_star@mail.ru

ПРО АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМ ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Розглядаємо систему лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{d^2x\left(t,\varepsilon\right)}{dt^2}+C\left(\tau,\varepsilon\right)\frac{dx\left(t,\varepsilon\right)}{dt}+B\left(\tau,\varepsilon\right)x\left(t,\varepsilon\right)+$$

$$+K\left(\tau,\varepsilon\right)\frac{dx\left(t-\Delta,\varepsilon\right)}{dt}+L\left(\tau,\varepsilon\right)x\left(t-\Delta,\varepsilon\right)=0, \tag{1}$$

де $x\left(t,\varepsilon\right)$ – n-вимірний вектор; $B\left(\tau,\varepsilon\right)$, $C\left(\tau,\varepsilon\right)$, $K\left(\tau,\varepsilon\right)$, $L\left(\tau,\varepsilon\right)$ – дійсні квадратні матриці n-го порядку, які можна зобразити збіжними рядами за степенями дійсного малого параметра ε, $\Delta>0$ – стале запізнення. Розглядаємо основну початкову задачу, тобто в півінтервалі $0<\tau=\varepsilon t\leq L<+\infty$ шукаємо розв'язок системи (1), який при $-\Delta\leq\tau\leq 0$ задовольняє умови

$$x\left(\tau,\varepsilon\right)=\varphi\left(\tau,\varepsilon\right),\quad x'\left(\tau,\varepsilon\right)=\varphi'\left(\tau,\varepsilon\right), \tag{2}$$

де $\varphi\left(\tau,\varepsilon\right)$ – вектор-функція, яка також має зображення у вигляді збіжного степеневого ряду.

Нехай виконуються умови.

1^0. Матриці $B\left(\tau,\varepsilon\right)$, $C\left(\tau,\varepsilon\right)$, $K\left(\tau,\varepsilon\right)$, $L\left(\tau,\varepsilon\right)$ та вектор $\varphi\left(\tau,\varepsilon\right)$ мають неперервні похідні до порядку $m+1$ включно (m – натуральне число) на сегментах $[0,L]$ та $[-\Delta,0]$ відповідно.

2^0. Характеристичне рівняння

$$\det\left\|\lambda^2\left(\tau\right)E+\lambda\left(\tau\right)C_0\left(\tau\right)+B_0\left(\tau\right)\right\|=0$$

на сегменті $[0,L]$ має лише прості корені $\lambda_1\left(\tau\right)$, $\lambda_2\left(\tau\right)$, $\ldots$, $\lambda_{2n}\left(\tau\right)$.

3^0. Для будь-якого $\tau\in[0,L]$

$$\mathrm{Re}\lambda_i\left(\tau\right)\leq 0,\quad i=1,2,...,2n.$$

За умов 1^0-3^0 побудовано асимптотичні формули для розв'язку основної початкової задачі (1)–(2) на кожному кроці $\left(r-1\right)\Delta\leq\tau\leq r\Delta$, де $r\geq 1$.

Анжела Стехун

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
angela_stehun@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – непрерывная и медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – односторонняя окрестность Y_0.

Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям

$$y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty \end{cases} \quad (k = 1, 2), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t) y'(t)} = \lambda_0.$$

Ранее в [1] и других работах автора изучался вопрос об асимптотике $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений существенно нелинейного уравнения

$$y''' = \alpha_0 p(t) |y|^\sigma L(y) \quad (\sigma \neq 1).$$

При этом случай $\sigma = 1$ выпал из рассмотрения, поскольку не охватывался методикой исследования.

Для случая уравнения (1) получены необходимые и достаточные условия существования всех возможных типов $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений, а также асимптотические представления для таких решений и их производных первого и второго порядков.

1. Евтухов В.М., Стехун А.А. Асимптотические представления неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2004. – **47**, №4. – С. 82–87.

Юлія Стець, Мирослав Шеремета

Львівський національний університет імені Івана Франка
YuliaStets@mail.ru, m_m_sheremeta@list.ru

ПРО РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $(\lambda_0 = 0)$, а ряд Діріхле $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$, $\quad s = \sigma + it$, має нульову абсцису абсолютної збіжності. Для $\sigma < 0$ приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$. R-порядком ряду Діріхле називається величина $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$, а за умови $0 < \varrho_R < \infty$ величина $T_R = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} \exp\{-\varrho_R/|\sigma|\} \ln\ M(\sigma, F)$ називається R-типом. В [1] доведено, що якщо $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \ln\ln n/\ln\lambda_n < 1$, то

$$T_R = \varrho_R e^{\delta-1}, \quad \delta = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\varrho_R \lambda_n} \ln \frac{\lambda_n}{\ln^2 \lambda_n} - 1\right) \ln \lambda_n. \tag{1}$$

Нашою метою є знаходження умов на (λ_n) і (a_n), за яких

$$\ln M(\sigma, F) = T_R(1 + o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho_R}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{2}$$

Правильна така теорема.

Теорема. *Якщо* $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2} \lambda_n)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$T_R = \frac{\varrho}{e} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n \ln^2 \lambda_n} |a_n|^{\ln^2 \lambda_n/\varrho\lambda_n} \tag{3}$$

і для правильності асимптотичної рівності (2) необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, T)$ *існувало таке число* $n_0(\varepsilon)$, *що* $\ln |a_n| \leq \frac{\lambda_n \varrho_R}{\ln^2 \lambda_n} \ln \left(\frac{(T_R+\varepsilon)e}{\varrho_R} \lambda_n \ln^2 \lambda_n\right)$ *для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$ *та існувала зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що* $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_{k+1}}/\lambda_{n_k} = 1$ *і* $\ln |a_{n_k}| \geq \frac{\lambda_n \varrho_R}{\ln^2 \lambda_{n_k}} \ln \left(\frac{(T_R-\varepsilon)e}{\varrho_R} \lambda_{n_k} \ln^2 \lambda_{n_k}\right)$ *для всіх* $k \geq k_0$.

Зауважимо, що формула (3) збігається з формулою (1).

1. Шеремета М.Н.,Федыняк С.И. О производной ряда Дирихле // Сибирск. матем. журн. – 1998. – **39**, N 1. – С. 206–223.

Катерина Стєпанова

Інститут прикладної математики та механіки НАН України
stepanova@iamm.ac.donetsk.ua

СКІНЧЕННІСТЬ ШВИДКОСТІ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ НОСІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В обмеженій області Ω простору $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ вивчаються деякі якісні властивості розв'язку задачі Коші-Неймана для досить широкого класу нелінійних еволюційних рівнянь із частинними похідними, що містять вироджений абсорбційний потенціал. Досліджується залежніть між властивістю розповсюдження носія розв'язку та степенем виродження абсорбційного потенціалу. Знайдені достатні умови на характер виродження потенціалу, при виконанні яких узагальнений розв'язок задачі має властивість скінченності швидкості розповсюдження носія. Для доведення цих тверджень використовуються інтегральні оцінки (див. з цього приводу [1–4]) та оцінки Сен-Венанівського типу (див. [5] та літературу, що там наведена).

1. Diaz J.I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – **290**, №2. – P. 787–814.
2. Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S.I. The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. – 1995. – **4**, №6. – P. 5–30.
3. Shishkov A., Kersner R. Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // Journal of Math. Anal. And Appl. – 1996. – **198**. – P. 729–750.
4. Belaud Y., Shishkov A.E. Long-time extinction of solutions of some semilinear parabolic equations // Journal of Differential Equations. – 2007. – **238**. – P. 64–86.
5. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. Аналог принципа Сен - Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // УМН. – 1976. – **31**, №6. – С. 142–166.

Ольга Сушко

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
sushko@iapmm.lviv.ua

ЗАСТОСУВАННЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТІЛА З ТЕПЛОАКТИВНОЮ ЕЛІПТИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ

Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності тіла з плоскою теплоактивною тріщиною S, на якій задано температуру $T(x)$ або тепловий потік $q(x)$, зводяться до розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{4\pi\lambda}\iint\limits_S \frac{w(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S = T(x), \quad x = x(x_1, x_2), \quad \xi = \xi(\xi_1, \xi_2), \tag{1}$$

$$\iint\limits_S \frac{\alpha_3(\xi)}{|x-\xi|^3} d_\xi S = -(1+\nu)\alpha_t T(x), \tag{2}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, $\omega(\xi)$ – інтенсивність теплових джерел (стоків) в області S, $|x-\xi| = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}$ – віддаль між точками $x(x_1, x_2)$ і $\xi(\xi_1, \xi_2) \in S$, $4\pi\alpha_3(x) = \left[u_3^+(\xi) - u_3^-(\xi)\right]$ – стрибки переміщень поверхонь тріщини, через які визначається коефіцієнт інтенсивності напружень, ν і α_t – коефіцієнти Пуассона і теплопровідності. Рівняння (1) має необмежений розв'язок при довільній правій частині, а рівняння (2) — обмежений. Коли область S – еліпс, а праві частини цих рівнянь поліноми степеня n по x_1 і x_2, то їх розв'язки записуються відповідно у вигляді $w(x) = \psi(x)/L(x)$, $\alpha_3(x) = \omega(x)L(x)$, де $L(x)$ – рівняння еліпса, $\psi(x)$ і $\omega(x)$ – поліноми степеня n, коефіцієнти яких визначаються із системи алгебричних рівнянь. Рівняння (1) і (2) розв'язуються також і аналі-тично-числовим методом. Спочатку використовується взаємноодно-значне відображення еліптичної області з півосями a і b на круг одиничного радіуса

$\begin{cases} x_1 = ay_1 \\ x_2 = by_2 \end{cases}$, $\begin{cases} \xi_1 = a\eta_1 \\ \xi_2 = b\eta_2 \end{cases}$, де y_1, y_2 – декартові координати точок одиничного круга. Сингулярні складові наведених рівнянь регуляризуються, будується їх регулярне зображення, а потім і дискретний аналог у вигляді системи лінійних алгебричних рівнянь з добре обумовленою матрицею.

Оксана Тарасенко, Василь Яковець

Ніжинський державний університет ім. М. Гоголя
Університет менеджменту освіти
oxana.tarasenko@gmail.com, vasyl.yakovets@gmail.com

ПРО РОЗВ'ЯЗОК СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Розглядається задача про побудову оптимального керування $u(t,\varepsilon)$ та відповідної оптимальної траєкторії $x(t,\varepsilon)$ у вигляді розвинень за степенями малого параметра ε при переході процесу

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int\limits_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u, \tag{2}$$

з стану $x(0,\varepsilon) = x_0(\varepsilon)$ в стан $x(T,\varepsilon) = x_1(\varepsilon)$ за фіксований час T, де $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ – $(n \times m)$ та $(m \times m)$-матриці відповідно, $x(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор стану, $u(t,\varepsilon)$ – m-вимірний вектор керування, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ – малий параметр; $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$. Вважаємо, що матриця $B(t,0)$ тотожно вироджена на заданому відрізку.

