УДК 539.3

ПЛОСКА ПСЕВДОСТАТИЧНА ЗАДАЧА ПОРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ

Наталя Вайсфельд, Зінаїда Журавльова

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, м. Одеса

Розглянуто плоску півплощину $y > 0$ з поро пружного матеріалу. На грані $y = 0$ діє навантаження інтенсивності $\ell(x)$ та виконуються умови осушення [1]:

$$\sigma_y\Big|_{y=0} = \ell(x)\theta(t), \quad \tau_{xy}\Big|_{y=0} = 0, \quad p\Big|_{y=0} = 0\,. \tag{1}$$

Тут $p(x,y,t)$ – тиск рідини, що знаходиться у порах, $\sigma_y(x,y,t)$, $\tau_{xy}(x,y,t)$ – нормальне та дотичне напруження твердого каркасу відповідно, $\theta(t)$ – функція Хевісайда.

Початкову умову визначаємо за припущення, що на початку навантаження рідина не може залишати півплощину:

$$\left.\left(\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+S_p p\right)\right|_{t=0} = 0\,. \tag{2}$$

Тут α – коефіцієнт Біо, S_p – запам’ятованість простору пор.

Потрібно знайти переміщення та напруження твердого каркасу та тиск рідини усередині півплощини, що задовільняють умови (1) – (2) та рівняння виду [2]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{2}{\kappa+1}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\dfrac{\alpha}{G}\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{2}{\kappa-1}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\alpha}{G}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}-\dfrac{\alpha}{k}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial t}\right)-\dfrac{S_p}{k}\dfrac{\partial p}{\partial t}=0, \end{cases} \tag{3}$$

де $u(x,y,t)=u_x(x,y,t)$, $v(x,y,t)=u_y(x,y,t)$ – переміщення твердого каркасу, $\kappa = 3-4\mu$ – стала Мусхелішвілі, μ – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву, k – коефіцієнт проникності.

Вихідну задачу (1) – (3) зводимо до одновимірної перетворенням Лапласа з параметром s за часом t та повного нескінченного перетворення Фур'є з параметром γ за змінною x. Одновимірну задачу в просторі трансформант сформульовано у векторному вигляді

$$\begin{cases} \mathbf{I}\vec{y}''_{s\gamma}(y) - \mathbf{R}\vec{y}'_{s\gamma}(y) + \mathbf{P}\vec{y}_{s\gamma}(y) = 0, \\ (1-\mu)v'_{s\gamma}(0) - i\gamma\mu u_{s\gamma}(0) = \dfrac{1-2\mu}{2G}\ell_{s\gamma}, \\ u'_{s\gamma}(0) - i\gamma v_{s\gamma}(0) = 0, \quad p_{s\gamma}(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Тут $\mathbf{I}$ – одинична матриця, $\vec{y}_{s\gamma}(y) = \begin{pmatrix} u_{s\gamma}(y) \\ v_{s\gamma}(y) \\ p_{s\gamma}(y) \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2i\gamma}{\kappa-1} & 0 \\ \dfrac{2i\gamma}{\kappa+1} & 0 & \dfrac{\alpha}{G}\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1} \\ 0 & \dfrac{\alpha s}{k} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\gamma^2\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1} & 0 & \dfrac{\alpha i\gamma}{G} \\ 0 & -\gamma^2\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ \dfrac{\alpha s i\gamma}{k} & 0 & -\gamma^2 - \dfrac{sS_p}{k} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок задачі (4) будується за допомогою апарату матричного диференціального числення [3]. У результаті отримано точний розв'язок вихідної задачі.

1. *Cheng A. H.-D.* Poroelasticity / Hassanizadeh S.M. (ed.) // Theory and applications of transport in porous media. – Springer, 2016. – **27**. – 877 p.
2. *Verruijt A.* An introduction to soil dynamics / Bear J. (ed.) // Theory and applications of transport in porous media. – Springer, 2010. – **24**. – 433 p.
3. *Попов Г. Я.* Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. – Одесса: Астропринт, 2013. – 424 с.

PLANE PSEUDO-STATIC PROBLEM OF POROELASTICITY FOR A SEMI-PLANE

A plane pseudo-static problem of poroelasticity for a semi-plane is solved with the help of integral transforms method and matrix differential calculation. The exact solution of the problem was derived.