

УДК 539.3

## ДО МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ДОМІШОК НА МОДУЛІ ПРУЖНОСТІ

Тарас Нагірний<sup>1</sup>, Костянтин Червінка<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів;

<sup>2</sup> Львівський національний університет ім. Івана Франка, м. Львів

В рамках моделі локально неоднорідного твердого розчину [1] запропоновано підхід, що дозволяє враховувати вплив домішок на модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона. Підхід базується на врахуванні залежності від густини скелету локальних модулів пружності, тобто коефіцієнтів у поданні вільної енергії у просторі базових параметрів стану. Таку залежність прийнято у вигляді [2]

$$E = E_*(\rho_0 / \rho_{0*})^{\beta_E}, \quad \nu = \nu_*(\rho_0 / \rho_{0*})^{\beta_\nu},$$

де  $E$ ,  $\nu$  – локальні модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона;  $\rho_0$  – густина скелету;  $\beta_E$ ,  $\beta_\nu$  – сталі; зірочкою відзначено величини у тілі віднесення.

Для ефективних модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона (далі модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона) приймаємо загальноприйняте їх означення:

- чисельне значення модуля Юнга дорівнює відношенню інтенсивності зовнішнього силового навантаження до відносного видовження тіла, спричиненого цим навантаженням, у напрямку дії навантаження;
- коефіцієнт Пуассона є відношенням поперечного скорочення до поздовнього видовження, спричинених дією силового навантаження.

В рамках моделі враховано структурну неоднорідність матеріалу та геометричну неоднорідність реальної поверхні тіла, характерними розмірами яких є відповідно  $\xi_m^{-1}$  та  $\xi_s^{-1}$ .

Вивчення впливу домішок на модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона проведено на прикладі двокомпонентного шару (область  $|x| \leq \ell$ ), який при  $y \rightarrow \pm\infty$  перебуває під дією силового навантаження  $\vec{F} = (0, 2\sigma_a \ell, 0)$ . Приймаємо, що на його вільних від силового навантаження поверхнях  $x = \pm\ell$  задано постійні, відмінні від нуля значення густин скелету  $\rho_{0a}$  та домішок  $\rho_{1a}$ .

На основі одержаного розв'язку записано формули для модуля Юнга  $E_{ef}$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu_{ef}$ . Встановлено, що наявність домішок не змінює якісно залежності модуля Юнга від товщини шару. Вплив домішок на

$E_{ef}, \nu_{ef} \in$  більшим у товстих шарах. Для  $E_{ef}$  це ілюструють графіки на рис. 1, на якому показано залежність  $E_{ef}/E_*$  від параметра  $\xi_m l$  для  $a = -0.1$ ,  $\rho_{0a}/\rho_{0*} = 0.5$ ,  $\rho_{1a}/\rho_{1*} = 0.02$ ,  $\xi_s/\xi_m = 0.2, 1.8$  (криві 1,2),  $\beta_E = 1$ ,  $\beta_\nu = 0.5$  (тут  $a$  – параметр, що характеризує вплив густини домішок на густину скелету). Штрихові лінії відповідають шару без домішки.

Залежність  $E_{ad} = |E_{ef} - E'_{ef}| / E'_{ef}$  ( $E'_{ef}$  – модуль Юнга бездомішкового шару) від параметрів  $\beta_E, \beta_\nu$  для  $\nu_* = 0.33$ ,  $\rho_{0a}/\rho_{0*} = 0.5$ ,  $\rho_{1a}/\rho_{1*} = 0.02$ ,  $a = -0.1$ ,  $\xi_s/\xi_m = 0.6$ ,  $\xi_m l = 3, 6, 20$  (криві 1–3) наведено на рис. 2, 3. На рис. 2 взято  $\beta_\nu = 0$ , а на рис. 3 прийнято  $\beta_E = 1$ .

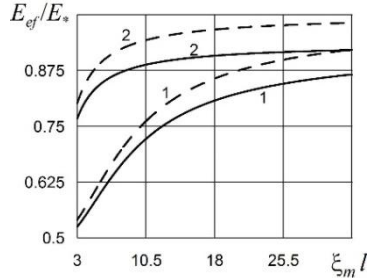


Рис. 1

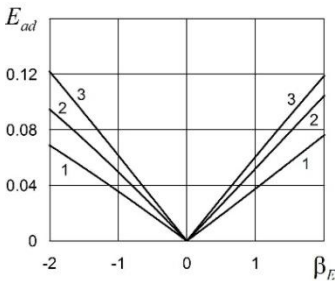


Рис. 2

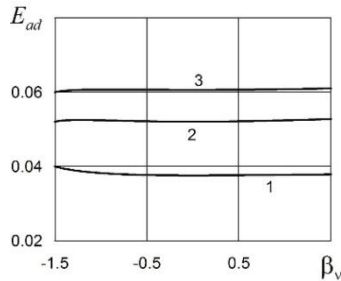


Рис. 3

Відзначаємо зростання впливу домішок зі збільшенням параметра  $\beta_E$  в області  $\beta_E > 0$  і практичну незмінність значення  $E_{ad}$  зі зміною параметра  $\beta_\nu$ .

1. *Bozhenko B., Nahirnyj T., Tchervinka K.* To modeling admixtures influence on the size effects in a thin film // *Math. model. and comput.* – 2016. – **3**, No. 1. – P. 12–22.
2. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical modeling of structural and near-surface non-homogeneities in thermoelastic thin films // *Int. J. Eng. Sci.* – 2015. – **91**. – P. 49–62.

## ON THE MODELLING OF THE ADMIXTURE EFFECT IN THE ELASTIC MODULI

*Within the framework of the model of locally heterogeneous solid solution, an approach is presented that allows to take into account the admixtures effect on Young's modulus and Poisson's ratio. The approach is based on the dependence of the local elastic moduli on the skeleton density. The regularities of the effects are studied on the example of the layer.*