Використовуючи результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем з виродженнями, проведеного в [1], та принцип максимуму Л.С. Понтрягіна, доведено, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок та побудовано його асимптотику. Досліджено різні випадки, пов'язані з поведінкою спектра граничної в'язки матриць.

1. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

Роман Тацій, Віктор Мазуренко

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mazvic@ukr.net

ПРО БАГАТОТОЧКОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

У доповіді мова йтиме про необхідні і достатні умови існування та єдиності розв'язку багатоточкової задачі

$$Y' = A'(x)Y + F'(x), \tag{1}$$

$$LY \equiv \sum_{i=1}^{s} M_i Y(x_i) + \int_a^b dH(x)Y(x) = Q. \tag{2}$$

де $Y(x)$ – невідома розмірності n вектор-функція, елементи $(n\times n)$-матриці $A(x)$ і $(m\times n)$-матриці $H(x)$ та компоненти вектора $F(x)$ є неперервними справа функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації $(BV^+[a,b])$; диференціювання і рівність в (1) розуміються в узагальненому сенсі; M_i і Q — сталі матриці розміру $m\times n$ і $m\times 1$ відповідно, $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_s \le b$. Припускаємо виконання умов коректності $[\triangle A(x)]^2 = 0$, $\triangle A(x)\triangle F(x) = 0$ $\forall\, x \in [a,b]$, за яких при дослідженні системи (1) не виникає проблема множення розподілів, та умов $\triangle H(x)\triangle A(x) = 0$, $\triangle H(x)\triangle F(x) = 0$ $\forall\, x \in [a,b]$, котрі забезпечують існування інтеграла Рімана–Стільтьєса в (2).

Нехай $(m\times n)$-матриця $L_B = \sum\limits_{i=1}^{s} M_i B(x_i,a) + \int\limits_a^b dH(x)B(x,a)$, де $B(x,s)$ — матриця Коші однорідної системи, $Y^*(x) = \int\limits_a^x B(x,s)dF(s)$, L_B^+ — псевдообернена до L_B $(n\times m)$-матриця Мура-Пенроуза (зокрема, $L_B L_B^+ L_B = L_B$, а для невиродженої матриці $L_B^+ = L_B^{-1}$).

Теорема. *Розв'язок* $Y \in BV^+[a,b]$ *задачі* (1), (2) *існує і має вигляд* $Y(x) = B(x,a)\left[L_B^+(Q - LY^*) + (E_n - L_B^+ L_B)C\right] + Y^*(x)$, *де* C — *довільний сталий вектор, якщо і тільки якщо справджується умова* $(E_m - L_B L_B^+)(Q - LY^*) = 0$. *Для єдиності розв'язку цієї задачі необхідно і досить виконання додаткової умови* $L_B^+ L_B = E_n$.

Наслідок. *При* $m = n$ *задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\det L_B \neq 0$.

Yuriy Teplinskiy

Ivan Ogiyenko National University, Kam'yanets-Podilsky
yuriy-teplinsky@yandex.ru

INFINITE-DIMENSIONAL INVARIANT TORI FOR COUNTABLE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

It is known that investigation of invariant sets (in particular, invariant tori) occupies an important place both in the theory of continuous dynamical systems (flows) and the theory of discrete dynamical systems (cascades) defined in various normed spaces. In the last four decades, numerous fundamental results were obtained in this field of mathematics with the use of the method of the Green function of the problem of an invariant torus of a linear expansion of a dynamical system proposed by A.M. Samoilenko in 1970 (see [1]). In [2], this method was used for the investigation of invariant tori of countable systems of ordinary differential equations defined on tori. In the last ten years, several works were published (see [3]) in which this method was used for the investigation of invariant tori of countable systems of difference equations.

In the presented lecture, in the space of bounded number sequences, we pose and solve the problem of finding sufficient conditions for the existence of invariant tori for linear and nonlinear countable systems of differential-difference equations defined on infinite-dimensional tori and containing an infinite set of constant different-sign deviations of a scalar argument. This problem has never been investigated before in the mathematical literature.

1. A. M. Samoilenko, On the theory of preservation of an invariant torus under perturbations // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. – 1970. – **34**, N . – P. 1219–1240.
2. A. M. Samoilenko and Yu. V. Teplinskiy, Countable Systems of Differential Equations. – Springer, 2003.
3. A. M. Samoilenko and Yu. V. Teplins'kyi, Elements of Mathematical Theory of Evolution Equations in Banach Spaces [in Ukrainian]. – Kyiv: Institute of Mathematics, 2008.

Іван Тимків

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
tymkiv_if@ukr.net

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В області $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \Omega\}$, $\Omega = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, для системи рівнянь, параболічних за Шиловим, розглянемо задачу

$$L(\partial/\partial t, \partial/\partial x)\vec{u} := \sum_{r=0}^{n} \sum_{|s|\le \ell} A_{rs} \frac{\partial^{r+|s|}\vec{u}(t,x)}{\partial t^r \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = 0, \tag{1}$$

$$\vec{u}(t_j,x) = \vec{\varphi}_j(x),\ j = 1,\dots,n,\ 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T, \tag{2}$$

де $A_{rs} = \|a_{rs}^{ij}\|_{i,j=1}^{m}$, $a_{rs}^{ij} \in \mathbb{C}$, $A_{n,\vec{0}}$ – одинична матриця, $n < \ell$. Для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ ξ-корені рівняння $\det\|L(\xi, i\eta)\| = 0$ задовольняють оцінки $Re\xi_q(\eta) \le -C_1|\eta|^\delta + C_2$, $\delta > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $q = \overline{1,nm}$. Позначимо: $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $k \in \mathbb{Z}^p$; $E_{\alpha,\beta}^\delta$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, – простір вектор-функцій $\vec{\varphi}(x) = col(\varphi^1(x),\dots,\varphi^m(x))$, $\varphi^j(x) = \sum_{|k|\ge 0}\varphi_k^j \exp(ik,x)$, з нормою $\|\vec{\varphi}; E_{\alpha,\beta}^\delta\|^2 = \max\limits_{1\le j\le m} \sum_{|k|\ge 0} |\varphi_k^j|^2(1+|k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^\delta) < \infty$; $\Delta(k) = \det\|h_q^r(k)\exp(\mu_q(k)t_j)\|_{q=1,\dots,nm}^{j=1,\dots,n,\ r=1,\dots,m}$, де $\mu_q(k)$ – корені рівняння $\det\|L(\mu, ik)\| = 0$, які вважаємо різними для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $\vec{h}_q(k) = col(h_q^1(k),\dots,h_q^m(k))$ – деякий ненульовий стовбець матриці $L^*(\mu_q(k), ik)$, яка є приєднаною до матриці $L(\mu_q(k), ik)$, $q = \overline{1,nm}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1),(2) у просторі $C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta}^\delta)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \Delta(k) \ne 0. \tag{3}$$

Теорема 2. *Нехай справджується умова (3) та існують додатні сталі ν та ω такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність $|\Delta(k)| \ge (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\nu|k|^\delta)$. Якщо $\vec{\varphi}_j \in E_{\alpha_1,\beta_1}^\delta$, $\alpha_1 = \alpha+\omega+n\ell+n(m-1)(nm-1)\ell$, $\beta_1 = \beta+\nu-(nm-1)C_1t_1$, то існує розв'язок задачі (1),(2) з простору $C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta}^\delta)$, який неперервно залежить від вектор-функцій $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = \overline{1,n}$.*

Юрій Токовий

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
tokovyy@gmail.com

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ НАПІВБЕЗМЕЖНИХ БАГАТОШАРОВИХ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

У даній роботі метод безпосереднього інтегрування [1] застосовано до розв'язування двовимірної стаціонарної задачі теплопровідності для півплощини, теплофізичні характеристики якої змінюються у перпендикулярному до границі напрямку за наявності джерел тепла та різних типів крайових умов. З використанням методики [2] розв'язування рівняння теплопровідності з невідомими змінними коефіцієнтами зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, розв'язок якого будується з використанням методу резольвентного ядра [3]. У результаті розв'язок задачі знайдено у вигляді явної функціональної залежності від заданих на границі значень температури чи теплового потоку та густини розподілу внутрішніх джерел тепла. Застосування такого підходу не накладає обмежень на функціональний характер залежності властивостей матеріалу від координати місця точки, що дозволяє аналізувати різноманітні типи неоднорідності, зокрема, багатошарових неоднорідних у кожному шарі структур.

Роботу виконано за підтримки спільного наукового проекту НАН України та Російського ФФД № 0110U004143.

1. Вігак В.М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності // Доповіді НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62-67.

2. Tokovyy Y., Ma C.-C. Analytical solutions to the 2D elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes // Archive of Applied Mechanics. – 2009. – **79**, № 5. – P. 441-456.

3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1983 – 544 с.

Юрій Токовий, Юрій Лозинський

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
georglozynsky@gmail.com

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЗУСИЛЛЯМИ ТА ПЕРЕМІЩЕННЯМИ НА ПОВЗДОВЖНІХ СТОРОНАХ ОДНОРІДНОЇ ПРУЖНОЇ СМУГИ

На основі інтегрування рівнянь суцільності Коші та явного розв'язку плоскої задачі теорії пружності в напруженнях [1] для однорідної ізотропної смуги встановлено взаємно-однозначні відповідності між зусиллями та переміщеннями на її повздовжніх сторонах. Задавши на сторонах смуги зовнішні зусилля, на основі розв'язку [1] знайдено вирази для компонент тензора напружень. За допомогою інтегрування рівнянь Коші та фізичних співвідношень переміщення виражено через напруження, а отже, через згадані вище зусилля. Отримані співвідношення дозволяють визначати невідомі переміщення через задані зусилля, і навпаки. Таким чином показано, що для розв'язку задач теорії пружності для смуги за заданих на її сторонах переміщеннях, зусиллях чи змішаних крайових умовах [2] достатньо мати в розпорядженні розв'язок відповідної задачі у напруженнях (за заданих на границі зовнішніх зусиль), який знайдено у роботі [1].

1. Вігак В.М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності і термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – №12. – С. 62–67.
2. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

Larissa Fardigola

Institute for Low Temperature Physics and Engineering NASU
fardigola@ukr.net

INFLUENCE OPERATORS IN CONTROLLABILITY PROBLEMS FOR THE WAVE EQUATION ON A HALF-AXIS

Consider the wave equation: (1) $w_{tt} = w_{xx} - q^2 w$, $x > 0$, $t \in (0,T)$, controlled by the Dirichlet boundary condition: (D) $w(0,t) = u(t)$ or the Neumann one: (N) $w_x(0,t) = u(t)$, $t \in (0,T)$, where $q \geq 0$ is a given constant, $u \in L^\infty(0,T)$ is a control, $T > 0$. We consider an extension W of the state (w, w_t) of control systems (1D) and (1N) on $\mathbb{R}$ with respect to x. For (1D) the extension is odd and $W(\cdot,t)$ is considered in the subspace $\mathbf{H}^0$ of odd functions of the Sobolev space $H_0^0 \times H_0^{-1}$, $t \in (0,T)$. For (1N) the extension is even and $W(\cdot,t)$ is considered in the subspace $\mathbf{H}^1$ of even functions of $H_0^1 \times H_0^0$, $t \in (0,T)$. We study approximate L^∞-controllability of control systems (1D) and (1N) at a free time in the space $\mathbf{H}^s$, where $s = 0$ for (1D), and $s = 1$ for (1N).

