УДК 519.2

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОРЯДКУ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ НА РОЗВЯЗОК КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В БАЗИСІ БІОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Ярослав П’янило, Валентина Собко

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

Математичні моделі фізичних процесів з використанням похідних дробових порядків більш адекватно описують ці процеси в порівнянні з класичними частинними похідними. У літературі введено декілька видів дробових похідних та інтегралів. Зокрема, оператор дробової похідної у термінах Ріммана – Ліувіля [1–3]

$$D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}}\int_0^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m}}d\xi .$$

де $m=[\alpha],\ldots -$ ціла частина дійсного числа. З обчислювальних експериментів відомо, що порядок дробової похідної має значний вплив на розв’язок крайових задач. На цей час ще не побудовано критеріїв вибору порядку дробової похідної. Метою роботи є спроба розроблення критерію вибору порядку дробової похідної на основі балансових співвідношень.

Однією із задач, де застосування дробових похідних є ефективним, є моделювання процесу роботи складних газотранспортних систем, зокрема, фільтрація газу в пористому середовищі, яка у термінах дробової похідної Ріммана – Ліувіля за часовою змінною в одновимірному випадку описується рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right) = 2mh\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{p}{\chi}\right) + 2qp_{at}\right). \tag{1}$$

Задача полягає у знаходженні розв’язку $p(x,t)$ рівняння (1) за відомими значеннями тиску $p(x_i,t_0)$ у заданих точках середовища й умовою непроникності на контурі середовища. При цьому необхідно, щоб виконувалась умова балансування маси газу в сховищі

$$M = \int_V \rho dv .$$

Інтегрування здійснюється по об’єму сховища V, M – маса газу в сховищі, ρ – густина газу, яка пов’язана з тиском рівнянням стану $p=\rho\chi RT$. Тут R – газова стала, T – абсолютна температура газу.

Застосування дробового числення в математичному моделювання зводиться до необхідності розв'язування інтегродиференціального рівняння типу згортки. В роботі зроблена спроба на базі многочленів Лагерра побудувати біортогональні многочлени та використати їх для розв'язання крайових задач з похідними дробових порядків.

Сформулюємо квазіспектральну задачу для інтегрального оператора. Для заданого $n = 1, 2, \ldots$ знайти такі значення параметра λ, при яких рівняння

$$\int_0^t t_1^{-\alpha} \exp(t_1) \int_0^{t_1} t_2^{\alpha} \exp(-t_2) \varphi(t_2) dt_2 dt_1 = -\lambda\varphi(t) + \tau_1 L_{n+1}^{\alpha}(t) + \tau_0 L_0^{\alpha}(t)$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $\varphi(t) \in L_{2,\varpi}[0,\infty]$ степеня $\le n$, де τ_1, τ_0 деякі параметри, а $L_{n+1}^{\alpha} = L_{n+1}^{\alpha}(t)$ та $L_0^{\alpha} = L_0^{\alpha}(t)$ задані (і зафіксовані) поліноми Лаґерра відповідно степеня рівного $n+1$ та нульового.

Справедливими є наступні рівності

$$\int_0^{\infty} \exp(-t)\varphi_i^n(t)\varphi_j^n(t)dt = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} \exp(-t)\varphi_i^n(t)\varphi_j^n(t)dt = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ \delta_i, & i = j. \end{cases}$$

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. *Васильев В. В., Симак Л. А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – Киев: Научное издание НАН Украины, 2008 – 256 с.
3. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. – Москва: Физматлит, 2003. – 272 с.

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF THE ORDER OF A FRACTIONAL DERIVATIVE ON THE SOLUTION OF BORDER PROBLEMS IN THE BASIS OF BIORTOGONAL POLYNOMES

On the basis of the constructed biotogonal functions, the problem of gas filtration in a one-dimensional case is solved with the use of derivative fractional orders. The influence of the order of the fractional derivative on the solution of the problem is investigated.