

УДК 539.3

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ З ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ

Олександр Максимук¹, Юлія Сачук², Юрій Музичук³

¹Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів;

²Волинський національний університет імені Л. Українки, м. Луцьк;

³Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

У роботі розв'язано контактні задачі для штампів довільної форми у взаємодії з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі (плоска задача) [1, 4]. Задачі зведено до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, розв'язок якого знайдено аналітично. Виконано числовий аналіз контактної тиску, переміщення штампта та переміщення у пружній основі, зміну області контакту у залежності від навантаження контактної пари, форми штампта, а також здійснено порівняння розв'язків аналогічних задач для основи, що моделюється пружною півплощиною.

Контактні задачі для штампів особливо канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної), якщо моделювати пружну основу півплощиною, мають низку особливостей. В першу чергу – це методи розв'язування, з використанням яких задачі зводять до обчислення еліптичних інтегралів третього роду у всьому діапазоні вхідних параметрів та зведення їх до інтегралів Карлсона [2, 3], що вимагає значних обчислювальних зусиль. Однак найбільшим недоліком моделі пружної півплощини є неможливість порахувати зміщення штампта і прогин основи. Цих недоліків позбавлена запропонована модель.

Розглядається контактна взаємодія штампта довільної форми $f(x)$ із пружною основою з двома коефіцієнтами постелі (рис. 1). Тут ν та E – коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга основи, $2a$ – невідома область контакту, δ – невідоме зміщення штампта, як жорсткого тіла, H – товщина пружного шару, $V(x)$ – прогин поверхні шару.

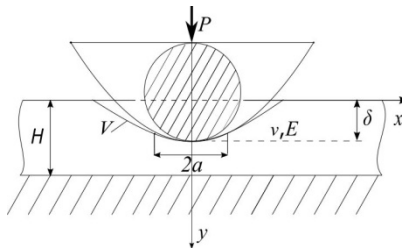


Рис. 1

Оскільки прогин пружної основи в області контакту $2a$ рівний $\delta - f(x)$ (рис. 1), тому з урахуванням умови рівності прогинів, отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду для визначення контактної тиску [5]:

$$\delta - f(x) = C \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi, \quad |x| \leq a,$$

де $C = E^{-1} \sqrt{3(1-\nu)/2}$, $\alpha = H^{-1} \sqrt{6/(1-\nu)}$.

Аналітичний розв'язок має вигляд:

$$\delta = f(a) - \frac{f'(a)}{\alpha}, \quad p(x) = \frac{\alpha}{2C} \left(f(-a) - f(x) - \frac{f'(-a)}{a} + \frac{1}{\alpha^2} f''(x) \right).$$

З умови рівноваги штампа отримуємо вираз для знаходження області контакту

$$P = \frac{\alpha}{C} \left(af(-a) - \frac{af'(-a)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} f'(a) - \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx \right).$$

1. Балабушич М., Фоліч Б., Чорич С. Изгиб фундаментной балки на упругом основании за счет двух коэффициентов реакции земляного полотна Винклера // Открытый журнал гражданского строительства. – 2019. – 9, № 2. – С. 12.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 491 с.
3. Максимук О.В., Сачук Ю. В., Яцюк С. М. Контактні задачі для плоскої моделі пружної основи з двома коефіцієнтами постелі // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2020. – 63, № 3. – С. 136–140.
4. Сачук Ю.В., Максимук О. В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – № 20. – С. 180–187.
5. Sachuk Yu.V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – 220, No2. – P. 204–212.

CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC FOUNDATION WITH TWO BEDDING COEFFICIENTS

The contact problems on interacting stamps of the canonical shape with an elastic foundation with two bedding coefficients are considered within the framework of the plane formulation. The problems are reduced to solving the Fredholm integral equations of the first kind. An analytical solutions for canonical stamps are constructed.