Definition. *For control system (1D) (or (1N)) a state $W^0 \in \mathbf{H}^s$ is said to be approximately L^∞-controllable if $W(\cdot,0) = W^0$ and for each $\varepsilon > 0$ there exist $T > 0$ and $u \in L^\infty(0,T)$ such that $\|W(\cdot,T)\| < \varepsilon$.*

Influence of a control u on the steering state $W(\cdot,T)$ of control system (1D) (or (1N)) is described by operators Φ and $\widehat{\Phi} = \Phi\left(\frac{d}{dt}(\operatorname{sgn} t\,\cdot)\right)$. It is proved that the behavior of systems (1D) and (1N) in the case $q > 0$ essentially differs from their behavior in the case $q = 0$.

Theorem. *For (1D) and (1N) the following assertions hold:*
(i) If $q = 0$, then a state $W^0 = (W_0^0, W_1^0) \in \mathbf{H}^s$ is approximately L^∞-controllable iff $W_1^0 = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sgn} x\, W_0^0\right)$.
(ii) If $q > 0$, then each state $W^0 \in \mathbf{H}^s$ is approximately L^∞-controllable.

This difference is generated by the properties of the influence operators Φ and $\widehat{\Phi}$. In fact, $\mathcal{N}(\Phi) = \{0\} = \mathcal{N}(\widehat{\Phi})$ if $q = 0$ and $\mathcal{N}(\Phi) \neq \{0\} \neq \mathcal{N}(\widehat{\Phi})$, $\overline{\Phi\left(\mathcal{N}(\widehat{\Phi})\right) \times \widehat{\Phi}\left(\mathcal{N}(\Phi)\right)} = \mathbf{H}^s$ if $q > 0$. Here $\mathcal{N}(\cdot)$ is the null space of an operator. Moreover, the cases (1D) and (1N) differ too. For (1D) the domains of Φ and $\widehat{\Phi}$ are closed and their ranges are not closed but vice versa for (1N). That is why we have to construct controls solving approximate L^∞-controllability problem in different ways for these cases.

Василь Федорчук

Педагогічний університет ім. Комісії Нар. Освіти, Польща
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
vasfed@gmail.com, fedorchuk@up.krakow.pl

ПРО СИМЕТРІЙНУ РЕДУКЦІЮ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕТРИВІАЛЬНОЮ СИМЕТРІЄЮ

При розв'язуванні різних задач теоретичної та математичної фізики, механіки, газової динаміки та ін. важливу роль відіграють диференціальні рівняння з нетривіальною симетрією (див., наприклад, [1, 2]).

Для побудови та дослідження таких рівнянь можна використовувати методи групового аналізу [1, 2, 3]. Зокрема, беручи до уваги нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів різних порядків неспряжених підгруп локальних груп Лі точкових перетворень, можна будувати класи диференціальних рівнянь відповідних порядків у просторах різних вимірностей, які інваріантні відносно цих підгруп. Для проведення симетрійної редукції побудованих класів диференціальних рівнянь можна використати підгрупову структуру груп симетрії цих класів (див., наприклад, [2]). Виявляється, що для деяких з побудованих в такий спосіб класів можна провести певну симетрійну редукцію без вивчення підгрупової структури груп симетрії цих класів.

В цьому повідомленні мова йтиме про дослідження тільки таких класів для симетрійної редукції яких можна використати інваріанти їх груп симетрії. Встановлено умови, при яких така редукція є можлива.

1. Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen/ Bearbeitet und herausgegeben von Dr. G. Scheffers. – Leipzig: B.G. Teubner, 1891.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

Володимир Федорчук

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
volfed@gmail.com

ПРО СИМЕТРІЙНУ РЕДУКЦІЮ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З НЕТРИВІАЛЬНОЮ СИМЕТРІЄЮ

Один із способів побудови диференціальних рівнянь першого порядку з нетривіальними групами симетрії (див., наприклад, [1, 2]) базується на використанні функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку відповідних груп Лі точкових перетворень.

Узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$ є групою поворотів та зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Добре відомо, що група $P(1,4)$ містить як підгрупи такі важливі для теоретичної та математичної фізики групи: $P(1,3)$, $\widetilde{G}(1,3)$ [3], $O(1,4)$, $E(4)$, $O(4)$.

На основі нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп розширеної групи Галілея $\widetilde{G}(1,3)$ побудовано класи диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1,4) \times R(u)$, які інваріантні відносно цих підгруп.

У цьому повідомленні мова йтиме про симетрійну редукцію тільки таких з побудованих класів, для дослідження яких можна використати інваріанти їх груп симетрії. Для всіх таких класів, беручи до уваги ці інваріанти, побудовано анзаци, які редукують ці класи до класів диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, проведена відповідна симетрійна редукція.

1. Lie S. Über Differentialinvarianten // Math. Ann. – 1884. – **24**, N 1. – S. 52–89.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

Віктор Ферук

Інститут математики НАН України
feruk@imath.kiev.ua

ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

Розглядається задача

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = f(t) + C(t)\lambda, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$x(0) = \gamma + Dx(T), \quad \int\limits_0^T S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{2}$$

де $P(t)$, $C(t)$ і $S(t)$ — матриці розмірності $m \times m$, $m \times l$ і $l \times m$ відповідно, елементи яких сумовні з квадратом на відрізку $[0, T]$, причому стовпці матриці $C(t)$ є лінійно незалежними, D — стала $(m \times m)$-матриця, $f \in L_2([0, T], \mathbb{R}^m)$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$, $\gamma \in \mathbb{R}^m$.

За допомогою запропонованого у роботі [1] підходу до дослідження задачі (1), (2) дається обгрунтування можливості застосування до цієї задачі проекційно-ітеративного методу, суть якого полягає в тому, що наближені розв'язки задачі (1), (2) визначаються за формулами

$$\frac{dx_k}{dt} + A(t)x_k = y_k(t), \quad x_k(0) = \gamma + Dx_k(T),$$

$$y_k(t) = C(t)\lambda_k + f(t) + (A(t) - P(t))(x_{k-1}(t) + \delta_k(t)),$$

$$\frac{d\delta_k}{dt} + A(t)\delta_k = \Phi(t)\mu_k, \quad \delta_k(0) = D\delta_k(T),$$

$$\int\limits_0^T S(t)x_k(t)dt = \alpha, \quad \int\limits_0^T \Psi(t)(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k)dt = 0.$$

Методика, що розглядається у доповіді, може бути перенесена на випадок, коли рівняння (1) та умови (2) є нелінійними.

1. Лучка А.Ю., Ферук В.А. Побудова наближених розв'язків систем диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 3. – С. 361–378.

Анна Фесенко

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
fesenco@breezein.net

ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ КРУГОВОГО ШТАМПА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЙ СЛОЙ

Пусть имеется полубесконечная плита $x > 0$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < h$, на гранях $x = 0$, $z = 0$ которой заданы условия скользящей заделки, а на грань $z = h$ помещен круговой штамп, который под действием внешней силы вдавливается в плиту. Сила прилагается с эксцентриситетом таким образом, чтобы штамп перемещался поступательно. Неизвестную величину этого поступательного смещения и эксцентриситет следует находить из условий равновесия штампа.

При решении смешанной задачи теории упругости получено вертикальное перемещение точек слоя под действием сосредоточенной в произвольной точке грани $z = h$ силы, на основании которого можно найти смещения упругой плиты при воздействии на нее распределенной по круговому штампу нагрузки. Приравняв это смещение к поступательному перемещению штампа, получим интегральное уравнение относительно неизвестного контактного напряжения $p(\rho, \psi)$. Плоскость ZOY является плоскостью симметрии, и потому контактное напряжение будет четным относительно полярного угла. Это значит, что можно задать его в виде $p(\rho, \psi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \cos n\psi$.

Используя метод ортогональных многочленов, функцию $p_n(\rho)$ представляем в виде разложения по многочленам Якоби. Далее получаем бесконечную двумерную систему уравнений

$$p_{kj} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} T_{nlkj} p_{nl} = f_{kj}, \quad k, j = 0, 1, ...,$$

которая решается редукцией на основании теории, изложенной в [1].

1. Попов Г.Я. Основы теории двумерных бесконечных систем // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2010. – **53**, №2. – С. 17–27.

Петро Філевич

ЛНУВМБТ ім. С. З. Ґжицького
filevych@mail.ru

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ, МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ ПОХІДНОЇ І ЦЕНТРАЛЬНИМ ІНДЕКСОМ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – трансцендентна ціла функція, $r > 0$, $M_f(r) = \{|f(z)| : |z| = r\}$ – максимум модуля, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ – максимальний член, $\nu_f(r) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$ – центральний індекс і $k_f(r) = rM_{f'}(r)/M_f(r)$.

Добре відомим (див., наприклад, [1], с. 212) є наступне класичне співвідношення Вімана-Валірона: $K_f(r) \sim \nu_f(r)$, $E_f \not\ni r \to +\infty$, де $E_f \subset (1, +\infty)$ – множина скінченної логарифмічної міри.

В [2] розглянуто питання про можливість встановлення асимптотичного співвідношення між $K_f(r)$ і $\nu_f(r)$ без виняткової множини. Тут, зокрема, доведено, що якщо $a_n \geq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то

$$C_f := \varliminf_{r \to +\infty} \frac{K_f(r)}{\sqrt{\nu_f(r)}} \geq \sqrt{2}, \qquad (1)$$

і побудовано приклад цілої функції з невід'ємними коефіцієнтами, для якої нерівність (1) перетворюється у рівність.

Як виявляється, близька до (1) оцінка виконується для кожної цілої функції (без жодних умов на коефіцієнти).

Теорема. *Для довільної f правильна нерівність $C_f \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$.*

Покладемо $C = \inf_f C_f$. Згідно зі сказаним вище, $\frac{1}{\sqrt{e}} \leq C \leq \sqrt{2}$. Питання про точне значення сталої C залишається відкритим.

Використовуючи поняття випадкової цілої функції, доведено, що для "більшості"(в сенсі ймовірнісної міри) цілих функцій правильна нерівність: $K_f(r) \geq (\nu_f(r))^{\frac{2}{3}-\varepsilon}$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $r \geq r_0(\varepsilon)$.

1. Валирон Ж. Аналитические функции. – М.: ГИТТЛ, 1957.
2. Філевич П.В., Шеремета М.М. Співвідношення між логарифмічною похідною і центральним індексом степеневого ряду з невід'ємними коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2003. – №4. – С. 31–36.

Андрей Филимонов

Московский государственный университет путей сообщения
amfilimonov@yandex.ru

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ДИСКРЕТНЫМИ И НЕПРЕРЫВНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

В докладе обсуждается вопрос о соотношении между дискретными и непрерывными математическими моделями в различных областях.

Классическим примером проблемы связи между дискретными и непрерывными моделями можно считать знаменитую дискуссию между Даламбером, Эйлером, Бернулли и Лагранжем о связи между колебаниями непрерывной струны и нити с бусинами. В частности, Лагранж совершил *формальный* предельный переход в решении соответствующей системы из N обыкновенных дифференциальных уравнений при $N \to \infty$. В результате получено *правильное* решение волнового уравнения, описывающего колебания непрерывной струны. Это породило убежденность в том, что при достаточно большом N колебания нити с N бусинами похожи на колебания непрерывной струны. Однако в последствии выяснилось [1], что, несмотря на хорошую изученность этого вопроса, здесь возможны и некоторые совершенно неожиданные эффекты. Оказалось, в частности, что решения соответствующих задач могут отличаться тем сильнее, чем больше число бусин N.

Еще большую область занимает проблема взаимосвязей между непрерывными и дискретными моделями в нелинейном случае – достаточно упомянуть известную проблему Ферми-Паста-Улама. При анализе этой проблемы ярко проявилась разница между „физическим“ и „математическим“ подходами к переходу от дискретных моделей к непрерывным. Помимо переоткрытия солитонов, эта проблема стимулировала изучение вопроса о возможности продолжимости решений гиперболических систем квазилинейных уравнений. В последующем изучение континуальных аппроксимаций дифференциально-разностных уравнений в физических моделях привело к новым постановкам задач (аналоги многоточечных задач типа задачи Николетти).

1. Filimonov A. M., Kurchanov P. F., Myshkis A. D. // Computes Rendus Acad. Sci. Paris. – 1991. – **313**, Serie 1. – P. 961–965.

Тарас Фірман

Львівський національний університет імені Івана Франка
tarasfirman91@ukr.net

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

В області $D = \{(x,t) : 0 < t < T, -\infty < x < +\infty\}$ розглянемо задачу Коші для зліченної гіперболічної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x,t,u_1,u_2,...,u_n,...),\ i \in \{1,...\}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_i(x,0) = g_i(x),\ i \in \{1,...\}. \tag{2}$$

Справедлива така теорема.

Теорема. *Нехай вихідні дані задачі (1),(2) задовольняють умови:*
1) $\lambda_i(x,t) \in C(D) \cap \mathrm{Lip}_{x,loc}(D),\ i \in \{1,...\}$;
2) $g_i(x) \in C^1(\mathbb{R}),\ \sup\limits_i |g_i(x)| < \infty,\ i \in \{1,...\}$;

3) $F_i(x,t,u_1,u_2,...,u_n,...) \in C((-\infty,+\infty)\times(0,T)),\ i \in \{1,...\}$ *при фіксованих* $u_1,u_2,...,u_n,...$;

4) $F_i(x,t,u_1,u_2,...,u_n,...)$ *задовільняють умову Коші-Ліпшиця за змінними* $u_1,u_2,...,u_n,...$:

$$|F_i(x,t,u_1',u_2',...,u_n',...) - F_i(x,t,u_1'',u_2'',...,u_n'',...)| \le \alpha(x,t)\cdot\Delta u,$$

$i \in \{1,...\}$, *де* $\Delta u = \sup\limits_i |u_i' - u_i''|$, $\alpha(x,t)$ *– деяка неперервна функція*;

5) $|F_i(x,t,0,0,...,0,...)| \le \beta(x,t)$, $\beta(x,t)$ *– деяка неперервна функція.*

Тоді в D існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2).

Узагальненість розв'язку розглянуто у сенсі [1]. Для доведення теореми використано підхід, запропонований в [2].

1. Аболиня В. Э., Мышкис А. Д. Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Матем. сб. – 1960. – **50**, Вып. 4. – С. 423–442.
2. Самойленко А. М., Теплинський Ю. В. Счетные системы дифференциальных уравнений. – К.: Ин-т математики, 1993. – 308с.

Kateryna Khalina

Institute for Low Temperature Physics and Engineering
khalina@meta.ua

ON CONTROLLABILITY PROBLEMS FOR THE WAVE EQUATION ON A HALF-AXIS

Consider the following control system on a half–axis: (1). $w_{tt} = w_{xx} - q(x)w,\ x > 0, t \in (0,T)$; (2). $w(0,t) = u(t), t \in (0,T)$. Here $u \in L^\infty(0,T)$ is a control; $q \in C^1[0,\infty)$, $\int_0^\infty x|q(x)|\,dx < \infty$. For this control system we consider the initial conditions (3). $w(x,0) = w_0^0(x)$, $w_t(x,0) = w_1^0(x)$, $x > 0$ and suppose that $w^0 = \begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix} \in H_{0,o}^0 \times H_{0,o}^{-1}$. ($H_{0,o}^s$ is the subspace of odd functions in the Sobolev space H_0^s, $s = 0, -1$.) We consider the solution of (1)–(3) in H_0^0. Let Ω be the odd extension operator. Denote $\hat{w}(\cdot,t) = \Omega w(\cdot,t)$, and $w^T = \begin{pmatrix} w_0^T \\ w_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}(\cdot,T) \\ \hat{w}_t(\cdot,T) \end{pmatrix}$.

Definition. *A state w^0 is called null-controllable if there exists $u \in L^\infty(0,T)$ such that $w^T = 0$, and approximately null-controllable if there exists $u \in L^\infty(0,T)$ such that $||w^T||_0^0 < \varepsilon$.*

Note that a time $T > 0$ may depend on ε. We use the transformation operators on the half–axis that save at infinity the solution asymptotics of the Sturm–Liouville equation. They were studied in [1]. We denote by $\mathcal{K}$ and $\mathcal{L} = \mathcal{K}^{-1}$ adjoint operators and study them in $H_{0,o}^s$, $s = 0, -1$. The application of the adjoint operators reduces the given problem to the problem with $q = 0$ that was investigated by G.M. Sklyar and L.V. Fardigola in 2002. Using their results we obtain the following theorems.

Theorem 1. *A state w^0 is approximately null-controllable iff the following conditions hold: $(i).w_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $(ii).w_1^0 = \mathcal{L}(sign\, t\, \mathcal{K}w_0^0)'$ on $\mathbb{R}$. The control u is given by the formula $u = \mathcal{K}w_0^0$ on $[0,T]$, where T is defined by the condition $\int_T^\infty |(\mathcal{K}w_0^0)(x)|^2\,dx < \varepsilon^2$.*

Theorem 2. *A state w^0 is null–controllable iff (i), (ii) hold and there exists $T > 0$ such that $supp\,(\mathcal{K}w_0^0) \subset [-T,T]$. Under these conditions the control that solves the null–controllability problem is of the form $u = \mathcal{K}w_0^0$ a.e. on $(0,T)$.*

1. Marchenko V.A. Sturm-Liouville operators and applications. – Basel-Boston-Stuttgart: Birkhauser Verlag, 1986.

Роман Хапко

Львівський національний університет імені Івана Франка
chapko@is.lviv.ua

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

Розглядається задача визначення стаціонарного температурного поля на межі Γ включення за відомими даними Коші на зовнішній границі Λ двозв'язної обмеженої області D.

Припускається, що функція температури $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ задовольняє однорідне рівняння Лапласа в D. Відповідні дві лінійні обернені задачі полягають в наступному.
A) *Вимірювання даних Неймана.* Нехай функція (температура) f_1 задана на зовнішній межі Λ і на частині $\Sigma \subset \Lambda$ відомий тепловий потік f_2, тобто виконуються крайові умови

$$u = f_1 \quad \text{на } \Lambda \qquad \text{і} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на } \Sigma.$$

Розглядається обернена задача: визначити дані Коші на межі Γ.
B) *Вимірювання даних Діріхле.* Нехай функція (тепловий потік) f_2 задана на зовнішній межі Λ і на частині $\Sigma \subset \Lambda$ відома температура f_1, тобто виконуються крайові умови

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на } \Lambda \qquad \text{і} \qquad u = f_1 \quad \text{на } \Sigma.$$

Обернена задача: визначити дані Коші на межі Γ.

Для визначення температури і потоку на межі включення пропонується безпосереднє використання граничних інтегральних рівнянь в поєднанні з регуляризацією Тихонова. Подаючи розв'язок задачі у формі потенціалу простого шару з функцією Гріна, після задоволення умови на Σ отримується інтегральне рівняння першого роду з неперервним ядром відносно густини на Γ. Чисельне розв'язування інтегрального рівняння здійснюється методом квадратур з регуляризацією Тихонова. За допомогою знайденої густини на межі Γ дані Коші визначаються через значення потенціалу та його нормальної похідної. Наведені приклади чисельних експериментів.

Федір Чабан, Віталій Стельмащук
Львівський національний університет імені Івана Франка
cfedir@gmail.com

ПОБУДОВА ЧИСЛОВИХ СХЕМ МСЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПІРОЕЛЕКТРИКІВ

Застосування „розумних матеріалів“, зокрема п'єзоелектриків та піроелектриків, знаходить все ширше застосування в сучасній техніці. Це зумовлює необхідність розробки адекватних засобів комп'ютерного моделювання поведінки сконструйованих зразків. На розробці таких засобів сконцентровано увагу у даній роботі. В основу пропонованих розробок покладено рівняння теорії піроелектриків [1, 3, 4] та числові схеми методу скінченних елементів (МСЕ) [2–5]. Зокрема, для початково-крайових задач теорії піроелектриків сфор-мульовано варіаційну задачу, виконано напівдискретизацію за просто-ровою змінною та побудовано однокрокову рекурентну схему (ОРС) інтегрування в часі. Для задач статики, з використанням міркувань наведених в [5], побудовано h-адаптивну схему МСЕ для одновимірної задачі. Побудовані схеми реалізовано у вигляді програмного забезпе-чення, з допомогою якого досліджено модельовану поведінку піро-електричних стержнів.

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 157 с.
2. Чабан Ф. Числове моделювання взаємодії механічного й електричного полів у п'єзоелектрику // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні тех. – 2010. – №12. – С. 170–179.
3. Шинкаренко Г. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. 1. Постановка задачи и анализ установившихся вынужденных клебаний // Диф. уравнения. – 1993. – **29**, №7. – С. 1252–1260.
4. Шинкаренко Г. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. 2. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач // Диф. уравнения.– 1994. – **39**, №2. – С. 317–326.
5. Chaban F., Shynkarenko H. Constructing of h-adaptive finite element method for piezoelectricity problem // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – №1. – P. 1–9.

Ярослав Чабанюк, Павло Горун, Уляна Ярка

Національний університет „Львівська політехніка“
Pawlissimo@gmail.com

АСИМПТОТИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ГЕНЕРАТОРА СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ ОПТИМІЗАЦІЇ В МАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації з марковськими переключеннями в схемі серій задається співвідношенням [2]

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon)-1} a_k^\varepsilon \nabla_b C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(0) = u,\ u \in R^d, \tag{1}$$

де $\nabla_b C(u,x)$ – псевдоградієнт [1], $x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon)$ – марковський процес [2].

Нехай $V(u)$ – функція Ляпунова для усередненої системи $du(t)/dt = a\nabla C(u(t)),\ C(u) = q\int_X \rho(dx)C(u,x)$.

Лема. *Генератор $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ процедури (1) на збуреній функції Ляпунова $V^\varepsilon(u,x) = V(u) + \varepsilon a(t) V_1(u,x)$ такій, що $V(u) \in C^3(R^d)$, має асимптотичне зображення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)\langle \nabla_b C(u), \nabla_u \rangle V(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L(x)V(u),$$

де $\theta_L(x)V(u) = \theta_0(x)V(u) + \theta_1(x)V(u)$,
$\theta_0(x)V(u) = \langle \nabla_b C(u,x), \nabla_u \rangle [q(x)R_0 + \Pi - I]\langle \nabla_b \widetilde{C}(u,x), \nabla_u \rangle V(u)$,
$\theta_1(x)V(u) = \frac{1}{2}q(x)\langle \nabla_b C(u,x), \nabla_u \rangle^2 V(\alpha u), 0 \le \alpha \le 1$,
$\widetilde{C}(u,x) = q(x)C(u,x) - C(u)$.

1. Горун П.П., Чабанюк Я.М., Кукурба В.Р. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі. //XVI International Conference „Problems of decision making under uncertainties“ (October 4-8, 2010). – Київ: Освіта України. – С. 54.
2. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 p.

Ярослав Чабанюк, Віктор Кукурба, Сергій Семенюк, Ірина Подун

Національний університет „Львівська політехніка“
yaroslav_chab@yahoo.com

АСИМПТОТИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ГЕНЕРАТОРА СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Неперервна процедура стохастичної оптимізації у напівмарковському середовищі задається еволюційним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)\nabla_b C(u^{\varepsilon}(t), x(t))dt, \tag{1}$$

де псевдоградієнт $\nabla_b C(u,x) = \{(C(u_i^+, \cdot) - C(u_i^-, \cdot))/2b(t), i = 1, ..., d\}$, $u \in R^d$, $\pi(B), B \in \mathbf{X}$, – стаціонарний розподіл рівномірно ергодичного напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$, що задається напівмарковським ядром $Q(x, B, t) = P(x, B)G_x(t)$, де $G_x(t)$ – функція розподілу часу перебування в стані $x \in X$.

Супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t \geq 0$, задається генератором $\mathbf{Q}$ [1], для якого існує потенціал R_0 [2].

Нехай $V(u)$ функція Ляпунова для усередненої градієнтної системи $du/dt = C(u)$, $C(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x)$.

Лема. Компенсуючий оператор $\mathbf{L}_t^{\varepsilon}$ [1] процедури (1) на збуреній функції Ляпунова $V^{\varepsilon}(u,x) = V(u) + \varepsilon V_1(u,x)$, $V(u) \in C^2(R^d)$, має представлення

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x) = a(t)\nabla_b C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^{\varepsilon}(x,t)V(u),$$

де $V_1(u,x) = a(t)R_0\nabla_b\tilde{C}(u,x)V'(u)$, $\tilde{C}(u,x) := [C(u) - C(u,x)]$.
При цьому залишковий оператор $\theta_0^{\varepsilon}(t)$ обмежений:

$$||\theta_0^{\varepsilon}(x,t)V(u)|| < C < \infty.$$

1. Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. – World Scientific Publishing. – 2005. – 330 p.
2. Чабанюк Я.М. Неперервна процедура стохастичної апроксимації у напівмарковському середовищі // Укр. мат. жур. – 2004. – **56**, №5. – С. 713–720.

Ірина Чернега

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
icherneha@ukr.net

СУБСИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ НА ПЕРЕСТАВНО-ІНВАРІАНТНИХ ПРОСТОРАХ ФУНКЦІЙ

Нехай X – банахів простір над полем дійсних або комплексних чисел, G – напівгрупа ізометричних операторів на просторі X. Функція f з простору X називається *симетричною відносно* G (або G-*симетричною*,) якщо $f(\sigma(x)) = f(x)$ для кожного $\sigma \in G$. Важливим прикладом є випадок, коли $X = \ell_p$ $(1 \le p < \infty)$ і $G = \mathcal{G}$ – група перестановок на множині натуральних чисел. В літературі $\mathcal{G}$-симетричні функції на ℓ_p називають *симетричними*. Іншим важливим прикладом є випадок, коли $X = \ell_p$ і $G = \mathfrak{G}$ – напівгрупа, породжена ізометричними операторами β_i,

$$\beta_i\colon (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots). \tag{1}$$

$\mathfrak{G}$-симетричні функції в літературі називають *субсиметричними*. Субсиметричні поліноми досліджувались, зокрема, в роботах [1, 2].

Позначимо через E переставно-інваріантний простір функцій

$$E = L_1[0, \infty) \cap L_\infty[0, \infty)$$

з нормою

$$\|x\|_E = \max\{\|x\|_{L_1[0,\infty)}, \|x\|_{L_\infty[0,\infty)}\}.$$

Для простору E ми вводимо ізометричні оператори, які є аналогом операторів β_i, що визначаються формулою (1), та означуємо субсиметричні функції на E. Наводимо приклад полінома, який є субсиметричним, але не симетричним, а також досліджуємо спектр (множину всіх комплексних гомоморфізмів) алгебри субсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі E.

1. Gonzalo R. Multilinear forms, subsymmetric polynomials and spreading models on Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – **202**. – P. 379–397.
2. Hájek P. Polynomial algebras on classical Banach spaces // Israel J. Math. – 1998. – **106**. – P. 209–220.

Мирон Чернець, Віктор Береза, Юрій Чернець

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
chernets@drohobych.net

ПРОГНОЗУВАННЯ ДОВГОВІЧНОСТІ КОСОЗУБОЇ КОНІЧНОЇ ЕВОЛЬВЕНТНОЇ ПЕРЕДАЧІ ЗА ЗМІНИ МОДУЛЯ

Прогнозування ресурсу зубчастих передач на стадії проектування має важливе значення для інженерної практики. Конічні зубчасті передачі, зокрема косозубі, знаходять широке застосування у механічних передачах різного призначення. Для розрахунку впливу кута нахилу зубів та модуля зачеплення використано метод, розроблений у праці [1]. У результаті розв'язку задачі про контактну взаємодію зубів з їх зношуванням внаслідок тертя ковзання встановлено характер залежності довговічності передачі від кута нахилу зубів. Показано, що вона зростає при $\beta = 20^0$ понад трикратно у порівнянні із прямозубою передачею. Також встановлено, що із зростанням модуля зачеплення $m = 4, 5, 6$ мм довговічність передачі зростає до 2,5 разів. Розглянуто випадки однопарного та двопарного зачеплення зубів.

1. Чернець М.В., Келбінські Ю., Береза В.В. Метод прогнозної оцінки зношування конічних передач з косими зубами // Проблеми трибології. – 2009. – №4. – С. 6–13.

Мирон Чернець, Володимир Жидик

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
chernets@drohobych.net

МОДЕЛЮВАННЯ КВАЗІСТАТИЧНОЇ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ У ПІДШИПНИКУ КОВЗАННЯ З МАЛИМ ЗБУРЕННЯМ КОНТУРІВ ТІЛ

Під час виготовлення деталей підшипників ковзання (вал, втулка) виникає мала технологічна некруглість їх контурів різного виду (овальність, тригранність, чотиригранність). Встановлено [1], що вона виявляє значний вплив на величину і розподіл контактних тисків. У залежності від величини некруглості та взаєморозташування тіл можливим буде однообластевий, одно - двообластевий (змішаний) чи двообластевий контакт. У роботі досліджено випадок змішаної квазістатичної взаємодії вала з овальністю з коловим отвором у втулці. Встановлено з розв'язку задачі характер зміни максимальних контактних тисків за повний оберт вала. Виявлено їх циклічну зміну, яка суттєво залежить від величини його овальності, у порівнянні з підшипником з коловим перерізом вала. Варіація тисків за найбільшої можливої його овальності при заданому радіальному зазорі знаходиться у діапазоні від 0,06 до 2,47 раза. Пік контактних тисків виникає у зонах двообластевого контакту. Мінімум тисків спостері-гається на межі переходу однообластевого співдотику у двообластевий.

1. Чернець М.В. Методологія оцінки характеристик контакту та прогнозування циліндричних трибосистем ковзання // Проблеми трибології. – 2000. – №1. – С. 14–22.

Мирон Чернець, Роман Ярема

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
chernets@drohobych.net

ПРОГНОЗУВАННЯ ДОВГОВІЧНОСТІ КОСОЗУБОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ЕВОЛЬВЕНТНОЇ ПЕРЕДАЧІ ЗА НАЯВНОСТІ КОРИГУВАННЯ ЗАЧЕПЛЕННЯ

Математичне моделювання перебігу процесів руйнування вузлів тертя внаслідок зношування в процесі експлуатації має важливе значення для практики. Широко застосовуваними в різноманітного виду механічних пристроях є зубчасті передачі, які з часом втрачають здатність нормально функціонувати. З метою прогнозування на етапі проектування довговічності цього типу передач авторами використано розроблений метод [1] розрахункової оцінки зношування евольвентних передач. Для врахування впливу коригування зачеплення, за рахунок якого може зростати як міцність, так і довговічність зубів, проведено модифікацію цього методу. За результатами числового розв'язку задачі з оцінки довговічності силової косозубої циліндричної тягової передачі приводу залізничного локомотива ВЛ-10 встановлено, що висотне коригування зубів приводить до: зниження навантаження на зуби і, відповідно, підвищення їх контактної і згинної міцності, що є позитивним; зниження або ж підвищення довговічності коригованої передачі у порівнянні з некоригованим зачепленням, зокрема для кутів нахилу зубів 50. . . .200 спостерігаються оптимальні значення коефіцієнтів зміщення, за яких на 32-16% підвищується довговічність; для кута 24,5170, що притаманний реальній передачі, коригування зачеплення знижує довговічність передачі на 25% і тому його застосо-вувати недоцільно. Таким чином вперше показано, що вплив коригу-вання на довговічність косозубих циліндричних передач є неодно-значним, бо може спричиняти як її підвищення, так і зниження.

1. Чернець М.В., Келбіньскі Ю. Расчетная оценка износа и ресурса эвольвентных цилиндрических передач // Проблеми трибології. – 2001. – №4. – С. 151–159.

Michel Chipot

Institut für Mathematik, Universität Zürich
m.m.chipot@math.uzh.ch

ELLIPTIC PROBLEMS IN UNBOUNDED DOMAINS

We would like to study existence and uniqueness of the solution of problems set in unbounded cylinders (joint work with S. Mardare).

Оксана Чмир

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
o_chmyr@yahoo.com

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ $\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = |u|^q t^\gamma$ В КЛАСІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею S класу C^∞, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = S \times (0, T]$, $0 < T < +\infty$;

$$\varrho(x,t) = \begin{cases} \varrho_1(x) & \text{при } d(x) \to 0, \\ \sqrt{\varrho_2(t)} & \text{при } t \to 0, \\ 1, & \text{всередині області } Q, \end{cases}$$

де $\varrho_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, додатна в Ω, має порядок відстані $d(x)$ від точки x до S біля S та $\varrho_1(x) \le 1$, $x \in \overline{\Omega}$;
$\varrho_2(t)$, $t \in (0, T]$, – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, додатна при $t \in (0, T]$, має порядок t при $t \to 0$ та $\varrho_2(t) \le 1$, $t \in (0, T]$;
$0 \le \varrho(x,t) \le 1$, $(x,t) \in \overline{Q}$.

Нехай
$D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \ \frac{\partial^m}{\partial t^m}\varphi \mid_{t=T} = 0, \ m = 0, 1, \dots\}$,
$D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$.

Штрихами позначатимемо простори лінійних неперервних функціоналів на відповідних функціональних просторах.

Введемо функціональний простір
$\mathcal{M}_k(Q) = \{\mathrm{v} \in L^1_{loc}(Q) : ||\mathrm{v}||_k = \int\limits_Q \varrho^k(x,t)|\mathrm{v}(x,t)|\, dxdt < +\infty\}$, $k \in \mathbb{R}$.

Розглянемо узагальнену крайову параболічну задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^q t^\gamma, \ (x,t) \in Q,$$

$$u \mid_\Sigma = F_1(x,t), \ (x,t) \in \Sigma, \qquad u \mid_{t=0} = F_2(x), \ x \in \Omega,$$

де $q \in (0,1)$, $\gamma \in (-1; 0)$, $F_1 \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_2 \in (D_0(\overline{\Omega}))'$.

За допомогою принципу Шаудера встановлено достатні умови розв'язності цієї задачі у просторі $\mathcal{M}_k(Q)$.

Олена Шавала

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
Shavala@ukr.net

ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ $f'' + A(z)f = 0$

Досліджуються властивості голоморфних в одиничному крузі $U = \{z : |z| < 1\}$ розв'язків рівняння

$$f'' + A(z)f = 0, \tag{1}$$

де A – функція, голоморфна в U.

Теорема. *Для будь-якої послідовності (λ_n) різних комплексних чисел з круга U, яка задовольняє умови*

$$\sum_j (1 - |\lambda_j|) < +\infty, \qquad \inf \left\{ \prod_{j \neq k} \left| \frac{\lambda_k - \lambda_j}{1 - \overline{\lambda_j}\lambda_k} \right| : k \right\} = \delta > 0,$$

та довільної обмеженої послідовності комплексних чисел (b_n) існує голоморфна в U функція A така, що рівняння (1) має голоморфний і обмежений в U розв'язок f, що задовольняє умову

$$f(\lambda_n) = b_n.$$

У випадку, коли $b_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$, ми отримуємо результат з [1].

1. Heittokangas J. Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ in the unit disk having Blaschke sequences as the zeros // Computational Methods and Function Theory. – 2005. – **5**, №1. – P.49–63.

Богдан Шаваровський

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
shavarb@iapmm.lviv.ua

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

Нехай $N(x) \in M_n(F[x])$, де F – поле. Розглянемо перетворення матриці $N(x) \to CN(x)Q(x)$, де $C \in GL_n(F)$, $Q(x) \in GL_n(F[x])$, які у праці [1] називаються напівскалярно еквівалентними. У цілому задача класифікації поліноміальних матриць відносно вказаних перетворень є досить складною. Тому її розв'язують у часткових випадках. Один з таких випадків, коли визначник матриці має вигляд $a(x-\alpha)^m$, розглядається у цьому повідомленні. Якщо матриця має лише один неодиничний інваріантний множник, то задача розв'язана у праці [2]. Там вказана канонічна форма. Коли жодні два інваріантні множники не збігаються, вдалося лише уточнити відому трикутну форму матриці [1] та вказати систему її інваріантів. Далі вважатимемо, що визначник матриці має вигляд ax^m. Розглядаються матриці з формою Сміта $diag(1,\ x^l,\ \ldots,\ x^l)$. Тоді $N(x)$ зводиться до вигляду

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ a_1(x) & x^l & & \\ & & \ddots & \\ \ldots & & & \\ a_{r-1}(x) & & & x^l \end{array} \right\| \oplus x^l E_{n-r}, \qquad (1)$$

де E_{n-r} – одинична матриця, $a_i(x) = x^{l_i} + a_{i1}x^{l_i+1} + \ldots + a_{i,\ l-l_i-1}x^{l-1}$, $i = 1,\ \ldots,\ r-1$, $0 < l_1 < \ \ldots \ < l_{r-1} < l$, $a_{i,\ l_{i+1}-l_i} = a_{i,\ l_{i+2}-l_i} = \ \ldots \ = a_{i,\ l_{r-1}-l_i} = 0$. Числа $l_1,\ \ldots,\ l_{r-1}$ та r визначаються однозначно. Якщо $2l_1 \geq l$, то матриця (1) визначається однозначно і вона може вважатися канонічною. Якщо ж $2l_1 < l$, то тоді також вказується канонічна форма.

1. Казімірський П.С., Петричкович В.М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теор. та прикл. питання алгебри і диф. рівнянь. – Київ: Наукова думка, 1977. – С. 61–66.
2. Шаваровский Б.З. Каноническая форма многочленной матрицы с одним элементарным делителем относительно полускалярно эквивалентных преобразований // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – №10. – С. 32–35.

Олександр Шаповаловський

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
shap.ov@mail.ru

ПРО НЕОБХІДНІ УМОВИ ПОВНОТИ СИСТЕМ ЕКСПОНЕНТ З ВАГОЮ, ЯКА ПОРОДЖЕНА УТОЧНЕНИМ ПОРЯДКОМ ЗА БУТРУ

Нехай p – ціле невід'ємне число, $1 < p < p_1 \leq p_2 < p+1$. Через $p(t)$ позначимо неперервно-диференційовну на $[0;+\infty)$ функцію, для якої існують границі

$$\lim_{t\to\infty} tp'(t)\ln t = 0,$$

$$\varliminf_{t\to+\infty} p(t) = p_1, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} p(t) = p_2.$$

Нехай $\varphi(t)$ – функція обернена до $\varphi^{-1}(t) = t^{p(t)-1}$ і $q(t) = 1 + \frac{\ln\varphi(t)}{\ln t}$. Тоді

$$\varphi(t) = t^{q(t)-1}, \lim_{t\to+\infty} tq'(t)\ln t = 0,$$

$$\varliminf_{t\to+\infty} q(t) = q_1, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} q(t) = q_2.$$

Теорема. *Нехай (λ_n) – послідовність різних додатних чисел з єдиною граничною точкою на нескінченності. Тоді, якщо*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{q(\lambda_n)}} > \frac{d}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2q_2}\right)^{q_2}, \quad d\in[0;+\infty),$$

то система

$$\left\{\exp\left(-\frac{|t|^{p(|t|)}}{p_1\,(dq_1)^{p_1-1}} - it\lambda_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

повна в $L^2\,(-\infty;+\infty)$.

1. Седлецкий А.М. Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, II // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2003. – **6**. – С. 3–162.
2. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В. Про одну теорему єдиності для цілих функцій, пов"язану з повнотою систем експонент з вагою на осі // Математичні студії. – 2005. – **23**, № 2. – С. 161–168.

Наталья Шарай, Владимир Шинкаренко

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
Одесский государственный экономический университет
rusnat@i.ua, shinkar@te.net.ua

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, БЛИЗКИХ К ЛИНЕЙНЫМ

Исследуется дифференциальное уравнение

$$y''' = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^{\sigma} \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}, \sigma \in \mathbb{R}, p : [a, \omega) \to (0, +\infty)$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$.

При $\sigma = 0$ уравнение (1) является линейным. Асимптотические свойства таких уравнений подробно исследованы в работе [1]. При $\sigma \neq 0$ уравнение является асимптотически близким к линейному и не охватывается результатами указанной работы. Асимптотика решений уравнения второго порядка вида (1) была исследована в работе [2].

Решение y уравнения (1), заданое на промежутке $[t_y, \omega) \subset [a, \omega)$, будем называть $P_\omega(\lambda_0)$-решением, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t \to \omega} y^{(k)}(t) = \{or 0, or \pm \infty,\},\ k = 0, 1, 2,\ \lim_{t \to \omega} \frac{(y'')^2}{y''' y'} = \lambda_0$$

Раннее были исследованы асимптотические свойства $P_\omega(\lambda_0)$-решений в случае $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. В настоящем докладе речь пойдет о необходимых и достаточных условиях существования в уравнения (1) $P_\omega(\lambda_0)$-решений в критических случаях, когда $\lambda_0 = 0$. Получены также асимптотические представления при $t \to \omega$ для всех таких решений.

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
2. Evtukhov V.M., Mousa Jaber Abu Elshour, Asymptotic behavior of solutions of second order nonlinear differential equations close to linear equations // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. – 2008. – **43**. – P. 97–106.

Володимир Шаран

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
volsharan@ukr.net

ПРО ГЕОМЕТРИЧНІ УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ОДНІЄЇ КРАТНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Розглядається кратна інтерполяційна задача у класі B_η – голоморфних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій $f \not\equiv 0$, для яких $(\exists c > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \le c \exp\left(\eta(c|z|)\right)$, де $\eta : [0; +\infty) \to (0; +\infty)$ – зростаюча неперервно диференційовна на $[0; +\infty)$ функція для якої $(\exists c_0)\,(\forall t \ge 0)\ :\ \eta(t) \ln \eta(t)/t\eta'(t) \le c_0$ і $\lim\limits_{t\to+\infty} \eta(t) = +\infty$. Отримано критерій розв'язності кратної інтерполяційної задачі в класі B_η в термінах міри, породженої вузлами інтерполяції.

Теорема 1. *Для того щоб для кожної послідовності комплексних чисел $(b_{n,j})$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1; \ldots; s_n\}$, яка задовольняє умову*

$$(\exists c_1) : \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{\eta\left(c_1 |\lambda_n|\right)} \ln \max_{1\le j\le s_n} \frac{\left(\min\{1; \mathrm{Re}\lambda_n\}\right)^{j-1} |b_{n,j}|}{(j-1)!} \right\} < +\infty,$$

існувала така функція $f \in B_\eta$, що $f^{(j-1)}(\lambda_n) = b_{n,j}$, $j \in \{1; \ldots; s_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$(\exists c_2) : \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{s_n}{\eta(c_2 |\lambda_n|)} \ln \frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{\min\{1; \mathrm{Re}\lambda_n\}} \right\} < +\infty,$$

$$(\exists c_3)\,(\forall \delta > 0) : \ \sup_{z\in\mathbb{C}_+} \left\{ \frac{\mathrm{Re} z}{|z|\,\eta\left(c_3 |z|\right)} \int_0^\delta \frac{s_z\left(t\,|z|\right) dt}{t\left(t\,|z| + \mathrm{Re} z\right)^2} \right\} < +\infty,$$

де $s_z(t\,|z|) = \sum\limits_{\substack{|z-\lambda_k|<t|z| \\ |\lambda_k|\le 1,\ \lambda_k\ne\lambda_n}} s_k \mathrm{Re}\lambda_k + \sum\limits_{\substack{|z-\lambda_k|<t|z| \\ |\lambda_k|>1,\ \lambda_k\ne\lambda_n}} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|}$, *$\lambda_n$ – найближча до z точка носія дивізора $\{(\lambda_n; s_n)\}$.*

Зауважимо, що критерій розв'язності кратної інтерполяційної задачі в класі B_η в термінах канонічних добутків отримано нами в [1].

1. Шаран В. Л. Кратна інтерполяційна задача в класі голоморфних у півплощині функцій як завгодно швидкого зростання // XIII наукова конф. ім. акад. М.Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010). Матер. конф. – Т. 2. – К., 2010. – С. 286.

Сергій Шарин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
sharynsir@yahoo.com

ОПЕРАТОРНЕ ЧИСЛЕННЯ ТИПУ ХІЛЛЕ-ФІЛІПСА В КЛАСІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ

Операторне числення Хілле-Філіпса було розвинуто у відомій монографії [1].

Нехай X — банахів простір. Згорткову алгебру ультрарозподілів Жевре з носіями на півосі $[0,+\infty)$ позначимо $\mathcal{G}'_+$. Нехай $\mathcal{P}(\mathcal{G}'_+ \otimes_{\mathfrak{p}} X)$ — мультиплікативна алгебра поліномів над тензорним добутком $\mathcal{G}'_+ \otimes X$, поповненим у проективній тензорній топології $\mathfrak{p}$.

Для елементів з сильно спряженого простору $\mathcal{P}'(\mathcal{G}'_+ \otimes_{\mathfrak{p}} X)$ ми будуємо операторне числення типу Хілле-Філіпса.

Доповідь базується на спільних дослідженнях з О. Лопушанським [2].

1. Hille E., Phillips R. S. Functional Analysis and Semigroups // Rev. Ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. – **31**. – Amer. Math. Soc., 1957.
2. Lopushansky O.V., Sharyn S.V. Polynomial ultradistributions on cone $\mathbb{R}^d_+$ // Topology. – 2009. – **48**, N 2-4. – P. 80–90.

Роман Швець, Олесь Яцків, Богдан Бобик

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
viktsya@gmail.com

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ВАЛУ З ТОНКИМ ПРИПОВЕРХНЕВИМ ШАРОМ ЗА НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ЙОГО ТЕПЛОВІ ТА ФРИКЦІЙНІ ПАРАМЕТРИ

Трибологічні характеристики вузлів машин і механізмів в значній мірі визначаються структурою і фізико-механічними параметрами приповерхневих шарів ділянок контакту, а також розподілом в них температури і напружень.Теплофізичні властивості тіл в області контакту можуть змінюватись,тому актуальною є розробка підходів до визначення їх напружено-деформованого стану за невідомих межових теплофізичних параметрів. Для вузла тертя у вигляді довгого цилінд-ричного валу, приповерхневий шар якого має неоднакові з основним матеріалом валу теплофізичні властивості, та жорсткої обойми запро-поновано модель контактної фрикційної взаємодії з тепловиділенням від тертя. Сформульовано взаємозв'язану контактну задачу термопружності з некласичними нестаціонарними гранично-контактними умовами і побудовано спеціальну структуру розв'язку. На її основі у вигляді операторного співвідношення з інтегральним оператором за часом типу Вольтерри та інтегральним оператором усереднення за товщиною циліндра встановлено зв'язок між значеннями поверхневої температури і межовими теплофізичними параметрами, а також коефіцієнтом тертя. Проаналізовано нестійкість щодо малих похибок задання вхідних даних оберненої задачі ідентифікації параметрів, якщо в дискретні моменти часу задаються значення температури поверхні. Знайдено інтервали зміни параметрів, для яких відхилення значень температури будуть відрізнятись від вхідних даних не більше ніж на деяку наперед задану величину. Вивчено точність визначення параметрів залежно від інтервалів часу та від величин цих параметрів, зокрема поблизу стану термопружної нестійкості контакту [1].

1. Яцкив А.И., Швец Р.Н., Бобык Б.Я. Термонапряженное состояние вала при нестационарных условиях фрикционного контакта с обоймой через тонкий слой // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 155-162.

Роман Шевчук

Львівський національний університет імені Івана Франка
r.v.shevchuk@gmail.com

ПАРАБОЛІЧНА ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ

Нехай $D_m = \{x \in \mathbb{R} : (-1)^m x > 0\}$, $m = 1, 2$, $\partial D = \{0\}$ – межа областей D_1та D_2, $\overline{D}_m$ – замикання D_m, T – деяке фіксоване додатне число. Припустимо, що в D_m, $m = 1, 2$, задано неоднорідний дифузійний процес, який визначається диференціальним оператором другого порядку $A_s^{(m)}$, $s \in [0, T]$, що діє на множині $C^{(2)}_{\text{рівн}}(\overline{D}_m)$ всіх функцій f, обмежених і рівномірно неперервних на $\overline{D}_m$ разом зі своїми похідними першого та другого порядків:

$$A_s^{(m)} f(x) = \frac{1}{2} b_m(s, x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + a_m(s, x) \frac{df(x)}{dx}, \quad m = 1, 2,$$

де коефіцієнт дифузії $b_m(s, x)$ і коефіцієнт переносу $a_m(s, x)$ є обмеженими та неперервними функціями для $(s, x) \in [0, T] \times \overline{D}_m$, до того ж $b_m(s, x) > 0$.

Ставиться задача побудови мультиплікативної сім'ї операторів T_{st}, $0 \le s < t \le T$, що описують всі феллерівські процеси на $\mathbb{R}$, які в областях D_1 і D_2 збігаються з дифузійними процесами, керованими операторами $A_s^{(1)}$ і $A_s^{(2)}$ відповідно. Цю задачу ще часто називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів. При дослідженні задачі ми використовуємо такі аналітичні методи, що зводять її розв'язання до дослідження відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Зауважимо, що одна з двох умов спряження, які задаються на спільній межі ∂D областей D_1 і D_2, означає, що оператори T_{st} залишають конус неперервних функцій інваріантним, а друга умова відповідає загальній крайовій умові Феллера-Вентцеля для одновимірних дифузійних процесів [1].

1. Вентцель А.Д. Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // ДАН СССР. – 1956. – **111**, №2. – С. 269–272.

Ірина Шепарович

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
isheparovych@ukr.net

ПРО НУЛІ ГОЛОМОРФНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО η-ТИПУ

Нехай η – додатна, неперервна, зростаюча і необмежена функція; (λ_n) – послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 1$.

Розглянемо клас функцій, голоморфних в одиничному крузі $D = \{z : |z| < 1\}$, які задовольняють умову

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall z \in D) : |f(z)| \leqslant \exp\left(A\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right)\right). \qquad (1)$$

Правильне таке твердження.

Теорема. *Якщо (λ_n) є послідовністю нулів голоморфної в одиничному крузі функції з класу (1), то*

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall r \in (0;1)) : N(r) \leqslant A\eta\left(\frac{B}{1-r}\right),$$

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall r_1 \in (0;1))(\forall r_2 \in [r_1;1))(\forall k \in \mathbb{N}) :$$

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{r_1<|\lambda_n|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_n^k}\right| \leq \frac{A}{r_1^k}\eta\left(\frac{B}{1-r_1}\right) + \frac{A}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k(1-r_2)}\right\}\eta\left(\frac{B}{1-r_2}\right),$$

де

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}dt; \quad n(t) = \sum_{|\lambda_n|\leqslant t} 1.$$

1. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – **96**. – P. 53–91

Олег Шлепаков

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
oleg@gavrilovka.com.ua

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО И БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}) \quad (i=\overline{1,n-1}), \\ y_n' = \alpha_n p_n(t)\varphi_1(y_1), \end{cases} \tag{1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1,1\} \quad (i=\overline{1,n})$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[\quad (i=\overline{1,n})$ – непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to]0;+\infty[\quad (i=\overline{1,n})$ ($\Delta(Y_i^0)$ – некоторая односторонняя окрестность точки Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$) – дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i'(z) \neq 0 \text{ при } z \in \Delta(Y_i^0), \quad \lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta(Y_i^0)}} \varphi_i(z) = \Phi_i^0, \quad \lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta(Y_i^0)}} \frac{\varphi_i''(z)\varphi_i(z)}{[\varphi_i'(z)]^2} = \gamma_i,$$

где $\prod_{i=1}^n (1-\gamma_i) \neq 1$, $\Phi_i^0 \in \{0,+\infty\}$.

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1), заданное на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, будем называть $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$-решением, если функции $u_i(t) = \varphi_i(y_i(t))$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} u_i(t) = \Phi_i^0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{u_i(t)u_{i+1}'(t)}{u_i'(t)u_{i+1}(t)} = \Lambda_i \quad (i=\overline{1,n-1}).$$

Для системы (1) в случае, когда $\Lambda_i \neq 0$, $i=\overline{1,n-1}$, получены необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$-решений. Также, при $t\uparrow\omega$, получены асимптотические представления вида

$$\frac{\varphi_i(y_i(t))}{\varphi_i'(y_i(t))\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = Q_i(t)[1+o(1)], \quad i=\overline{1,n},$$

где Q_i – некоторые точно определяемые через коэфициенты p_i функции, $i=\overline{1,n}$.

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985.

Володимир Щедрик

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
shchedrykv@ukr.net

ПРОСТІШИЙ ВИГЛЯД МАТРИЦЬ СТОСОВНО ОДНОСТОРОННІХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

При розв'язуванні деяких матричних задач, зокрема, задачі факторизації матриць, виникає необхідність описувати всі неасоційовні матриці з наперед заданою канонічною діагональною формою. Класична форма Ерміта не підходить для таких цілей, бо дозволяє описувати неасоційовні матриці з наперед заданим визначником. В пропонованій роботі зроблено перший крок до побудови такої нормальної форми матриці стосовно односторонніх перетворень, з якої відразу було б видно канонічну діагональну форму цієї матриці.

Нехай R адекватна область і $A - n\times n$ матриця над R з канонічною діагональною формою $E_t \oplus \varphi E_{n-t}$, $\varphi \neq 0$, $1 \leq t < n$. Тоді існують такі оборотні матриці P, Q, що $PAQ = E_t \oplus \varphi E_{n-t} = \Phi$.

Теорема. *Нехай* $P = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{Vmatrix}$, *де* P_{11} *–* $t \times t$ *матриця і*

$$\begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 & & 0 \\ * & \beta_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & * & & \beta_n \end{Vmatrix}$$

– ліва форма Ерміта матриці $(\varphi E_t \oplus E_{n-t})P$. *Тоді існує така оборотна матриця* U, *що* $AU = \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{Vmatrix}^{-1} \Phi$, *де*

$$C_{22} = \begin{Vmatrix} \beta_{t+1} & 0 & & 0 \\ c_{t+2.t+1} & \beta_{t+2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n.t+1} & c_{n.t+2} & & \beta_n \end{Vmatrix},$$

де c_{ij} *– повна система лишків за модулем елемента* β_j, $i = t+2, t+3, \ldots, n, j = t+1, t+2, \ldots, n-1$.. *При цьому елементи* c_{ij}, β_k, $k = t+1, t+2, \ldots, n$, *визначені однозначно і не залежать від вибору матриці* P.

Мар'яна Юрків

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
yurkiv.maryana@gmail.com

АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ ГОЛОМОРФНОЇ В ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЇ НЕЦІЛОГО ПОРЯДКУ БЕЗ НУЛІВ

Нехай голоморфна у півплощині $\mathbb{C}^+ = \{z : \Im z > 0\}$ функція f має нецілий формальний порядок $\rho \in (0; +\infty)$ і не має нулів в $\mathbb{C}^+$, $f_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – кутові граничні значення функції f на дійсній осі, $s(t)$ – сингулярна межова функція функції f, $\tau_1(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \dfrac{\ln|f_0(x)|}{x}dx + \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \dfrac{ds(x)}{x}$, $\tau_2(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \dfrac{\ln|f_0(-x)|}{x}dx + \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_1^t \dfrac{ds(-x)}{x}$.

Доведено твердження, яке доповнює результати, отримані в [1,2].

Теорема. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$ – неціле число і голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f формального пордку ρ не має нулів в $\mathbb{C}^+$. Тоді якщо для деяких $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \in (0; \rho)$, $0 < [\rho] < \rho_1 < \rho < [\rho] + 1$ виконуеться*

$$\tau_1(r) = l_1 r^\rho + O\left(r^{\rho_1}\right), \quad \tau_2(r) = l_2 r^\rho + O\left(r^{\rho_1}\right), \quad r \to +\infty, \tag{1}$$

то рівномірно за $\varphi \in (0; \pi)$

$$\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} = \frac{2i\pi\rho^2}{\sin\pi\rho}(l_1 e^{-i\pi\rho} - l_2)e^{i\varphi(\rho-1)}r^{\rho-1} + O\left(\frac{r^{\rho_1-1}}{\sin^3\varphi}\right). \tag{2}$$

Ця теорема доповнює результати, отримані в [1,2].

1. Хаць Р. В. Асимптотика логарифмічної похідної та логарифму канонічного добутку нульового роду // Актуал. проблеми фіз., мат. та інф. – 2009. – №1. – С. 54–56.
2. Винницький Б. В., Юрків М. І. Про регулярність зростання голоморфної в півплощині функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів // Матем. студії. – 2009. – **32**, №2. – С. 148–159.

Михайло Яджак, Марія Тютюнник

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
yadzhak@zadarma.com, dept25@iapmm.lviv.ua

ПАРАЛЕЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ ЛОКАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Згідно з [1] локальне оцінювання характеристики елемента досліджуваної складної динамічної системи за заданим критерієм здійснюється за допомогою чотирьох параметрів з використанням деякої допоміжної функції $\alpha(t)$, $t \in [0, T]$. Зауважимо, що ця функція визначає величину відхилення значення характеристики від її області допустимих значень у момент часу t. Параметри оцінки у рівномірній метриці дають змогу відстежити окремі піки або збурення у поведінці характеристики та її першої похідної, а у середньоквадратичній – визначити усереднене значення їх виходу за межі допустимої області або відхилення від вибраного еталону.

Для одержання значення параметра локальної оцінки нами запропоновано паралельно-послідовний підхід, який передбачає:

1) паралельне обчислення M значень допоміжної функції; тут вважаємо, що відрізок $[0, T]$ розбито на $M - 1$ однакових частин, до того ж M обов'язково є непарним;

2) паралельне обчислення M значень однієї із функцій (залежно від параметра оцінки) $(\alpha(t))^2$, $\alpha'(t)$, $(\alpha'(t))^2$, де $t \in [0, T]$; стосовно одного із чотирьох параметрів цей фрагмент обчислень є відсутній;

3) безпосереднє знаходження значення параметра локальної оцінки з використанням режиму розпаралелювання, близького до повного двійкового дерева.

Для ефективного застосування запропонованого паралельно-послідовного підходу розроблено та досліджено алгоритмічні конструкції, які враховують обсяг наявних обчислювальних ресурсів і орієнтовані для реалізації на універсальних паралельних обчислювальних системах зі спільною пам'яттю.

1. Поліщук О. Д., Тютюнник М. І., Яджак М. С. Організація паралельних обчислень для локального оцінювання якості функціонування складних систем // Відбір і обробка інформації. – 2010. – Вип. 32. – С. 119–124.

Анатолій Ясінський, Людмила Токова

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
yasinskyy.anatoliy@gmail.com

ІНТЕГРУВАННЯ ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЛОСКОЇ НЕОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ РАДІАЛЬНО НЕОДНОРІДНОЇ КРУГОВОЇ ОБЛАСТІ

На основі методу безпосереднього інтегрування [1] у цій роботі розвинуто методику розв'язування плоскої неосесиметричної задачі теорії пружності в напруженнях для кругової області у випадку, коли механічні властивості матеріалу залежать від радіальної координати. На основі інтегрування рівнянь рівноваги з використанням методики, запропонованої у працях [2,3], компоненти тензора напружень подано через радіальні та сумарні планарні напруження, які вибрано за визначальні. На основі рівняння суцільності в напруженнях отримано ключові рівняння для визначальних напружень, розв'язання яких зведено до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду для кожної з компонент розвинень визначальних напружень у ряди Фур'є за кутовою координатою. Отримані інтегральні рівняння розв'язано з використанням відомих методик [4].

1. Вігак В.М. Розв'язки задач пружності та термопружності в напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1995. – **9**. – С. 34–122.
2. Vihak V.M. Solution of the thermoelastic problem for a cylinder in the case of a two-dimensional nonaxisymmetric temperature field // Z. Angew. Math. Mech. – 1996. – **76**, № 1 . – P. 35–43.
3. Токовий Ю.В. Визначення плоского неосесиметричного термонапруженого стану радіально-неоднорідного кільця // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 113–123.
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1983 – 544 с.

Владимир Ясинский

Черновицкий национальний университет имени Юрия Федьковича
yasinsk@list.ru

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ (ЛСДУ ЧП) С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

На базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ задана случайная функция $u \equiv u(t,x,\omega) : [0,\infty] \times \mathbb{R}^1 \times \Omega \to \mathbb{R}^1$, как сильное решение задачи Коши ЛСДУ ЧП в пространстве Скорохода [2] $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}\left(\mathbb{R}^1\right)$

$$Q\left(A_1(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = [Qu]_0 + \int\limits_0^t Q\left(A_2(\xi(s)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) uds +$$

$$+\int\limits_0^t Q\left(A_3(\ \xi(s)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) udw(s) + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{Z}} Q\left(A_4(\xi(s)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\tilde{v}(ds,dz), \tag{1}$$

$$Q\left(A_1(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\bigg|_{t=0} = [Qu]_0. \tag{2}$$

Здесь $Q\left(A_j(\centerdot), q, p\right) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{m} a_{kl}^{(j)}(\centerdot)\, q^k p^l, j = \overline{1,4}; a_{kl}^{(j)}(\centerdot)$ – беровские функции; $\xi(t)$ – стохастически непрерывный марковский процесс; $w(t) \equiv w(t,\omega)$ – стандартный винеровский процесс; $\tilde{v}(t,A) = v(t,A) - t\Pi(A)$ – центрованная пуассоновская мера.

С помощью 2-го метода Ляпунова [1] получены достаточные условия асимптотической устойчивости в $l.i.m.$ решения исходной задачи (1), (2).

1. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилазиции систем случайной структуры. – Екатеринбург: Из-во Академии путей сообщения, 1998. – 222 с.
2. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерний практикум. – Чернівці: Золоті литаври, 2009. – 798 с.

АВТОРСЬКИЙ ПОКАЖЧИК

Наукове видання

Міжнародна математична конференція
ім. В.Я. Скоробогатька

Тези доповідей

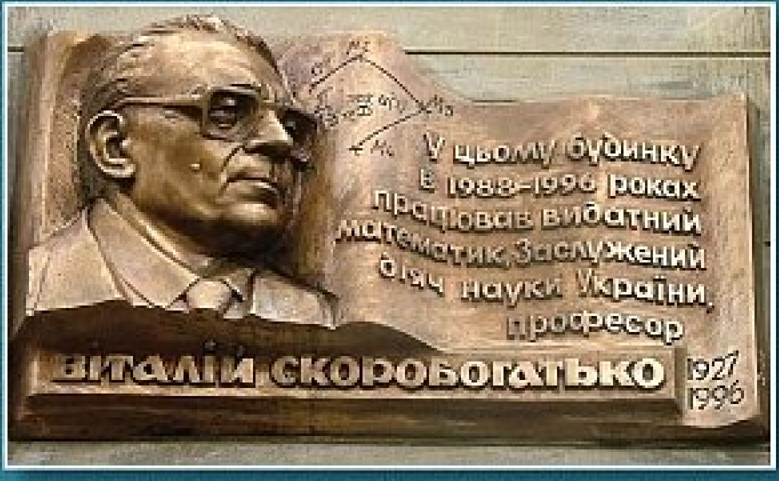
Відповідальні за випуск
Олег Петрук, доктор фізико-математичних наук
Галина Снітко, кандидат фізико-математичних наук

Оригінал-макет підготовлено в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Підписано до друку 15.08.2011.
Формат 60×84 1/16. Папір офсетний. Умовн. друк. арк. 14,18
Зам. № 08-01/11. Тираж 300 прим.

Віддруковано у Дослідно-видавничому центрі
Наукового товариства ім. Шевченка
79008, Львів, вул. Винниченка, 26
Тел. (032) 276 51 55

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів відавничої справи ДК № 884 від 04.04.2002 р.



Пропам'ятна таблиця В. Я. Скоробогатьку,
на фасаді будинку №15
вул. Дж. Дудаєва у м. Львові